Resumo da aula de 17/10/2023

Proposição 1: Sejam U, V K-espaços vetoriais U de dimensão finita, B uma base de U e $T: U \to V$ uma transf. linear. Então $T(B)$ gera a imagem de T.

Demonstração: Suponhamos que $\dim_K U = n$ e que $B = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$, então $T(B) = \{T(u_1), \ldots, T(u_n)\}$. Dado $v \in \operatorname{Im} T = T(U)$, então $v = T(u)$, para algum $u \in U$. Como B é uma base de U, então u é combinação linear de B, logo existem $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in K$ tais que

$$u = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n$$

Daí $v = T(u) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i T(u_i) = \alpha_1 T(u_1) + \cdots + \alpha_n T(u_n)$

Portanto $T(B)$ gera a $\operatorname{Im}(T) = T(U)$ ▨

Teorema do núcleo e da Imagem
Sejam U, V K-espaços vetoriais, U de dim. finita e $T: U \to V$ uma transf. linear. Então

$$\dim_K U = \dim_K \ker(T) + \dim_K \operatorname{Im}(T)$$

Exercício 1: Sejam U, V K-espaços vetoriais de dimensões finitas e iguais e $T: U \to V$ uma transf. linear. Mostre que as seguintes afirmações são equivalentes:

(i) T é bijetora (neste caso T é chamada de isomorfismo)

(ii) T é injetora (neste caso T é chamada de monomorfismo)

(iii) T é sobrejetora (neste caso T é chamada de endomorfismo)

PROVA: Temos que provar que:
(i) $\Leftrightarrow$ (ii), (i) $\Leftrightarrow$ (iii) e (ii) $\Leftrightarrow$ (iii)
mas basta mostrar que
(i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (i)

$\boxed{(i) \Rightarrow (ii)}$ É claro

$\boxed{(ii) \Rightarrow (iii)}$ T é injetora $\Rightarrow \ker(T) = \{0\}$

$\Rightarrow \emptyset$ é uma base do $\ker(T) \Rightarrow$
$\Rightarrow \dim \ker(T) = 0$
Pelo T.N.I (Teorema do núcleo e da Imagem)

$$\underbrace{\dim V}_{\dim V} = 0 + \dim Im(T)$$

$\Rightarrow \dim Im(T) = \dim V$, como

$Im(T) \subset V$, então $Im(T) = V$,
logo T é sobrejetora.

$\boxed{(iii) \Rightarrow (i)}$ Falta mostrar que T é injetora. Temos que $Im(T) = V$

Pelo T.N.I.

$$\cancel{\dim} U = \dim Ker(T) + \dim Im(T)$$
$$= \dim Ker(T) + \cancel{\dim} V$$

$\Longrightarrow$ $\dim Ker(T) = 0 \Longrightarrow Ker(T) = \{0\}$

$\Longrightarrow$ T é injetora.

Usamos que T é injetora se e somente se $Ker(T) = \{u \in U / T(u) = 0\} = \{0\}$.

Exercício 2: Sejam U, V K-espaços vetoriais de dimensões finitas e diferentes e $T: U \to V$ uma transf. linear. Mostre que

(i) se $\dim U < \dim V$, então T não é sobrejetora;

(ii) se $\dim U > \dim V$, então T não é injetora.

PROVA: Suponhamos que $\dim U = n$ e $\dim V = m$

(i) Seja B uma base de U, então B tem n vetores. Pela PROPOSIÇÃO 1, $T(B)$ gera a $Im(T)$, como $T(B)$ tem n vetores, $\dim V = m$ e $n < m$, então $T(B)$ não gera V, logo $Im(T) \subsetneq V$, assim T não é sobrejetora.

(ii) Como $Im(T) \subset V$, então
$$\dim Im(T) \leq \dim V = m$$
Pelo T.N.I.
$$\dim U = \dim Ker(T) + \dim Im(T) \leq$$
$$\leq \dim Ker(T) + \dim V$$

$\Longrightarrow$ $\dim U - \dim V \leq \dim Ker(T)$

$\Longrightarrow$ $0 < n - m \leq \dim Ker(T)$

$\Longrightarrow \dim Ker(T) > 0 \Longrightarrow Ker(T) \neq \{0\}$

$\Longrightarrow T$ não é injetora.

Exercício 3 (34 a) Lista 1)

Mostrar que cada um dos operadores lineares do $\mathbb{R}^3$ a seguir é inversível e determine o isomorfismo inverso

(a) $F(x,y,z) = (x - 3y - 2z, y - 4z, z)$

Pelo exercício 1 basta mostrar que F é injetora

$(x,y,z) \in Ker(F) \Rightarrow F(x,y,z) = (0,0,0) \Rightarrow$

$$\begin{cases} x - 3y - 2z = 0 \\ y - 4z = 0 \\ z = 0 \end{cases} \qquad z = 0 \qquad x = 0$$

$\Longrightarrow (x,y,z) = (0,0,0) \Longrightarrow Ker(F) = \{(0,0,0)\}$

sabemos que: $F(u) = v \Longleftrightarrow u = F^{-1}(v)$

MODO 1: $F(e_1) = F(1,0,0) = (1,0,0) = e_1$

$F(e_2) = F(0,1,0) = (-3,1,0)$

$F(e_3) = F(0,0,1) = (-2,-4,1)$

Assim $F^{-1}(e_1) = e_1$, $F^{-1}(-3,1,0) = e_2$, $F^{-1}(-2,-4,1) = e_3$

$(x,y,z) = \alpha e_1 + \beta(-3,1,0) + \gamma(-2,-4,1)$ (*)

$\Longrightarrow F^{-1}(x,y,z) = \alpha F^{-1}(e_1) + \beta F^{-1}(-3,1,0) + \gamma F^{-1}(-2,-4,1)$

$= \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 = (\alpha, \beta, \gamma)$

Resolvendo (*) $\begin{cases} \alpha - 3\beta - 2\gamma = x \\ \beta - 4\gamma = y \\ \gamma = z \end{cases}$ $\alpha = x + 3y + 14z$, $\beta = y + 4z$

Assim $F^{-1}(x,y,z) = (x + 3y + 14z, y + 4z, z)$

Aqui usamos que F^{-1} também é uma transf. linear, isto é, F^{-1} também é um isomorfismo

MODO 2: $F^{-1}(x,y,z)=(a,b,c) \Rightarrow (x,y,z)=F(a,b,c)=$
$=(a-3b-2c,\, b-4c,\, c) \Longrightarrow$

$$\begin{cases} a-3b-2c=x \\ b-4c=y \\ c=z \end{cases}$$

este é o mesmo sistema (*), isto ocorreu pois escolhemos no modo 1 a base canônica do $\mathbb{R}^3$

Assim $F^{-1}(x,y,z)=(a,b,c)=(x+3y+14z,\, y+4z,\, z)$.