



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

PME-3554 – Introdução às Estruturas Aeronáuticas

Aula #14

Prof. Dr. Roberto Ramos Jr.

19/10/2023



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Teoria de Placas: Parte 5
Modificações nas equações para incorporar
os esforços de membrana

1. Introdução
2. Estado tensional, equações constitutivas e esforços solicitantes
3. Relações deformações-deslocamentos
4. Novas equações de equilíbrio e novas equações governantes
5. Exemplo de aplicação



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

1. Introdução

Até o momento, salvo alguns casos analisados na Aula #9⁽¹⁾, admitimos que a placa era submetida apenas a esforços transversais dentro do regime de pequenos deslocamentos, pequenas rotações e pequenas deformações, de modo que o plano de meia espessura da placa estivesse sempre isento de tensões, formando uma superfície neutra (vide Hipóteses de Kirchhoff, Aula #10 slide #3).

Contudo, em alguns casos, podemos ter, além dos esforços transversais, esforços atuantes no próprio plano da placa. Tais esforços, bem como as tensões correspondentes, são denominados esforços (ou tensões) de membrana.

Nesta aula, voltaremos a investigar os casos em que tanto os esforços transversais quanto os de membrana agem sobre a placa ao mesmo tempo. É oportuno destacar que dois cenários podem ser aventados nesta situação, a saber:

(1) Aula #9: Teoria de Placas. Parte 1: Flexão de placas retangulares longas em superfícies cilíndricas com (ou sem) esforços de membrana.



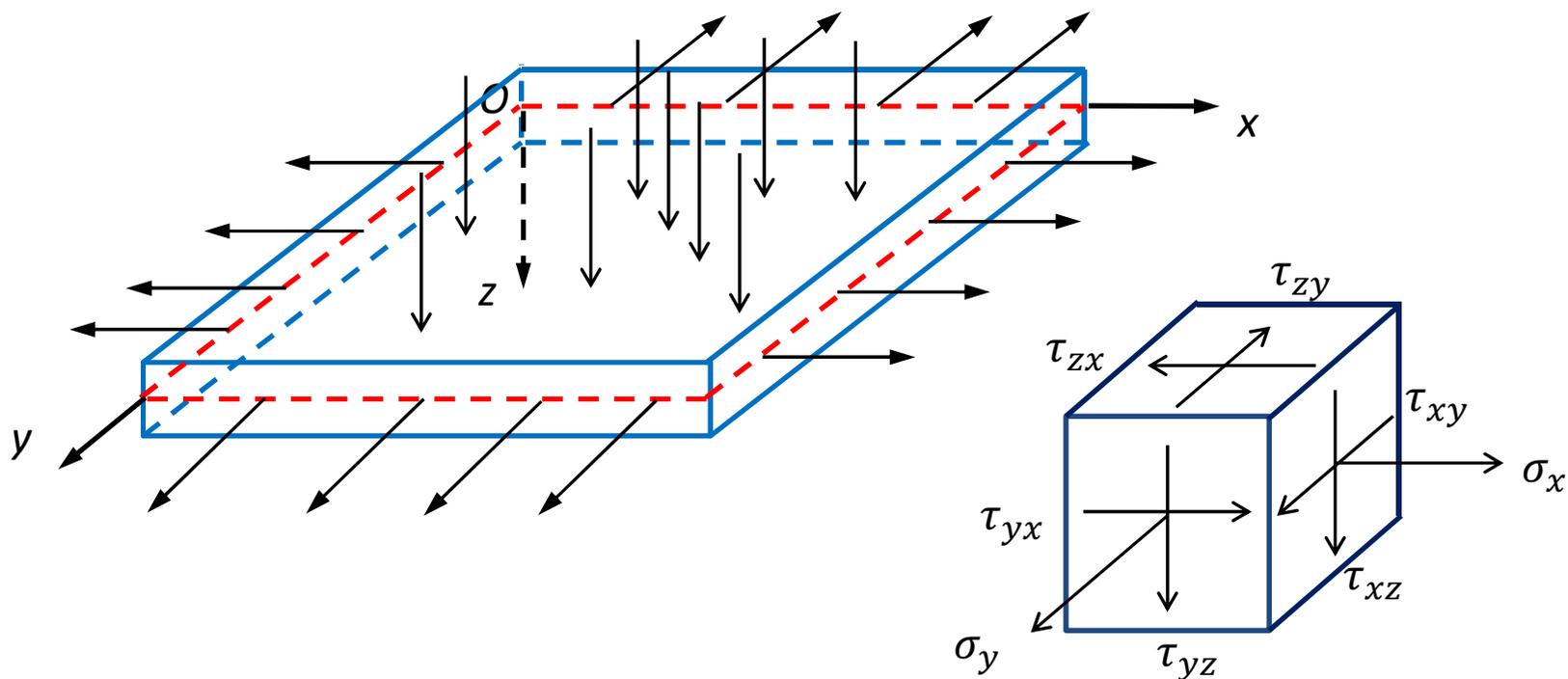
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

1. As tensões decorrentes dos esforços de membrana são relativamente pequenas, de modo que sua influência na flexão da placa (e nos deslocamentos $w(x, y)$ causados pelos esforços transversais) é desprezível. Neste caso, as tensões finais podem ser obtidas simplesmente pela superposição das tensões devidas aos esforços de membrana (usando, p.ex., resultados da T.E.C.) com as tensões devidas unicamente aos carregamentos transversais;
2. As tensões de membrana não são pequenas (comparadas àquelas devidas aos carregamentos transversais) e seu efeito na flexão da placa deve ser levado em conta. Neste caso, as tensões de membrana podem ter um efeito considerável na flexão da placa e os esforços correspondentes devem ser considerados na dedução da nova equação governante. Deve-se ressaltar, contudo, que a hipótese de pequenos deslocamentos transversais ainda será considerada, embora com menos limitações, já que será importante investigar o efeito que os deslocamentos transversais exerce sobre as forças de membrana (ou vice-versa). As seções seguintes levam em conta, principalmente, este segundo cenário.

Nota: As relações entre as tensões planas e as derivadas dos deslocamentos transversais, apresentadas no slide #18, esclarecem bem os dois cenários descritos acima.



