Podemos pensar, de maneira intuitiva, em uma curva em $\mathbb{R}^n$, como um 'conjunto unidimensional'. Para nossos propósitos, é conveniente começar com o conceito de *curva parametrizada*.

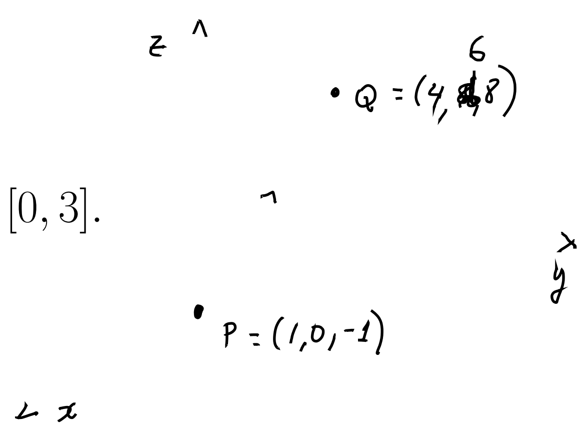
1. Curvas parametrizadas

Definição 1.1. *Uma* ***curva parametrizada*** *em* $\mathbb{R}^n$, *(*$n = 2$ *ou* $n = 3$*) é uma função contínua* $\gamma : I \to \mathbb{R}$, *sendo* I *um intervalo.*

- Se $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$, para cada $t \in I$, as funções $x(t), y(t)$ e $z(t)$ são denominadas *funções coordenadas* ou, simplesmente, *coordenadas* da curva $\gamma : I \to \mathbb{R}$. Diremos que γ é diferenciável, de classe $\mathcal{C}^1$, etc, se as curvas coordenadas o forem.
- O conjunto $Im\gamma = \{\gamma(t)\ t \in I\}$ é a *Imagem* ou *traço* de γ e é denotado por $tr(\gamma)$.
- O termo *"curva"* é frequentemente usado para denominar tanto uma curva parametrizada $\gamma : I \to \mathbb{R}$, como seu traço $tr(\gamma)$. Espera-se que o significado, em cada caso, fique claro do contexto.

Exemplo 1.2. (1)

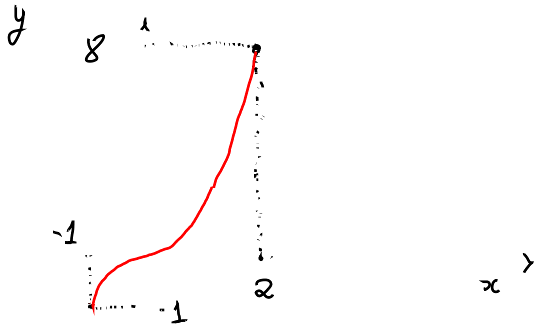
$$\gamma : \begin{cases} x(t) = t + 1 \\ y(t) = 2t \\ z(t) = 3t - 1, \quad t \in [0, 3]. \end{cases}$$



Date: October 19, 2023.

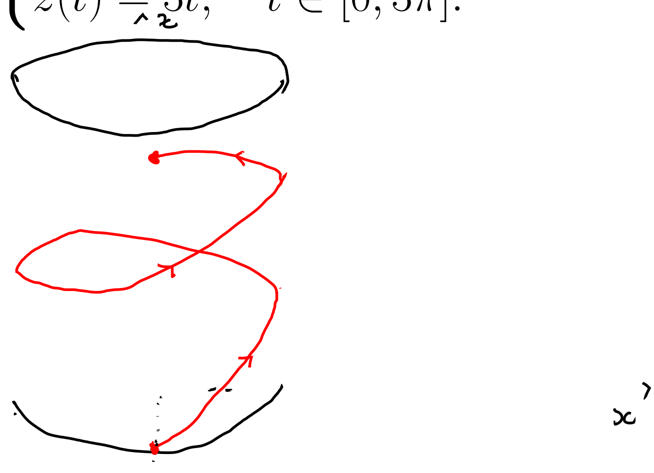
(2)

$$\gamma : \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t^3, \quad t \in [-1, 2]. \end{cases}$$



