

PME 2556 – Dinâmica dos Fluidos Computacional

Aula 10 - Modelos $k-\omega$ *Standard* e SST

Relação entre taxa de dissipação ε e taxa de dissipação específica ω

A taxa de dissipação específica ω é em geral relacionada com ε e dividido por k (por isso é chamada de “específica”). Na maioria dos textos, artigos e softwares:

$$\omega = \frac{\varepsilon}{C_{\mu} k} = \frac{\varepsilon}{\beta^* k}$$

Equação modelada para k

$$\frac{Dk}{Dt} = \text{Difusão de } k + \text{Produção de } k - \text{Dissipação de } k$$

$$\frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho U_j k)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\mu + \sigma^* \mu_t) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + \rho P_k - \beta^* \rho \omega k$$

Onde σ^* e β^* são constantes, e $\beta^* \omega k = \varepsilon$.

Equação modelada de ω (1)

$$\frac{D\omega}{Dt} = \text{Difusão de } \omega + \text{Produção de } \omega - \text{Dissipação de } \omega$$

Por análise dimensional supomos que a produção de ω é proporcional à produção de k multiplicada por ω/k . O mesmo raciocínio é feito para a dissipação de ω .

Equação modelada de ω (2)

Resulta:

$$\frac{\partial(\rho\omega)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho U_j \omega)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\mu + \sigma\mu_t) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right] + \rho \alpha \frac{\omega}{k} P_k - \beta \rho \omega^2$$

Onde σ , α e β são constantes.

Viscosidade Turbulenta (Eddy Viscosity)

μ_t é determinado por análise dimensional a partir das grandezas usadas para caracterizar a turbulência . Logo:

$$\mu_t = \rho \frac{k}{\omega}$$

Modelo k - ω standard

$$\frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho U_j k)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\mu + \sigma^* \mu_t) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + \rho P_k - \beta^* \rho \omega k$$

$$\frac{\partial(\rho \omega)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho U_j \omega)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\mu + \sigma \mu_t) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right] + \rho \alpha \frac{\omega}{k} P_k - \beta \rho \omega^2$$

$$\text{Onde : } \quad P_k = -\overline{u_i' u_j'} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \quad \mu_t = \rho \frac{k}{\omega}$$

Temos portanto cinco constantes: β^* , σ^* , σ , α , β .

Determinação das Constantes do Modelo $k-\omega$ (1)

Na camada logarítmica, medidas de k permitem inferir que os efeitos de convecção e difusão são desprezíveis. A equação de k se reduz à igualdade entre produção e dissipação.

Considerando que nessa região a única tensão turbulenta importante é $\overline{u'v'}$:

$$P_k = -\overline{u'v'} \frac{\partial U}{\partial y} = \varepsilon = \beta^* \omega k$$

$$\text{mas, como } \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\overline{u'v'}}{\nu_t} = \frac{\overline{u'v'} \omega}{k}, \text{ resulta :}$$

$$\left(\frac{\overline{u'v'}}{k} \right)^2 = \beta^* ; \text{ de medições } \underline{\underline{\beta^* = 0.09}}$$

Dica: β^* é a mesma constante C_μ do modelo $k-\varepsilon$.

Determinação das Constantes do Modelo $k-\omega$ (2)

No decaimento de turbulência homogênea e isotrópica (escoamento a jusante de uma grade), a produção de turbulência se torna desprezível. Desprezando efeitos difusivos, as equações de k e ω ficam:

$$\frac{dk}{dt} = -\beta^* \omega k \quad ; \quad \frac{d\omega}{dt} = -\beta \omega^2$$

Medidas de k nesse caso sugerem que $k = C t^{-6/5}$, onde C é uma constante. Substituindo esse resultado nas equações acima, resulta:

$$\beta^* / \beta = 6/5 \rightarrow \underline{\underline{\beta = 3/40}}$$

Determinação das Constantes do Modelo $k-\omega$ (3)

Na camada logarítmica, temos:

$$U^+ = \frac{1}{\kappa} \ln(E y^+) \text{ onde } U^+ = \frac{U}{U^*} \text{ e } y^+ = \frac{\rho U^* y}{\mu}$$

$$U^* \text{ é a chamada velocidade de atrito: } U^* = \sqrt{\frac{|\tau_w|}{\rho}}$$

κ é a chamada constante de Von Kármán, $\kappa=0.41$, e E depende da rugosidade, $E \approx 9.0$. Com a lei logarítmica obtemos:

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{U^*}{\kappa y}$$

Determinação das Constantes do Modelo $k-\omega$ (4)