2. Estado tensional, equações constitutivas e esforços solicitantes





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Como, por hipótese, a tensão normal σ_z está sendo desprezada frente às tensões planas, teremos (vide Hipóteses de Kirchhoff [1] e [5], Aula#10, slide #3):

$$\left[\begin{array}{l} \varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu\sigma_y] \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu\sigma_x] \\ \gamma_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy} \end{array} \right] \quad \longrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} [\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y] \\ \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} [\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x] \\ \tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy} \end{array} \right]$$

As integrações das tensões ao longo da espessura da placa geram esforços solicitantes (todos por unidade de comprimento), associados às respectivas tensões. Assim, são definidos:



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

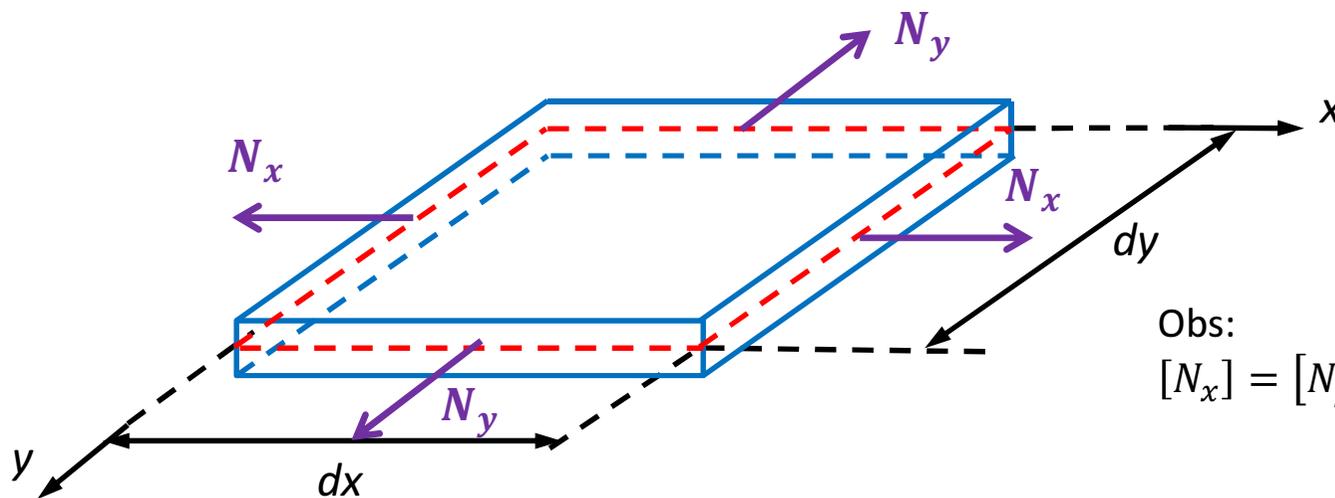
Esforços de Membrana N_x e N_y :

$$N_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x dz$$

(força de membrana, por unidade de comprimento tomado na direção y , que traciona, ou comprime, a placa na direção x).

$$N_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y dz$$

(força de membrana, por unidade de comprimento tomado na direção x , que traciona, ou comprime, a placa na direção y).



Obs:
 $[N_x] = [N_y] = N/m$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

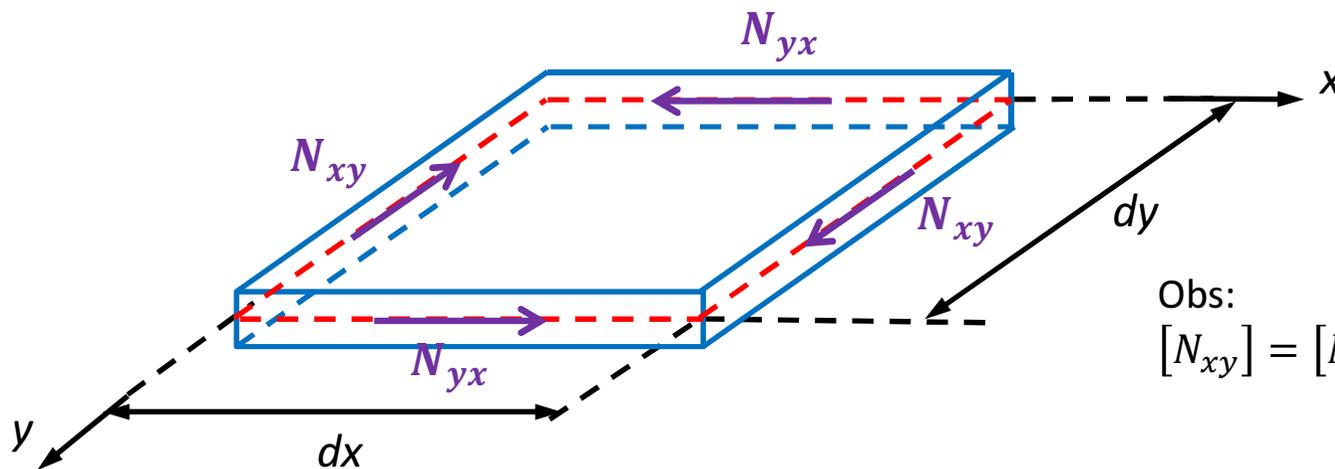
Esforços de Membrana N_{xy} e N_{yx} :

$$N_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} dz$$

(força cisalhante de membrana, por unidade de comprimento tomado na direção y , associada às tensões cisalhantes τ_{xy}).

$$N_{yx} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yx} dz$$

(força cisalhante de membrana, por unidade de comprimento tomado na direção x , associada às tensões cisalhantes τ_{yx}).



Obs:
 $[N_{xy}] = [N_{yx}] = N/m$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

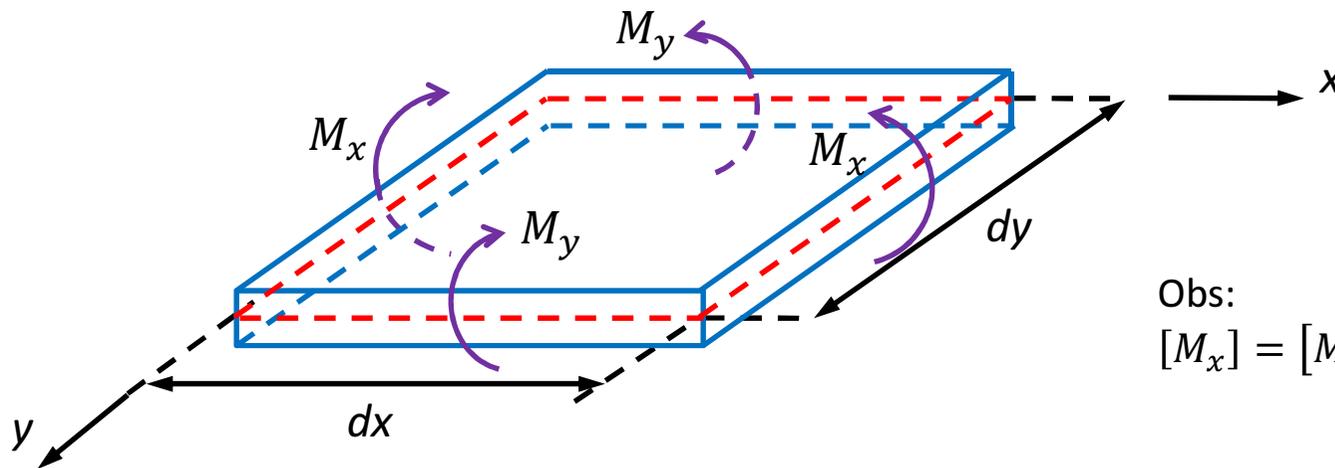
Momentos fletores M_x e M_y :

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz$$

(momento fletor, por unidade de comprimento tomado na direção y , que flete a placa em torno do eixo y).

$$M_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z dz$$

(momento fletor, por unidade de comprimento tomado na direção x , que flete a placa em torno do eixo x).



