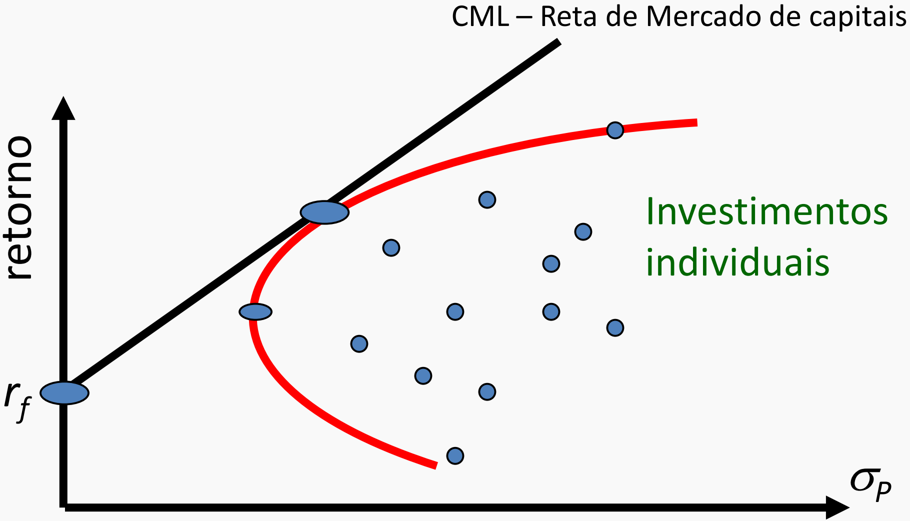
PRO3384 – Finanças quantitativas

Responsável: Prof. Dra. Celma de Oliveira Ribeiro
Equipe: Dr. Pedro Gerber Machado
Monitor: Camila Corrêa de Melo

Segundo semestre - 2023

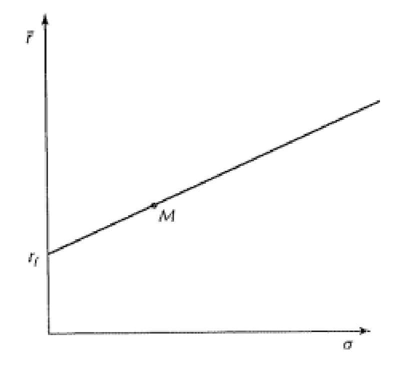
PRO - EPUSP

Capital Market Line (CLM)



Essa linha mostra a relação entre a taxa de retorno esperada e o risco do retorno

Capital Market Line (CLM) ou linha de mercado



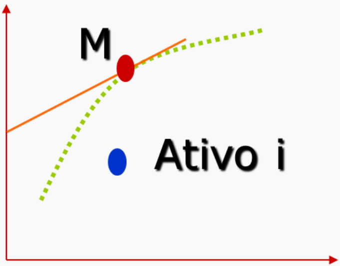
$$\bar{r} = r_f + \sigma \boxed{\left(\frac{\overline{r_M} - r_f}{\sigma_M} \right)}$$

Preço do risco

Onde:

$\bar{r}_M$ *e* σ_M são o valor esperado e o desvio padrão da taxa de retorno de mercado e $\bar{r}$ e σ são o valor esperado e o desvio padrão de uma taxa de retorno de um ativo eficiente arbitrário.