Percebe-se também que, para $30 < y^+ < 100$, a tensão de Reynolds é constante e aproximadamente igual à tensão τ_w na parede. Da relação entre a tensão de Reynolds e k , derivada anteriormente da condição de equilíbrio local (produção de turbulência igual à dissipação):

$$\left(\frac{\overline{u'v'}}{k}\right)^2 = \beta^* \rightarrow k = \frac{\overline{u'v'}}{\sqrt{\beta^*}} \rightarrow k = \frac{\tau_w / \rho}{\sqrt{\beta^*}} \rightarrow k = \underline{\underline{\frac{U^{*2}}{\sqrt{\beta^*}}}}$$

Determinação das Constantes do Modelo $k-\omega$ (5)

Voltando à condição de equilíbrio local na camada logarítmica:

$$\overline{u'v'} \frac{\partial U}{\partial y} = \varepsilon \rightarrow v_t \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 = \beta^* \omega k$$

mas, lembrando que $v_t = \frac{k}{\omega}$ e que $\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{U^}{\kappa y}$:*

$$\underline{\underline{\omega = \frac{U^*}{\sqrt{\beta^* \kappa y}}}}$$

Determinação das Constantes do Modelo $k-\omega$ (6)

Voltando à camada logarítmica, considerando que o transporte convectivo e a difusão longitudinal são desprezíveis, e aplicando a condição de equilíbrio local entre produção e dissipação de turbulência, a equação de ω fica:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\sigma \nu_t \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) + \alpha \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 - \beta \omega^2 = 0$$

Substituindo as expressões obtidas nos dois últimos *slides*, obtemos finalmente:

$$\underline{\underline{\alpha = \frac{\beta}{\beta^*} - \frac{\sigma \kappa^2}{\sqrt{\beta^*}}}}$$

Determinação das Constantes do Modelo $k-\omega$ (7)

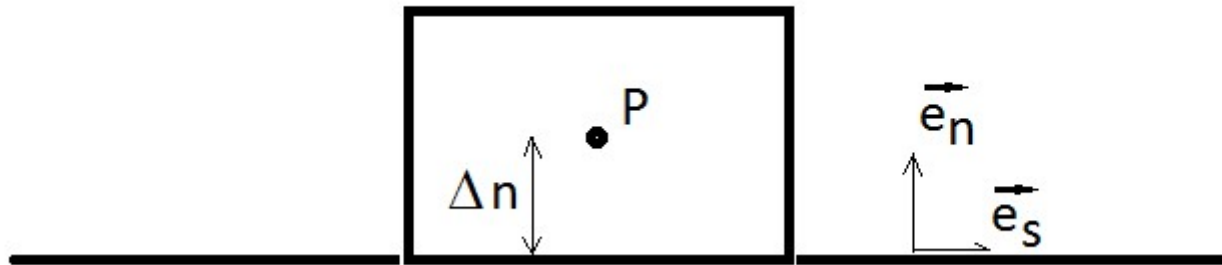
Alguns experimentos computacionais permitiram uma otimização do valor das constantes segundo a tabela:

β^*	σ	σ^*	β	α
0.09	1/2	1/2	3/40	5/9

Condições de Contorno para $30 < y^+ < 200$

Na parede, temos:

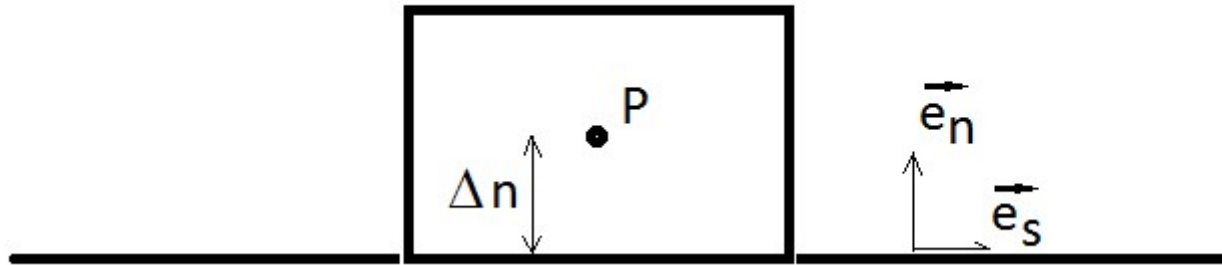
$$v_{wall} = \frac{U^{*2} \cdot \Delta n}{|(\vec{U}_P - \vec{U}_{wall}) \cdot \vec{e}_s|} \quad \omega_P = \frac{U^*}{\sqrt{\beta^* \kappa \Delta n}} \quad \left. \frac{\partial k}{\partial n} \right|_{wall} = 0$$



Condições de Contorno para $y^+ < 5$

Na parede, temos:

$$\omega_P = \frac{6\nu}{\beta \Delta n^2} \quad k_{wall} = 0$$



Desempenho do modelo $k-\omega$ quando comparado com o modelo $k-\varepsilon$

O modelo $k-\omega$ produz resultados superiores ao $k-\varepsilon$ quando usado em escoamentos com gradientes de pressão adversos. Qual a razão, se a forma de determinar as constantes é a mesma?