Obs:
 $[M_x] = [M_y] = N$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

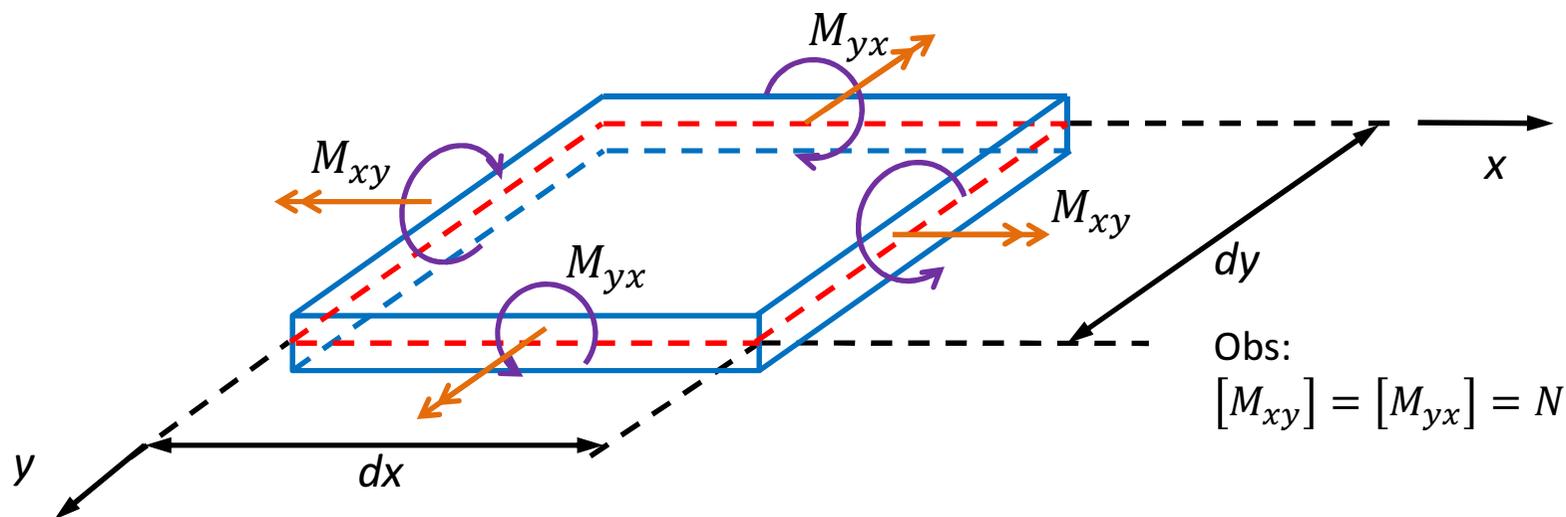
Momentos torçores M_{yx} e M_{xy} :

$$M_{yx} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yx} \cdot z \cdot dz$$

(momento torçor, por unidade de comprimento tomado na direção x , que torce a placa em torno do eixo y).

$$M_{xy} = - \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} \cdot z \cdot dz$$

(momento torçor, por unidade de comprimento tomado na direção y , que torce a placa em torno do eixo x).





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

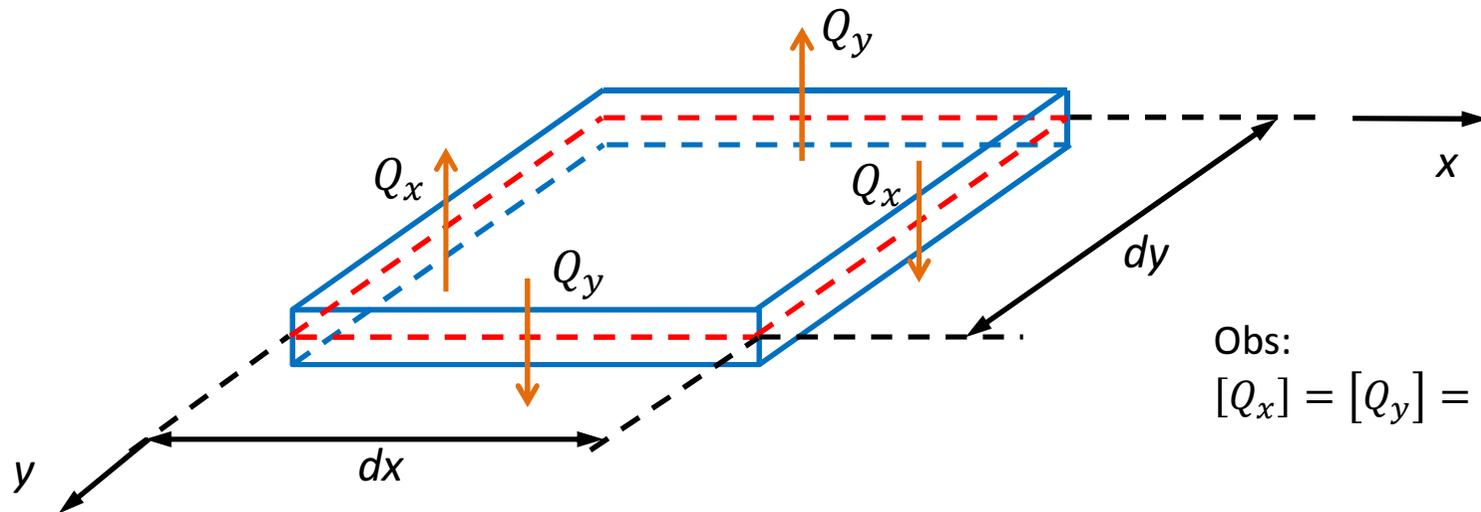
Forças cortantes Q_x e Q_y :

$$Q_x = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} \cdot dz$$

(força cortante, na direção z, causada pela tensão de cisalhamento τ_{xz} , por unidade de comprimento tomado na direção y).

$$Q_y = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yz} \cdot dz$$

(força cortante, na direção z, causada pela tensão de cisalhamento τ_{yz} , por unidade de comprimento tomado na direção x).