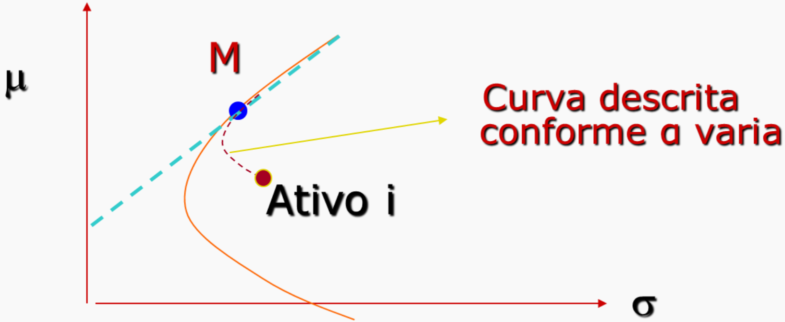
Objetivo: análise do retorno do ativo i
Carteira: ativo i e carteira de mercado



Ativo i

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ (1-\alpha) \end{bmatrix}$$

Carteira de mercado



Retorno: $R_\alpha = \alpha \overline{R}_i + (1-\alpha) R_m$

Risco: $\sigma_\alpha = \left(\alpha^2 \sigma_i^2 + 2\alpha(1-\alpha)\sigma_{im} + (1-\alpha)^2 \sigma_m^2\right)^{1/2}$

$\alpha = 0 \rightarrow curva\ tangecia\ a\ linha\ de\ mercado$

Derivadas

$$\frac{\partial R_\alpha}{\partial \alpha} = \overline{R}_i - R_m \qquad \frac{\partial \sigma_\alpha}{\partial \alpha} = \frac{\alpha\sigma_i^2 + (1-2\alpha)\sigma_{im} + (\alpha-1)\sigma_m^2}{\sigma_\alpha}$$

Do cálculo

$$\frac{\partial R_\alpha}{\partial \sigma_\alpha} = \frac{\partial R_\alpha / \partial \alpha}{\partial \sigma_\alpha / \partial \alpha}$$

Substituindo e calculando para α = 0

$$\left.\frac{\partial R_\alpha}{\partial \sigma_\alpha}\right|_{\alpha=0} = \frac{(R_i - R_m)\sigma_m}{\sigma_{im} - \sigma_m^2}$$

Para α = 0 este valor coincide com a inclinação da linha de mercado

$$\frac{(R_i - R_m)\sigma_m}{\sigma_{im} - \sigma_m^2} = \frac{R_m - R_f}{\sigma_m}$$

Segue que $$R_i = R_f + \left(\frac{R_m - R_F}{\sigma_m^2} \right) \sigma_{im}$$

Ou seja,

$$R_i = R_f + \beta_i (R_m - R_f)$$

Com

$$\beta_i = \frac{\sigma_{im}}{\sigma_m^2} \longrightarrow \text{Beta do ativo}$$

Beta de uma carteira

Carteira: $\begin{bmatrix}\omega_1 & \cdots & \omega_n\end{bmatrix}^T$

Retorno da carteira: $R_C = \sum \omega_i R_i$

Logo, $\operatorname{cov}(R_C, R_m) = \operatorname{cov}(\sum \omega_i R_i, R_m) = \sum \omega_i \operatorname{cov}(R_i, R_m)$

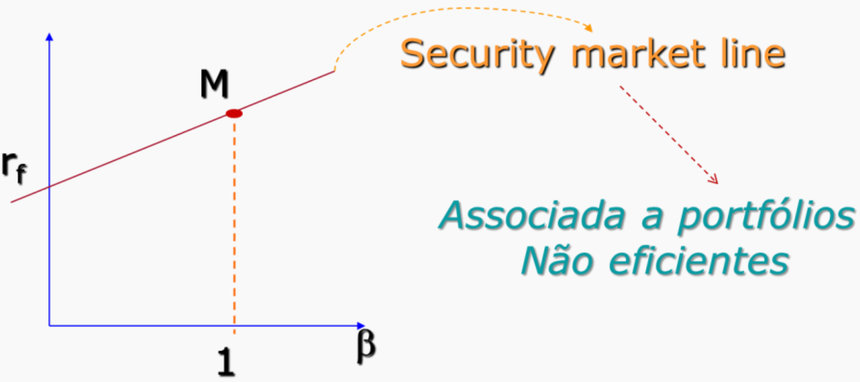
Portanto: $$\boxed{\beta_C = \frac{\operatorname{cov}(R_C, R_m)}{\sigma_m^2} = \frac{\sum \omega_i \operatorname{cov}(R_i, R_m)}{\sigma_m^2} = \sum \omega_i \beta_i}$$