Equação de ε transformada

Se tomarmos a equação de ε e fizermos a mudança de variáveis $\varepsilon = \beta^* \omega k$ vamos obter (Davidson, 2006):

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{u}_j \omega)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(v + \sigma_\omega v_t) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right] + \alpha \frac{\omega}{k} P_k - \beta \omega^2 + \frac{2 v_t}{k \sigma_\varepsilon} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j}$$



Termo adicional!

Deficiência do modelo k - ε em simular escoamentos com gradiente adverso e recirculação

Rodi, W., Scheuerer, G., 1986, “Scrutinizing the k - ε turbulence model under adverse pressure gradient conditions”, ASME Journal of Fluids Engineering Vol. 108, pp. 174-179.

De acordo com Rodi e Scheuerer (1986) a dificuldade do modelo k - ε em lidar com gradientes adversos de pressão deriva de, nessa condição, ocorrer uma insuficiente produção de ε junto à parede. Isso aumenta a viscosidade turbilhonar e a escala de comprimento da turbulência, dada por:

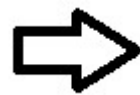
$$L_t = \frac{C_\mu^{3/4} k^{3/2}}{\varepsilon} = \frac{k^{1/2}}{\beta^{*1/4} \omega}$$

Deficiência do modelo k - ε em simular escoamentos com gradiente adverso e recirculação

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{u}_j \omega)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\nu + \sigma_\omega \nu_t) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right] + \alpha \frac{\omega}{k} P_k - \beta \omega^2 + \frac{2 \nu_t}{k \sigma_\varepsilon} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j}$$

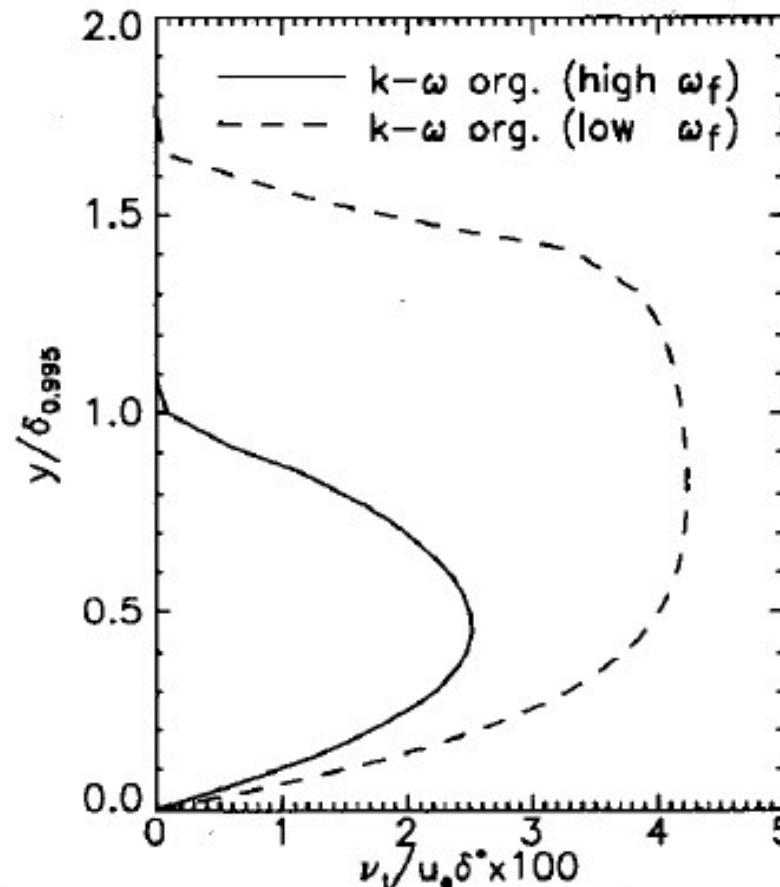
perto da parede, região baixa da camada limite: $\frac{\partial k}{\partial y} > 0$; $\frac{\partial \omega}{\partial y} < 0$

$$\frac{2 \nu_t}{k \sigma_\varepsilon} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j} = \frac{2 \nu_t}{k \sigma_\varepsilon} \frac{\partial k}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial y}$$



Perto da parede tem sinal negativo e funciona como um termo de destruição de ω . Esse efeito é intensificado pelo gradiente adverso de pressão. Isso aumenta o nível de energia cinética e, como consequência, a viscosidade turbilhonar. O excesso de difusão prejudica a captura de regiões de recirculação.