Obs:
 $[Q_x] = [Q_y] = N/m$



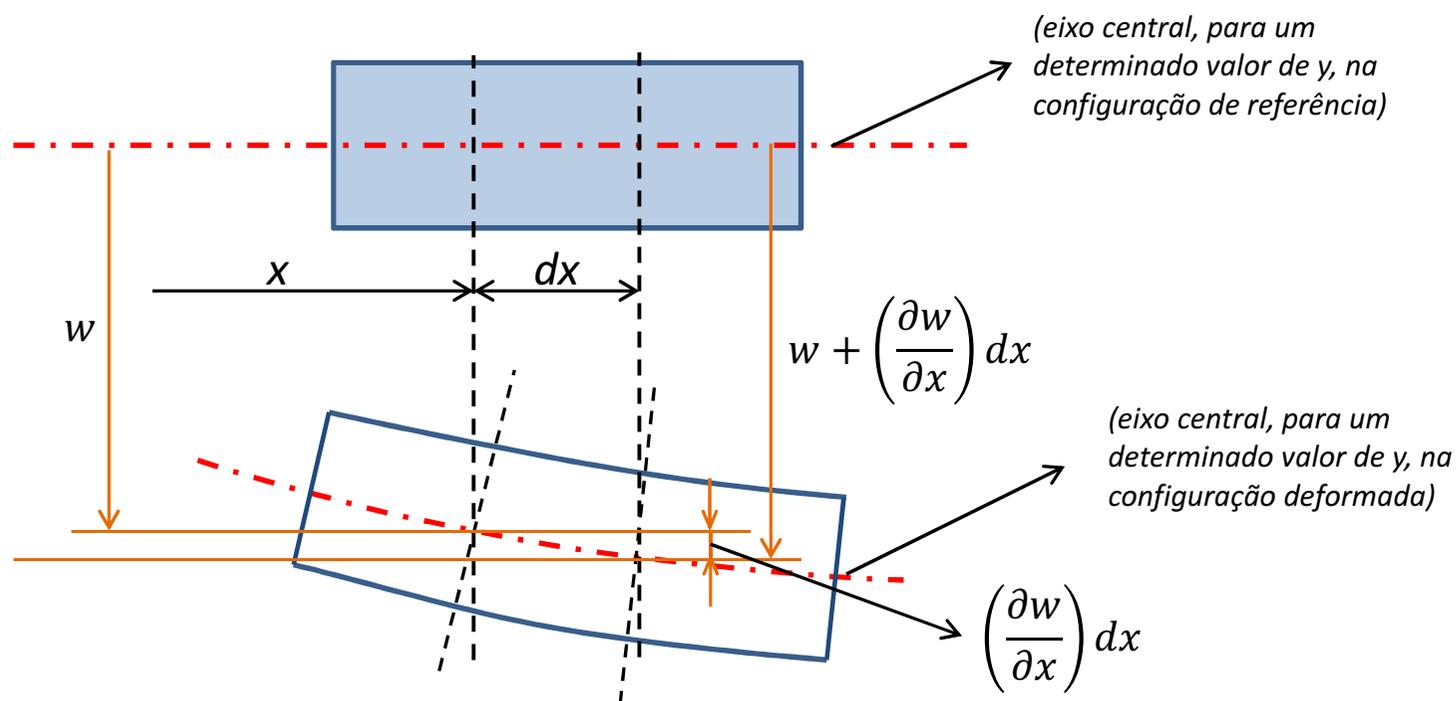
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

É digno de nota que nas figuras apresentadas nos slides #7 a #11 só estão indicados os esforços solicitantes em uma região infinitesimal da placa, sem (ainda) a devida indicação das variações destes esforços ao longo das direções x e y . Tais variações serão devidamente consideradas ao impormos o equilíbrio de forças e de momentos (vide seção 4).



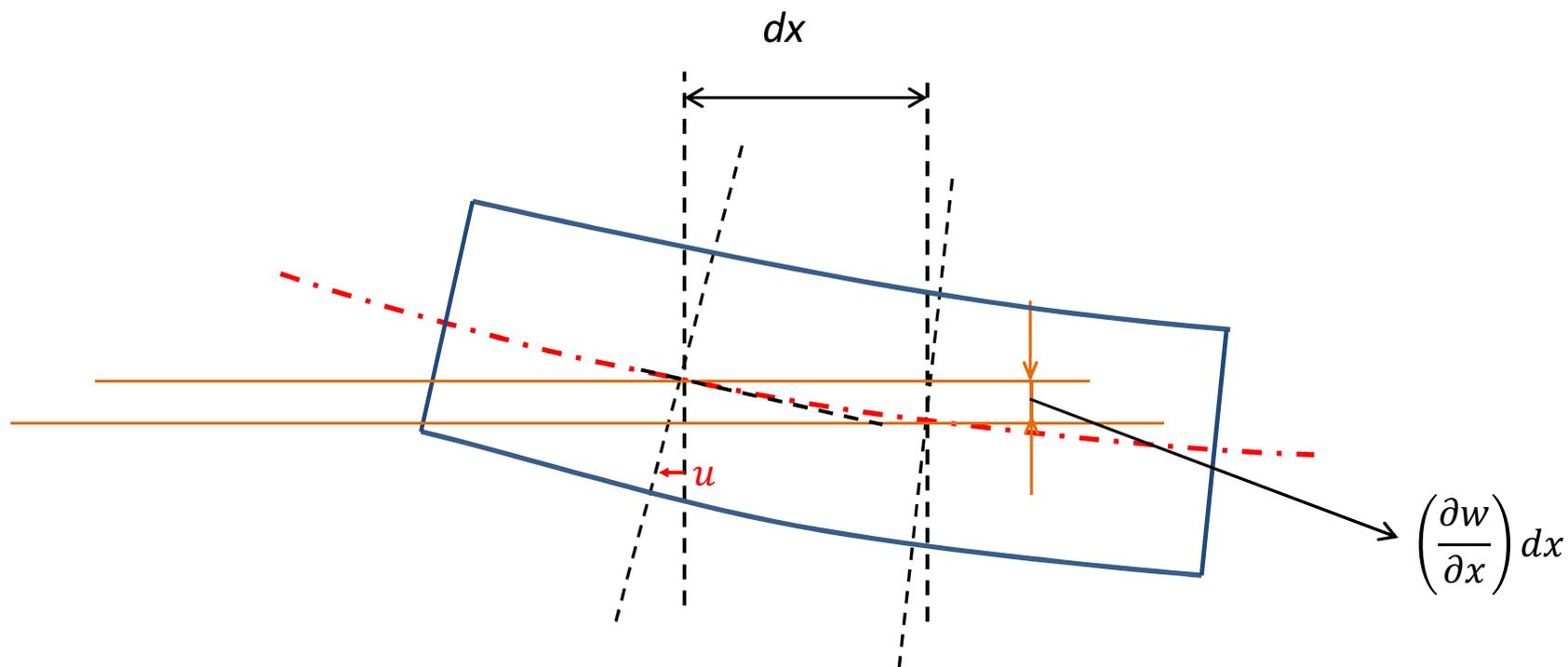
3. Relações de deformações-deslocamentos

Baseando-nos em parte nas hipóteses de Kirchhoff (vide aula #10, Hip.[2] e [4]), podemos adaptar as relações anteriores para obter as seguintes aproximações para as componentes $u = u(x, y, z)$ e $v = v(x, y, z)$ dos deslocamentos dos pontos da placa:





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica



$$u(x, y, z) \cong u_0(x, y) - z \frac{\partial w}{\partial x} \quad \text{Por analogia:} \quad v(x, y, z) \cong v_0(x, y) - z \frac{\partial w}{\partial y}$$