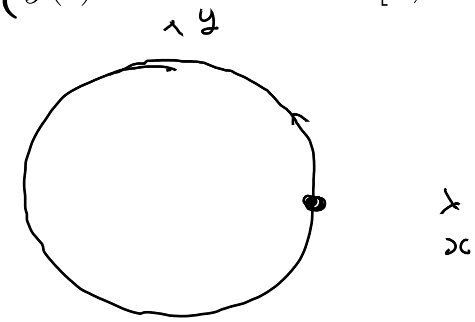
(3)

$$\gamma : \begin{cases} x(t) = 2\cos t \\ y(t) = 2 \ sen t \\ z(t) = 3t, \quad t \in [0, 3\pi]. \end{cases}$$



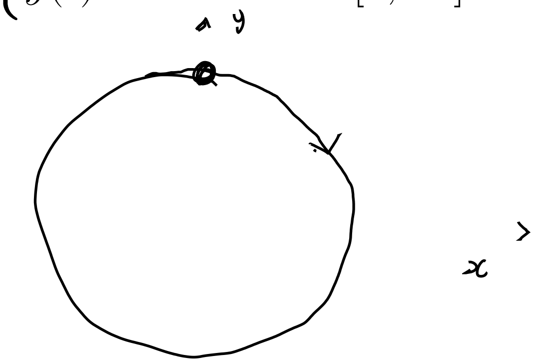
(4)

$$\gamma : \begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \ sen t \quad t \in [0, 2\pi]. \end{cases}$$



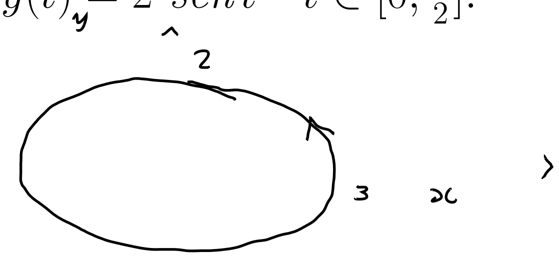
(5)

$$\gamma : \begin{cases} x(t) = \ sen\, t \\ y(t) = \cos t \quad t \in [0, 2\pi]. \end{cases}$$



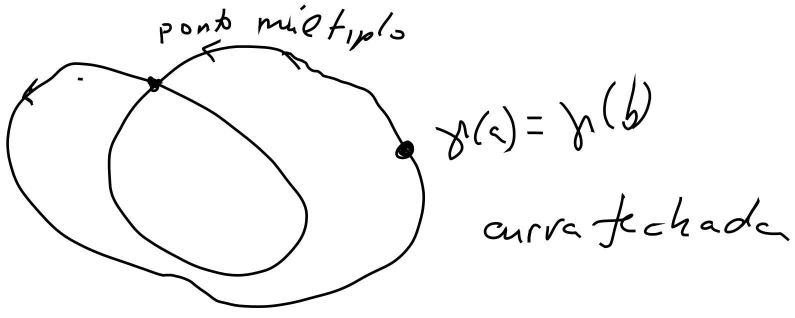
(6) *A curva C dada pela parte da elipse $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ no 1^o quadrante. Nesse caso, foi dada apenas o traço de uma curva. Uma* parametrização *de C, ou seja, uma curva cujo traço é C é dada por*

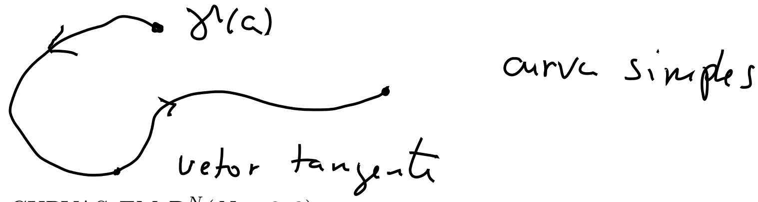
$$\gamma : \begin{cases} x(t) = 3 \cos t \\ y(t) = 2 \ sen\, t \quad t \in [0, \frac{\pi}{2}]. \end{cases}$$



Definição 1.3.

