SLC 641 – Óptica

Licenciatura em Ciências Exatas – São Carlos

Aula 7

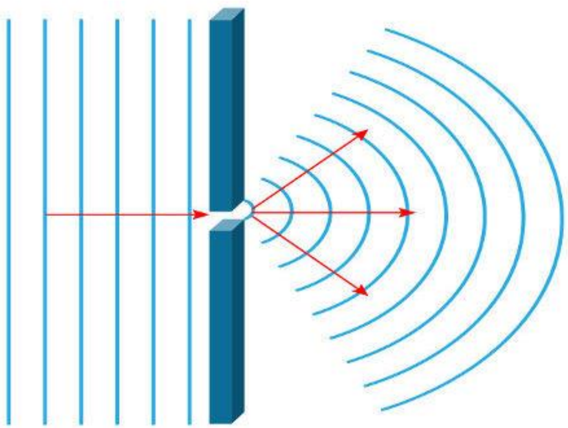
Natureza ondulatória: Difração e interferência

(Difração)

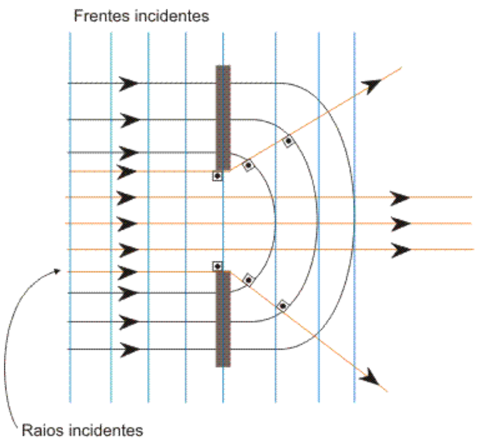
16/10/2023

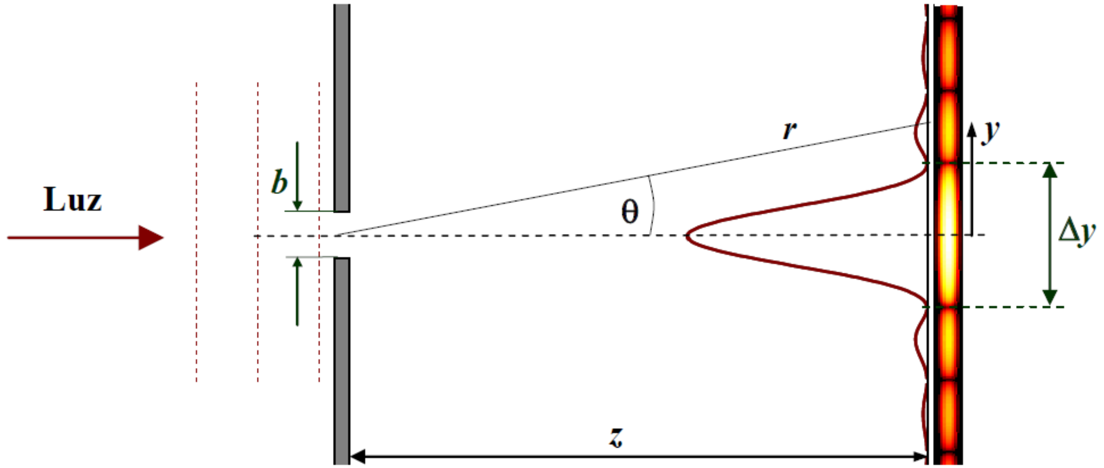
Difração

Fenda pequena

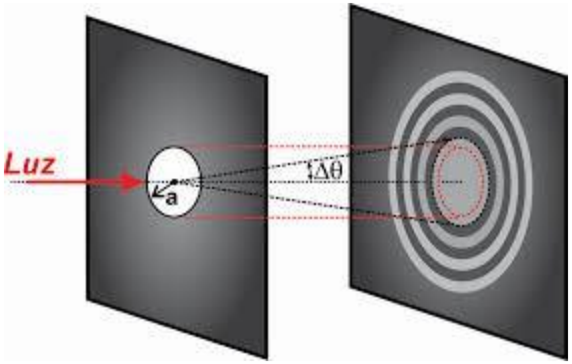


Fenda grande