→ Ação dos esforços de membrana



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Também, diferentemente das relações de deformações-deslocamentos utilizadas antes (vide Aula #10, slide #12), utilizaremos agora relações de deformações-deslocamentos que levam em conta alguns termos não-lineares. Relembrando o que foi apresentado na Aula #03 (vide slides #17, #19 e #23), as expressões exatas para os alongamentos lineares ε_x e ε_y , bem como para a distorção γ_{xy} , são dadas por:

$$\varepsilon_x = \lambda_x - 1 = \left(\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} - 1$$

$$\varepsilon_y = \lambda_y - 1 = \left(\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} - 1$$

$$\text{sen}(\gamma_{xy}) = \frac{1}{\lambda_x \cdot \lambda_y} \left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right]$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Ao invés de simplesmente linearizarmos as expressões exatas, vamos proceder às expansões em série de Taylor das mesmas, retendo alguns termos quadráticos. Desta forma, obtemos:

$$\varepsilon_x \cong \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_x \cong \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2$$

$$\varepsilon_y \cong \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_y \cong \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2$$

$$\gamma_{xy} \cong \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \quad \Rightarrow \quad \gamma_{xy} \cong \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Substituindo agora as expressões apresentadas para $u(x, y, z)$ e para $v(x, y, z)$ (vide slide #14) nas relações deformações-deslocamentos apresentadas no slide #16, encontramos:

$$\left[\begin{array}{l} \varepsilon_x \cong \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \\ \varepsilon_y \cong \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \\ \gamma_{xy} \cong \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \end{array} \right] \longrightarrow \left[\begin{array}{l} \varepsilon_x \cong \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \varepsilon_y \cong \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \gamma_{xy} \cong \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} - 2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{array} \right]$$

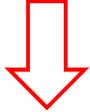
Obs: Lembre que $u_0 = u_0(x, y)$ e $v_0 = v_0(x, y)$ são os deslocamentos, nas direções x e y , dos pontos da superfície de meia-espessura (que, agora, também se deforma). Compare também as expressões acima com suas correspondentes (vide Aula #10, slide #12).



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Retomando as equações constitutivas apresentadas no slide #6, e utilizando as relações obtidas no slide #17, teremos:

$$\left[\begin{array}{l} \sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial u_0}{\partial x} + \nu \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{\nu}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] - \frac{E}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] z \\ \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial v_0}{\partial y} + \nu \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \frac{\nu}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] - \frac{E}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] z \\ \tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \left[\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right] - \frac{E}{(1+\nu)} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] z \end{array} \right.$$

 **(Efeito das forças de membrana)**  **(Efeito da flexão)**

Obs: Compare as expressões acima com as apresentadas na Aula#10, slide #12.



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Retomando as expressões vistas nos slides #7 e #8 para os esforços solicitantes N_x , N_y , N_{yx} e N_{xy} , teremos:

$$N_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x dz = \frac{Eh}{1 - \nu^2} \left[\frac{\partial u_0}{\partial x} + \nu \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{\nu}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right]$$

$$N_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y dz = \frac{Eh}{1 - \nu^2} \left[\frac{\partial v_0}{\partial y} + \nu \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \frac{\nu}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right]$$

$$N_{xy} = N_{yx} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yx} dz = \frac{Eh}{2(1 + \nu)} \left[\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right]$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Retomando as expressões vistas nos slides #9 e #10 para os esforços solicitantes M_x , M_y , M_{yx} e M_{xy} , teremos:

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz = -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right]$$

$$M_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z dz = -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right]$$

$$M_{xy} = -M_{yx} = - \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yx} z dz = D(1 - \nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)$$

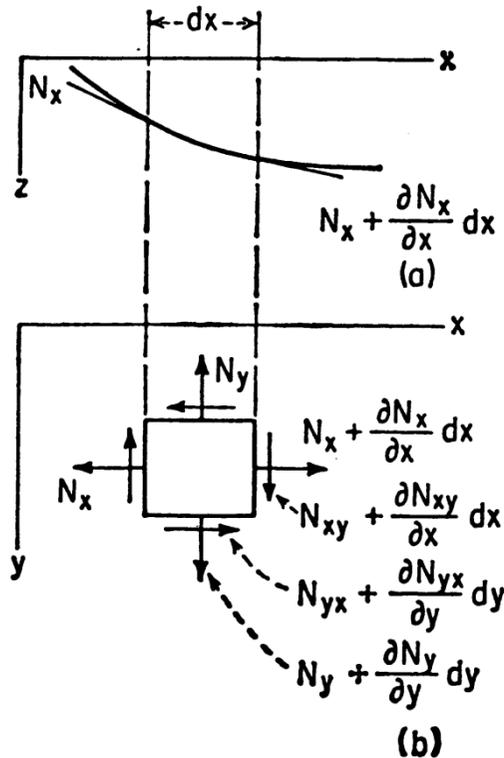


Expressões idênticas às encontradas na Aula#10



4. Novas equações de equilíbrio e nova equação governante

4.1. Equação de equilíbrio de forças na direção x:



$$\left[N_x + \frac{\partial N_x}{\partial x} dx \right] dy - N_x dy + \left[N_{yx} + \frac{\partial N_{yx}}{\partial y} dy \right] dx - N_{yx} dx = 0$$

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} dx dy + \frac{\partial N_{yx}}{\partial y} dy dx = 0$$

Dividindo cada parcela pelo produto $dx dy$ e levando ao limite para $dx \rightarrow 0$ e $dy \rightarrow 0$, virá:

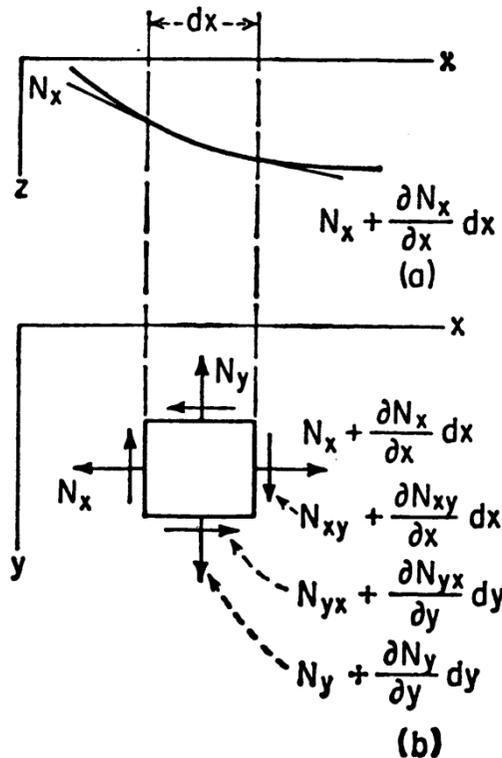
$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{yx}}{\partial y} = 0$$

E, como $N_{xy} = N_{yx}$:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0$$



4.2. Equação de equilíbrio de forças na direção y:



$$\left[N_y + \frac{\partial N_y}{\partial y} dy \right] dx - N_y dx + \left[N_{xy} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} dx \right] dy - N_{xy} dy = 0$$

$$\frac{\partial N_y}{\partial y} dy dx + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} dx dy = 0$$

Dividindo cada parcela pelo produto $dx dy$ e levando ao limite para $dx \rightarrow 0$ e $dy \rightarrow 0$, virá:

$$\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = 0$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

4.3. Equação de equilíbrio de forças na direção z:

Para obter a nova equação de equilíbrio de forças na direção vertical (direção z), será necessário considerar:

- A parcela decorrente da pressão aplicada sobre a placa;
- As parcelas das forças cortantes Q_x e Q_y (e suas variações);
- As novas parcelas associadas às (componentes das) forças de membrana N_x , N_y , N_{xy} e N_{yx} (e suas variações).