- *Uma curva $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}$ é* fechada *se $\gamma(a) = \gamma(b)$.*





- *Um ponto P em $tr(\gamma)$ é um* ponto múltiplo *de γ, se existirem instantes t_1, t_2, não ambos pontos extremos tais que $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$. A curva γ é* simples *se não possui pontos múltiplos.*

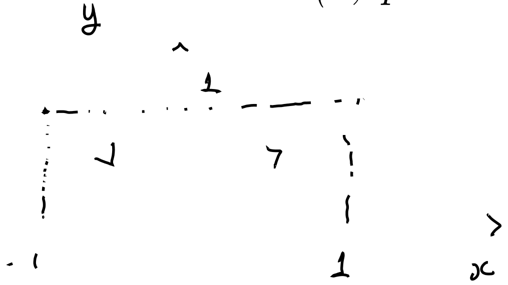
Definição 1.4. *Se $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t)), t \in I$ é uma curva de classe $\mathcal{C}^1$, definimos o seu* vetor tangente *no ponto (ou instante) t por $\vec{v}(t) = \gamma'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$. A reta de equação $r(s) = \gamma(t_0) + s\gamma'(t_0)$ é a reta tangente a γ no ponto $P = \gamma(t_0)$.*

Definição 1.5. *A curva $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t)), t \in I$, de classe $\mathcal{C}^1$, é dita* lisa *se o seu* vetor tangente *$\vec{v}(t) = \gamma'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$ é não nulo para todo $t \in I$ e $v(a) = v(b)$, se $I = [a, b]$ for um intervalo fechado.*
A vcurva γ é dita lisa por partes*, se o intervalo I puder ser decomposto em um número finito de intervalos $I_1, I_2, \cdots, I_n$ de tal modo que γ restrita a cada um desses subintervalos seja lisa.*

Exemplo 1.6.
(1) *Os exemplos dados em 1.2 são todos de curvas lisas.*
(2) *A curva dada por*

$$\gamma : \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = |t| \quad t \in [-2, 2]]. \end{cases}$$

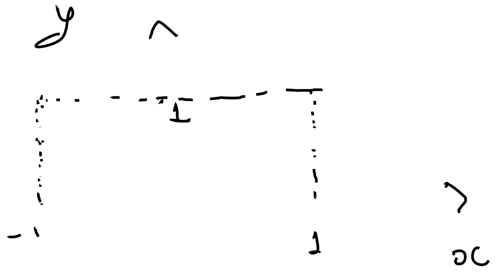
não é diferenciável em $t = 0$ (e, portanto, não é lisa).



(3) *A curva dada por*

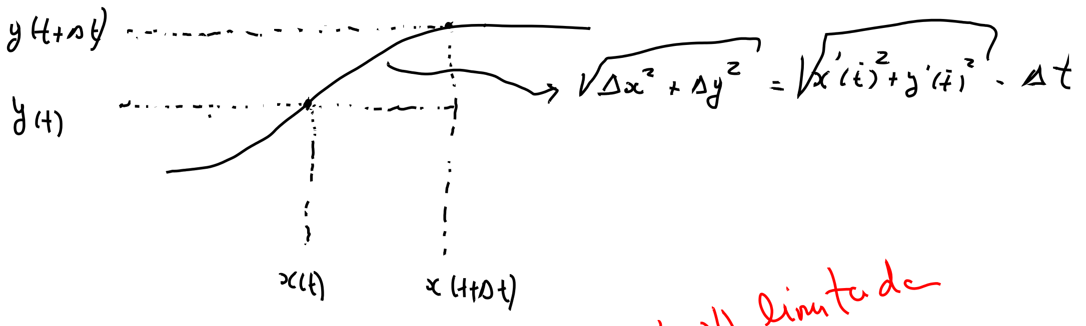
$$\gamma : \begin{cases} x(t) = t^3 \\ y(t) = |t|^3 \quad t \in [-2, 2]]. \end{cases}$$

é de classe $\mathcal{C}^1$ mas não é lisa pois $\gamma'(0) = 0$.



Definição 1.7. *Seja $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ uma curva lisa. Definimos o* comprimento *da curva γ (ou comprimento de arco de γ), por*

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| \, dt.$$



com $\|\gamma'(t)\|$ limitada

Observação 1.8. *Se γ for lisa por partes, definimos a comprimento somando as integrais nos subintervalos nos quais ela é lisa.*

Exemplo 1.9. *Calcule o comprimento de arco das curvas abaixo.*

(1)

$$\gamma : \begin{cases} x(t) = \cos 2t \\ y(t) = \ sen\, 2t \quad t \in [0, 2\pi]. \end{cases}$$

(2)

$$\gamma : \begin{cases} x(t) = t \cos t \\ y(t) = t \ \ sen\, t \\ z(t) = t \quad t \in [0, 2\pi]. \end{cases}$$