Assim provamos: $$\beta_i = \frac{\sigma_{im}}{\sigma_m^2}$$

Se a carteira de mercado é eficiente então o retorno esperado do ativo satisfaz:

$$R_i = R_f + \beta_i \underbrace{(R_m - R_f)}_{\text{Taxa de excesso de retorno esperado}}$$

Objetivo: Análise risco sistêmico X específico



No CAPM, temos que

$$\bar{R}_i = R_f + \beta_i(\bar{R}_m - R_f) \quad \beta_i = \frac{\sigma_{im}}{\sigma_m^2} \qquad \text{(Eq 1)}$$

Médias

Admita o seguinte modelo

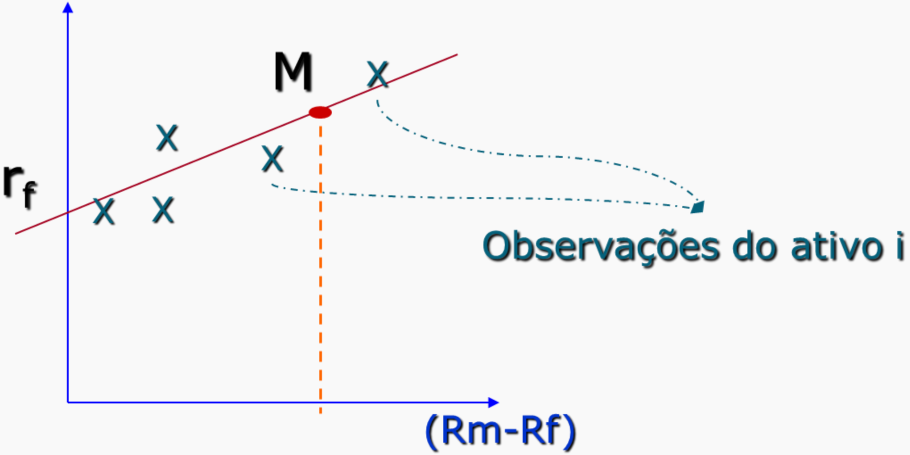
$$R_i = R_f + \beta_i(R_m - R_f) + \varepsilon_i \qquad \text{(Eq 2)}$$

Variáveis aleatórias

Security characteristic line

Security Market Line

$$R_i = R_f + \beta_i (R_m - R_f) + \varepsilon_i$$



Nestas condições (verifique)

$$E(\varepsilon_i) = 0 \qquad \mathrm{cov}(\varepsilon_i; R_m) = 0$$

E segue que

$$\sigma_i^2 = \beta_i^2 \sigma^2(R_m) + \sigma^2(\varepsilon_i)$$

Risco sistêmico (systematic risk)

Risco específico (redutível por diversificação)

Carteiras bem diversificadas

⬇

Redução do risco específico

⬇

Único risco relevante é o sistêmico (medido pelo beta)

⬇

Como investidor só se preocupa com risco e retorno, só importa o beta e o retorno

Qualquer ativo que esteja na CML possui apenas risco sistêmico!