Denotaremos a resultante de cada uma destas três parcelas por $R_{z,i}$ (com $i = 1,2,3$), sendo evidente que:

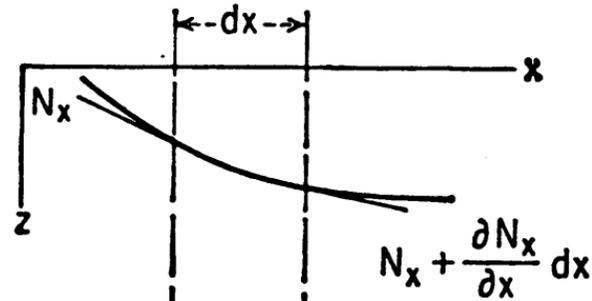
$$R_{z1} + R_{z2} = \left(\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q(x, y) \right) dx dy$$

(vide Aula #10, slides #14 e #15)



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Para obter a parcela R_{z3} :



$$R_{z3,1} = \left[\left(N_x + \frac{\partial N_x}{\partial x} dx \right) dy \right] \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx \right) - [N_x dy] \frac{\partial w}{\partial x} \cong \left(\frac{\partial N_x}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) dx dy$$

$$R_{z3,2} = \left[\left(N_y + \frac{\partial N_y}{\partial y} dy \right) dx \right] \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} dy \right) - [N_y dx] \frac{\partial w}{\partial y} \cong \left(\frac{\partial N_y}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) dx dy$$

$$R_{z3,3} = \left[\left(N_{xy} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} dx \right) dy \right] \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dx \right) - [N_{xy} dy] \frac{\partial w}{\partial y} \cong \left(\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} + N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) dx dy$$

$$R_{z3,4} = \left[\left(N_{yx} + \frac{\partial N_{yx}}{\partial y} dy \right) dx \right] \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} dy \right) - [N_{yx} dx] \frac{\partial w}{\partial x} \cong \left(\frac{\partial N_{yx}}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x} + N_{yx} \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} \right) dx dy$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Resultando para a parcela R_{z3} :

$$R_{z3} \cong \left(N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial N_x}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x} \right) dx dy$$

Considerando as três componentes $R_{z,i}$ ($i = 1, 2, 3$), virá (após dividirmos cada parcela pelo produto $dx dy$ e levamos ao limite para $dx \rightarrow 0$ e para $dy \rightarrow 0$):

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \left(\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} \right) \frac{\partial w}{\partial x} + \left(\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} \right) \frac{\partial w}{\partial y} = -q(x, y)$$

Porém, lembrando que (vide slides #21 e #22):

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = 0$$

Virá, após as substituições e simplificações:

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = -q(x, y)$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

4.4. Equações de equilíbrio de momentos nas direções x e y:

Neste caso, é preciso considerar todos os momentos nas direções x e y associados a:

- Momentos fletores na placa;
- Momentos torçores na placa;
- Momentos devidos aos binários das forças Q_x e Q_y .

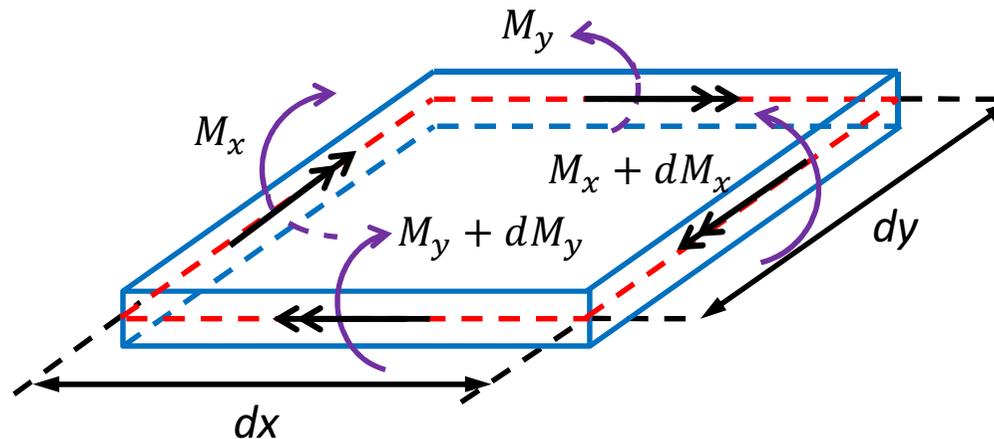


Fig.1. Momentos fletores em um elemento infinitesimal de placa.



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

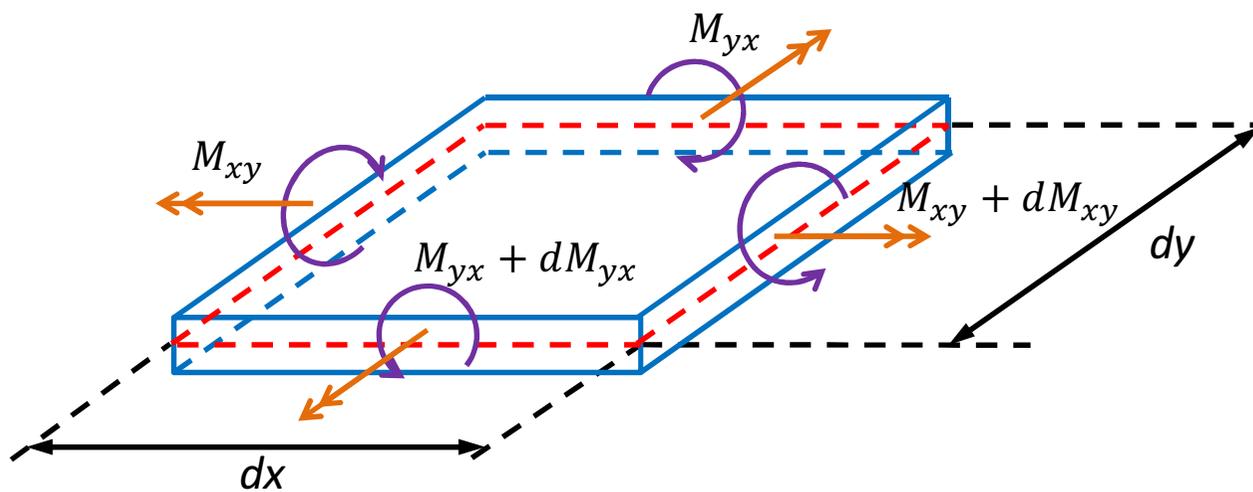


Fig.2. Momentos torçores em um elemento infinitesimal de placa.