Deficiência do modelo $k-\omega$: influência do valor de ω na corrente livre



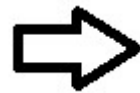
Na figura retirada de Menter, F.R., “Two-Equation Eddy-Viscosity Turbulence Models for Engineering Applications”, AIAA Journal Vol. 32, No. 8, 1994, ω se refere ao valor da dissipação específica na corrente livre. A diferença entre os dois perfis para a viscosidade turbilhonar na camada limite evidencia a dependência que o modelo tem em relação à condição de contorno do escoamento externo. Tal dependência não ocorre no modelo $k-\varepsilon$.

Vantagem do modelo $k-\varepsilon$: baixa influência do valor de ω na corrente livre

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{u}_j \omega)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\nu + \sigma_\omega \nu_t) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right] + \alpha \frac{\omega}{k} P_k - \beta \omega^2 + \frac{2 \nu_t}{k \sigma_\varepsilon} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j}$$

distante da parede, região alta da camada limite: $\frac{\partial k}{\partial y} < 0$; $\frac{\partial \omega}{\partial y} < 0$

$$\frac{2 \nu_t}{k \sigma_\varepsilon} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j} = \frac{2 \nu_t}{k \sigma_\varepsilon} \frac{\partial k}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial y}$$



Na parte alta da camada limite tem sinal positivo e funciona como um termo de produção de ω , diminuindo a energia cinética e a viscosidade turbilhonar. A baixa difusão diminui a influência da condição de contorno, ou seja, dos valores adotados para ω na corrente livre.

Modelo $k-\omega$ SST

O modelo SST foi desenvolvido por Menter em 1993 para eliminar a dependência que o modelo $k-\omega$ standard demonstra ter em relação às condições de contorno da corrente livre. A equação de ω é reescrita de forma a garantir que, numa mudança de variáveis, recuperemos a equação de ε do modelo $k-\varepsilon$ standard se $y \rightarrow \infty$. Assim, o modelo SST se comporta como $k-\omega$ standard perto da parede e como $k-\varepsilon$ standard ao nos afastarmos da parede. Essa propriedade, no entanto, só funciona se a malha for bastante refinada junto à parede, garantindo que as células cheguem a discretizar a subcamada viscosa. Assim, em geral, exige-se que para utilizar o modelo SST o primeiro nó tenha $y^+ \approx 1$. Se essa condição não for respeitada, nos arriscamos a que o modelo funcione apenas de forma similar ao $k-\varepsilon$, perdendo as propriedades do $k-\omega$ de boa resolução da camada limite com gradientes adversos de pressão.

Modelo $k-\omega$ SST

No modelo SST, a equação de ω é dada por:

$$\frac{\partial(\rho\omega)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho\bar{u}_j\omega)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\omega} \right) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right] + \frac{\rho\alpha}{\mu_t} P_k - \rho\beta_i\omega^2 + D_\omega$$

Onde temos:

$$D_\omega = 2(1 - F_1) \rho \sigma_{\omega 2} \frac{1}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j}$$

$F_1 \rightarrow 1$ quando $y \rightarrow 0$ (nas imediações da parede)

$F_1 \rightarrow 0$ quando $y \rightarrow \infty$ (parte alta da camada limite)

Modelo $k-\omega$ SST

A função F_1 , responsável por chavear o modelo entre $k-\omega$ e $k-\varepsilon$, é dada por:

$$F_1 = \tanh(\Phi_1^4) \quad ; \quad \Phi_1 = \min \left[\max \left(\frac{\sqrt{k}}{0,09 \omega y}, \frac{500 \mu}{\rho y^2 \omega} \right), \frac{4 \rho k}{\sigma_{\omega 2} D_{\omega}^+ y^2} \right]$$

Onde:

$$D_{\omega}^+ = \max \left(2 \rho \frac{1}{\sigma_{\omega 2}} \frac{1}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j}, 10^{-10} \right)$$

Modelo k - ω SST

A equação de k é dada por:

$$\frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \bar{u}_j k)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + \tilde{P}_k - \rho \beta^* k \omega$$