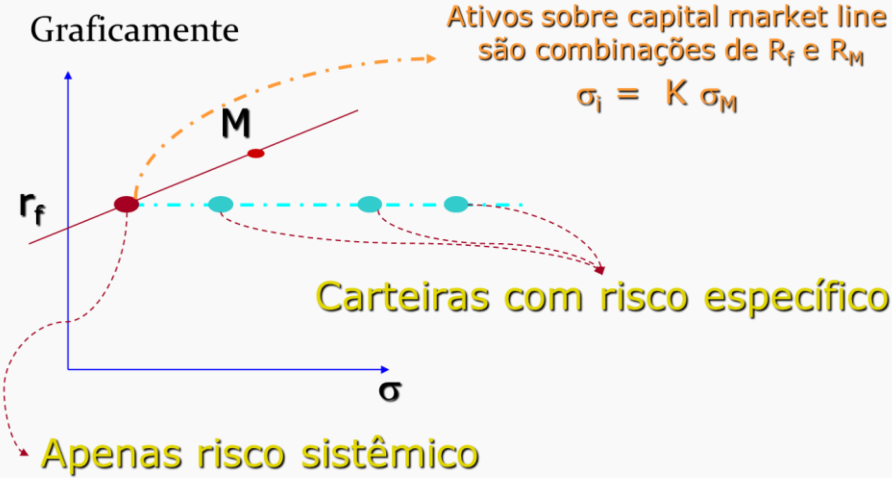
$$\sigma^2(\theta R_M + (1-\theta) R_f) =$$

$$\theta^2\sigma^2(R_M) + (1-\theta)^2\sigma^2(R_f) =$$

$$\theta^2\sigma^2(R_M)$$

Security Market Line

Graficamente



Security Market Line

Capital Market Line (CML) relaciona o excesso de retorno esperado de um portfolio eficiente com o seu risco (aplica-se a portfolios eficientes).

Security Market Line (SML) relaciona o excesso de retorno de um ativo à inclinação da sua regressão com portfolio de mercado (aplica-se a todos os ativos).

Índice de Jensen

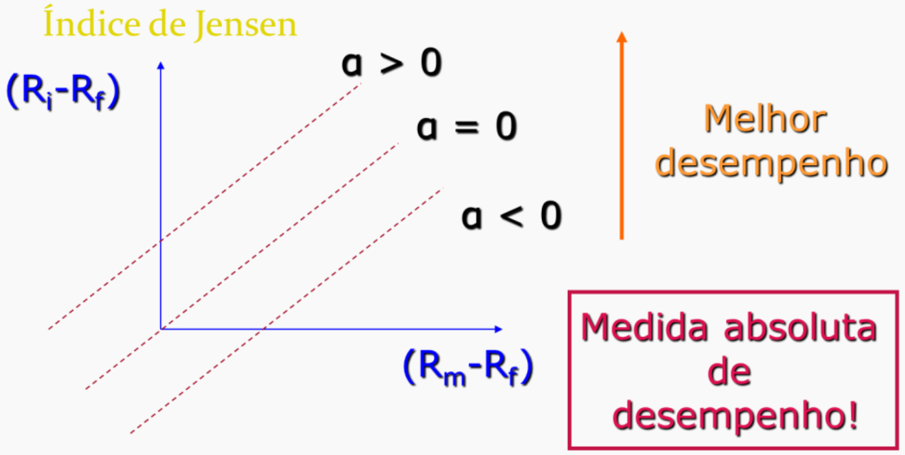
Mede quanto o desempenho do ativo se distancia do modelo teórico

$$J = R_i - \lfloor R_f + \beta_i (R_m - R_r) \rfloor$$

Ou ainda

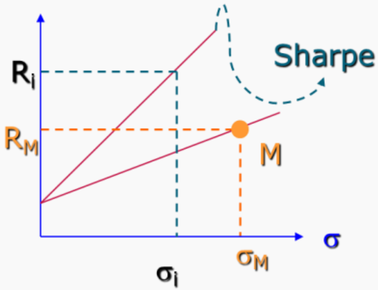
$$R_i - R_f = \alpha + \beta_i (R_m - R_f)$$

Índice de Jensen


Índice de Jensen
(R_i-R_f)
$a > 0$
$a = 0$
$a < 0$
(R_m-R_f)
Melhor desempenho
Medida absoluta de desempenho!

Índice de Sharpe

$$I_S = \frac{r_i - r_f}{\sigma_i}$$



Índice de Traynor

$$I_T = \frac{r_i - r_f}{\beta_i}$$