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

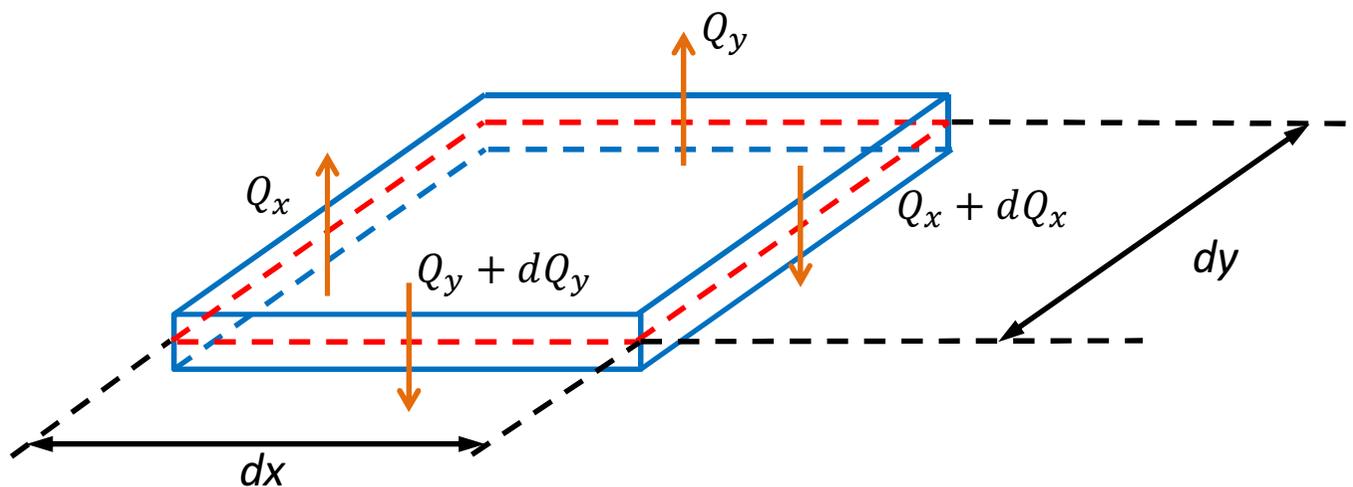


Fig.3. Binários devido às forças Q_x e Q_y em um elemento infinitesimal da placa.



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Equilíbrio de momentos na direção x:

$$M_y dx - \left[M_y + \frac{\partial M_y}{\partial y} dy \right] dx + \left[M_{xy} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} dx \right] dy - M_{xy} dy + [Q_y dx] dy = 0$$

$$-\frac{\partial M_y}{\partial y} dx dy + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} dx dy + Q_y dx dy = 0$$

Dividindo cada parcela pelo produto $dx dy$ e levando ao limite para $dx \rightarrow 0$ e $dy \rightarrow 0$, virá:

$$Q_y = \frac{\partial M_y}{\partial y} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial x}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Equilíbrio de momentos na direção y:

$$\left[M_x + \frac{\partial M_x}{\partial x} dx \right] dy - M_x dy + \left[M_{yx} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} dy \right] dx - M_{yx} dx - [Q_x dy] dx = 0$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} dx dy + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} dx dy - Q_x dx dy = 0$$

Dividindo cada parcela pelo produto $dx dy$ e levando ao limite para $dx \rightarrow 0$ e $dy \rightarrow 0$, virá:

$$Q_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

4.5. Obtenção da nova equação governante:

Substituindo as relações obtidas para Q_y (vide slide #29) e para Q_x (vide slide #30) na equação diferencial de equilíbrio de forças (vide slide #25), e lembrando ainda que $M_{xy} = -M_{yx}$ (vide slide #20), teremos:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{yx}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = -q(x, y)$$

Utilizando, finalmente, as equações indicadas no slide #20, obteremos, após algumas simplificações, as equações que regem o comportamento de placas sob carregamento transversal e forças de membrana:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0$$

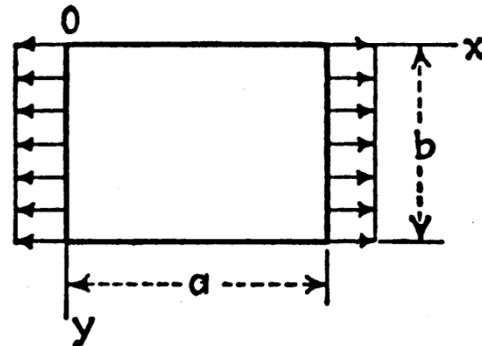
$$\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = 0$$

$$\nabla^4 w(x, y) = \frac{1}{D} \left[q(x, y) + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right]$$



5. Exemplo de aplicação [12.91]

Para ilustrar o uso das equações desenvolvidas nesta aula, consideremos o caso de uma placa retangular, com lados simplesmente apoiados, sob a ação combinada de uma pressão uniformemente distribuída, de magnitude q_0 , e forças de membrana de magnitude N_x , uniformemente distribuídas sobre os lados paralelos ao eixo y .



Conforme visto na Aula#12 (slides #15 a #17), o carregamento $q(x, y) = q_0$ aplicado sobre a placa pode ser expresso na forma:

$$q(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} q_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Onde:

$$q_{mn} = \frac{4q_0}{ab} \int_0^b \int_0^a \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) dx dy = \begin{cases} \frac{16q_0}{\pi^2 mn} & \text{(se } m \text{ e } n \text{ forem ímpares)} \\ \text{ou} & \\ 0 & \text{(se } m \text{ ou } n \text{ forem pares)} \end{cases}$$