Onde:

$$\tilde{P}_k = \min(P_k, 10 \rho \beta^* k \omega)$$

$$P_k = -\rho \overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}$$

Modelo k - ω SST

A viscosidade turbulenta é dada por:

$$\mu_t = \frac{\rho k}{\omega} \frac{1}{\max\left(\frac{1}{\alpha^*}, \frac{SF_2}{a_1 \omega}\right)}$$

Onde:

$$F_2 = \tanh(\Phi_2^2) ; \Phi_2 = \max\left(2 \frac{\sqrt{k}}{0,09 \omega y}, \frac{500 \mu}{\rho y^2 \omega}\right) ; S = \sqrt{2S_{ij}S_{ij}}$$

Modelo $k-\omega$ SST

As demais relações são:

$$\beta_i = F_1 \beta_{i1} + (1 - F_1) \beta_{i2} \quad ; \quad \beta_{i1} = 0,075 \quad ; \quad \beta_{i2} = 0,0828$$

$$\beta^* = \beta_\infty^* \left(\frac{\frac{4}{15} + \left(\frac{\text{Re}_t}{R_\beta} \right)^4}{1 + \left(\frac{\text{Re}_t}{R_\beta} \right)^4} \right) \quad ; \quad \beta_\infty^* = 0,09 \quad ; \quad R_\beta = 8 \quad ; \quad \text{Re}_t = \frac{\rho k}{\mu \omega}$$

$$\sigma_{k1} = 1,176 \quad ; \quad \sigma_{\omega1} = 2,0 \quad ; \quad \sigma_{k2} = 1,0 \quad ; \quad \sigma_{\omega2} = 1,168 \quad ; \quad a_1 = 0,31$$

$$\alpha_\infty = F_1 \alpha_{\infty1} + (1 - F_1) \alpha_{\infty2} \quad \alpha_{\infty1} = \frac{\beta_{i1}}{\beta_\infty^*} - \frac{\kappa}{\sigma_{\omega1} \sqrt{\beta_\infty^*}} \quad \alpha_{\infty2} = \frac{\beta_{i2}}{\beta_\infty^*} - \frac{\kappa}{\sigma_{\omega1} \sqrt{\beta_\infty^*}}$$

$$\sigma_k = \frac{1}{F_1 / \sigma_{k1} + (1 - F_1) / \sigma_{k2}} \quad \sigma_\omega = \frac{1}{F_1 / \sigma_{\omega1} + (1 - F_1) / \sigma_{\omega2}}$$

$$\alpha = \frac{\alpha_\infty}{\alpha^*} \left(\frac{\alpha_o + \text{Re}_t / R_\omega}{1 + \text{Re}_t / R_\omega} \right) \quad ; \quad \alpha_\infty = 0,52 \quad ; \quad R_\omega = 2,95 \quad ; \quad \alpha_o = 1/9$$

$$\alpha^* = \alpha_\infty^* \left(\frac{\alpha_o^* + \text{Re}_t / R_k}{1 + \text{Re}_t / R_k} \right) \quad ; \quad \alpha_\infty^* = 1 \quad ; \quad R_k = 6 \quad ; \quad \alpha_o^* = \beta_i / 3$$

Modelo $k-\omega$ SST

$$\nu_t \approx \min\left(\frac{k}{\omega}, a_1 \frac{k}{S}\right) \quad \text{Na camada limite: } S \approx \frac{\partial U}{\partial y}$$

$$\overline{u'v'} = \nu_t \frac{\partial U}{\partial y} \approx \min\left(\frac{k}{\omega} \frac{\partial U}{\partial y}, a_1 k\right) \Rightarrow \text{hipótese de Bradshaw}$$

Limitar a tensão turbulenta significa também limitar a produção de turbulência:

$$P_t \approx \overline{u'v'} \frac{\partial U}{\partial y}$$

Por isso o modelo recebe a denominação “Shear Stress Transport”. Na camada limite a tensão de cisalhamento turbulenta fica relacionada à energia cinética turbulenta k , uma grandeza transportada.

Modelo $k-\omega$ SST

Por sua propriedade de resolver bem camadas limites com gradientes adversos de pressão sem mostrar dependência exagerada dos resultados em relação às condições de contorno de corrente livre, o modelo $k-\omega$ SST é indicado para problemas de aerodinâmica externa.

Bibliografia

ANSYS FLUENT 13 Theory Guide, 2011.

D. C. Wilcox, “Reassessment of the scale-determining equation for advanced turbulence models”, AIAA Journal, vol. 26, NO. 11, 1988.

D. C. Wilcox, “Turbulence Modeling for CFD”, 2nd Edition, DCW Industries, 2000.