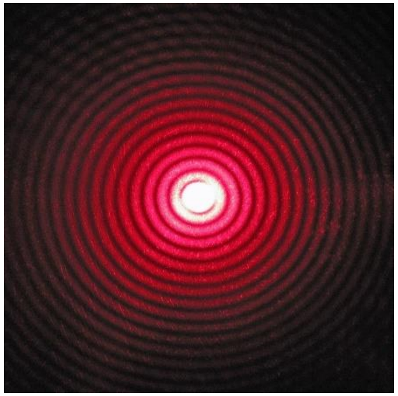




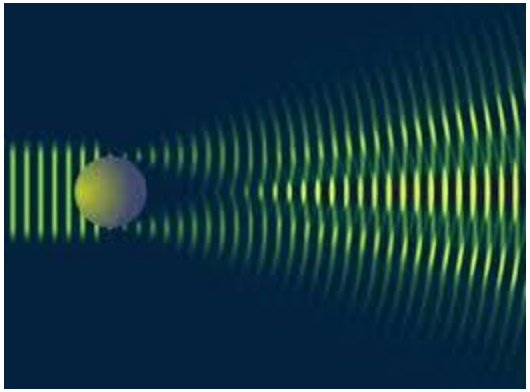
Difração



Furos pequenos



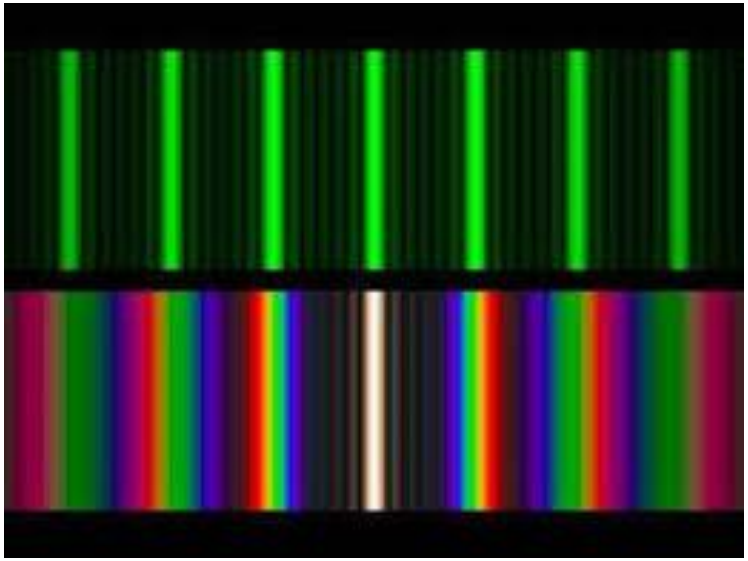
Partículas pequenas



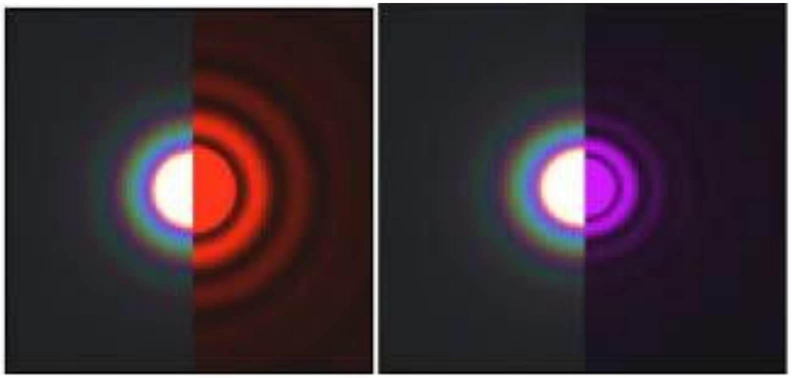
Difração

Para melhor visualização da difração, como na interferência,
é necessário luz monocromáticas
(Ideal é um laser monocromático)