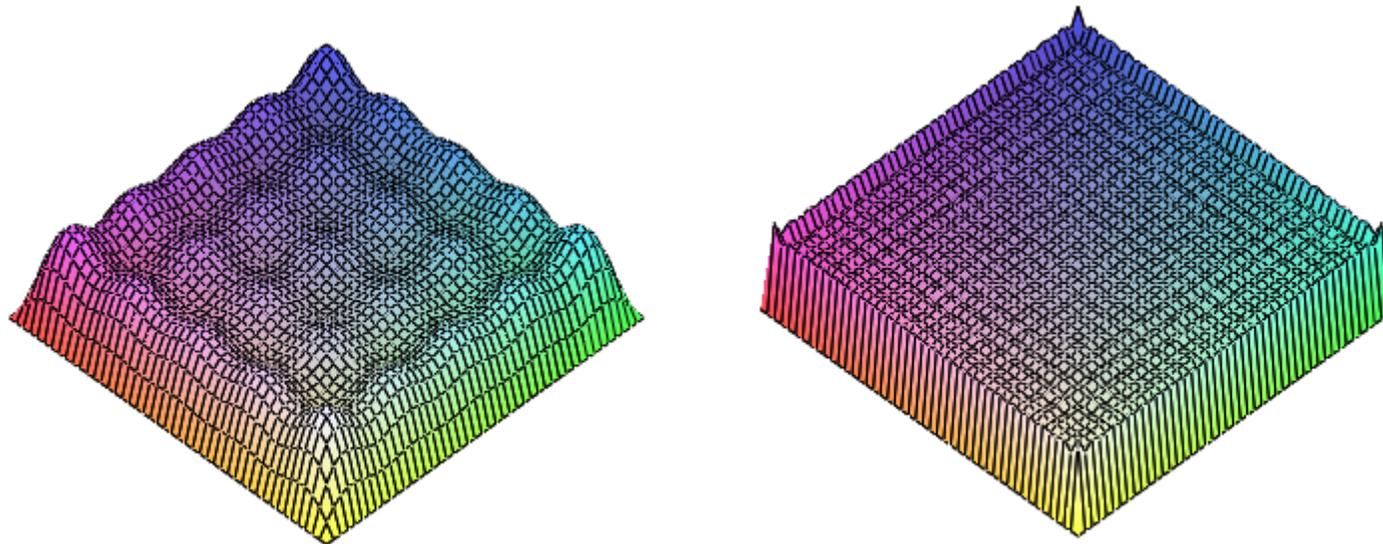


Fig.1: Representações gráficas de um carregamento uniformemente distribuído por meio das aproximações em série dupla de Fourier utilizando: (a) $m, n = 1..9$ (25 termos), (b) $m, n = 1..39$ (400 termos).



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Substituindo o carregamento $q(x, y)$, em sua forma aproximada, na equação governante virá:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - \frac{N_x}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{16q_0}{\pi^2 D} \left[\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \right]$$

$$m = 1, 3, 5, \dots; \quad n = 1, 3, 5, \dots$$

Considerando, novamente, que a função $w(x, y)$ possa ser expressa na forma de uma dupla série de Fourier (a qual atende de plano todas as condições de contorno da placa), ou seja:

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

Teremos, após substituição da expressão acima na equação governante, que:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[w_{mn} \left(\left(\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right)^2 + \frac{N_x}{D} \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \right) - \frac{16q_0}{\pi^2 D mn} \right] \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) = 0$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Desta forma, os coeficientes w_{mn} devem ser dados por:

$$w_{mn} = \frac{16q_0}{\pi^6 D m n \left[\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 + \frac{N_x m^2}{\pi^2 D a^2} \right]} \quad (m = 1, 3, 5, \dots; \quad n = 1, 3, 5, \dots)$$

E, portanto:

$$w(x, y) = \frac{16q_0}{\pi^6 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)}{m n \left[\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 + \frac{N_x m^2}{\pi^2 D a^2} \right]} \quad (m = 1, 3, 5, \dots; \quad n = 1, 3, 5, \dots)$$

Comparando este resultado com o obtido anteriormente (vide Aula#12, slide #19), notamos que a presença das forças de membrana N_x leva a uma diminuição dos deslocamentos transversais (se $N_x > 0$), como esperado.



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Se, por outro lado, as forças de membrana N_x forem compressivas, teremos $N_x < 0$, levando a deslocamentos transversais maiores do que os obtidos anteriormente (i.é, para a placa sem a ação de forças de membrana).

Em particular, se tivermos:

$$\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2 + \frac{N_x m^2}{\pi^2 D a^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad N_x = -D \frac{\pi^2 a^2}{m^2} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2$$

...para pelo menos um par de inteiros ímpares (m, n) , então teremos deslocamentos transversais infinitamente grandes mesmo para carregamentos transversais mínimos. O valor do par (m, n) que leva ao menor valor de N_x define, assim, a carga de flambagem da placa (nas condições do problema).

Se tomarmos, por exemplo, uma placa quadrada, virá:

$$|N_{x,\text{mín}}| = D \frac{\pi^2}{a^2} \text{mín} \left\{ \left(\frac{m^2 + n^2}{m} \right)^2 \right\}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

$$|N_{x,mín}| = D \frac{\pi^2}{a^2} \text{mín} \left\{ \left(\frac{m^2 + n^2}{m} \right)^2 \right\}$$

A condição de mínima força ocorre, para este caso, quando $m = n = 1$, levando a:

$$|N_{x,mín}| = \frac{4\pi^2 D}{a^2}$$

...que é a carga de flambagem da placa (ideal).

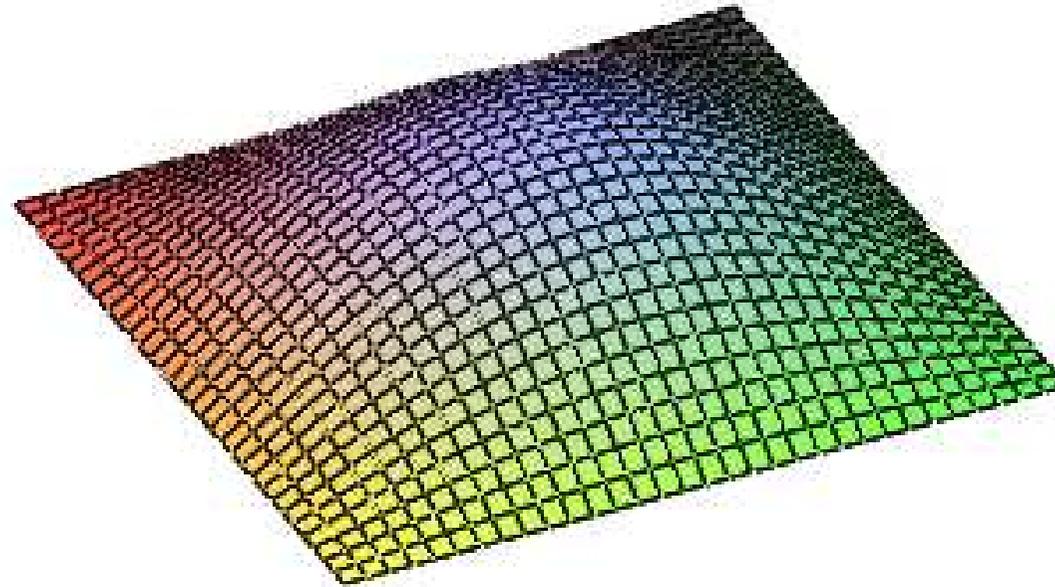
E o modo de flambagem associado é, portanto (tomando $m = n = 1$):

$$w(x, y) = w_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right)$$

(vide figura no próximo slide)



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica



Modo de flambagem de uma placa quadrada para $n = m = 1$.



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Referências:

[1] Timoshenko, S.P., Woinowsky-Krieger, W., Theory of Plates and Shells, 2nd ed. McGraw-Hill Book Company, 1987, cap.12: Bending of plates under the combined action of lateral loads and forces in the middle of the plate.

- Item 90: Differential equation of the deflection surface, pp.378-380.
- Item 91: Rectangular plate with simply supported edges under the combined action of uniform lateral load and uniform tension, pp.380-382.

[2] Ventsel, E., Krauthammer, T., Thin Plates and Shells: Theory, Analysis and Applications. Marcel Dekker, Inc., 2001, cap.3: Rectangular plates.

- Item 3.9: Rectangular plates under combined lateral and direct loads.