Fendas

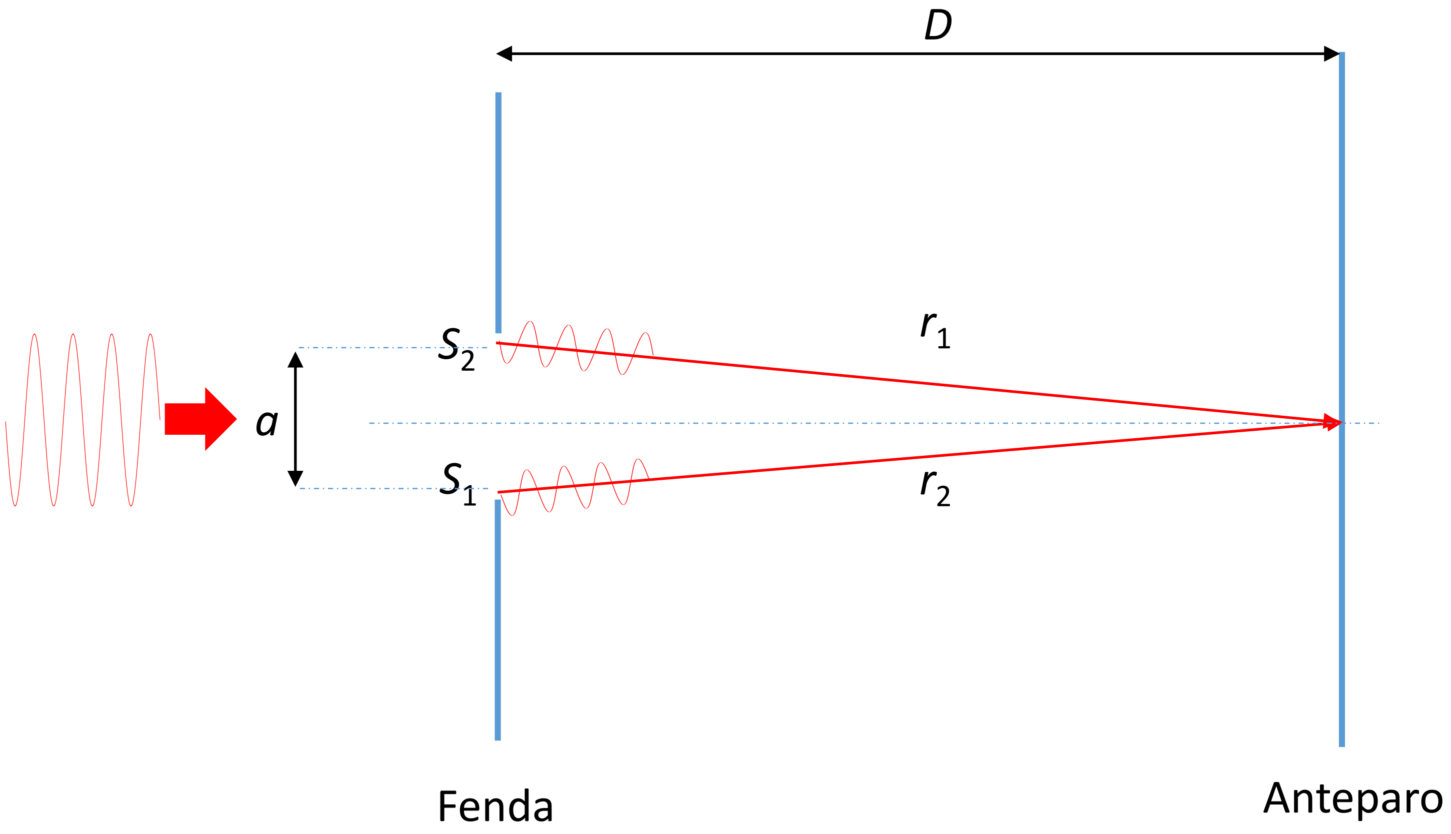


Furos



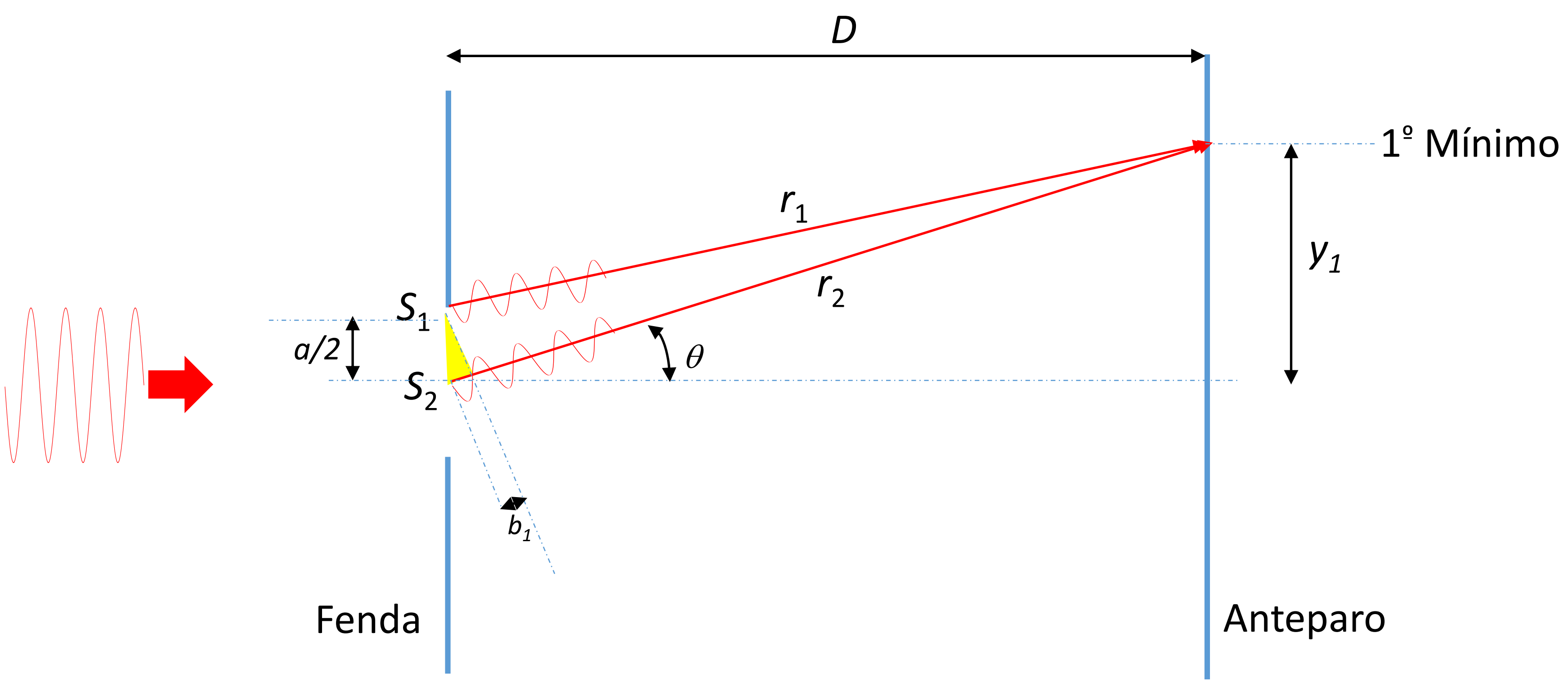
Difração numa fenda

Por simetria, no caso da difração em uma fenda, é possível prever (e observar) que sempre haverá um ponto central com interferência construtiva



Difração numa fenda

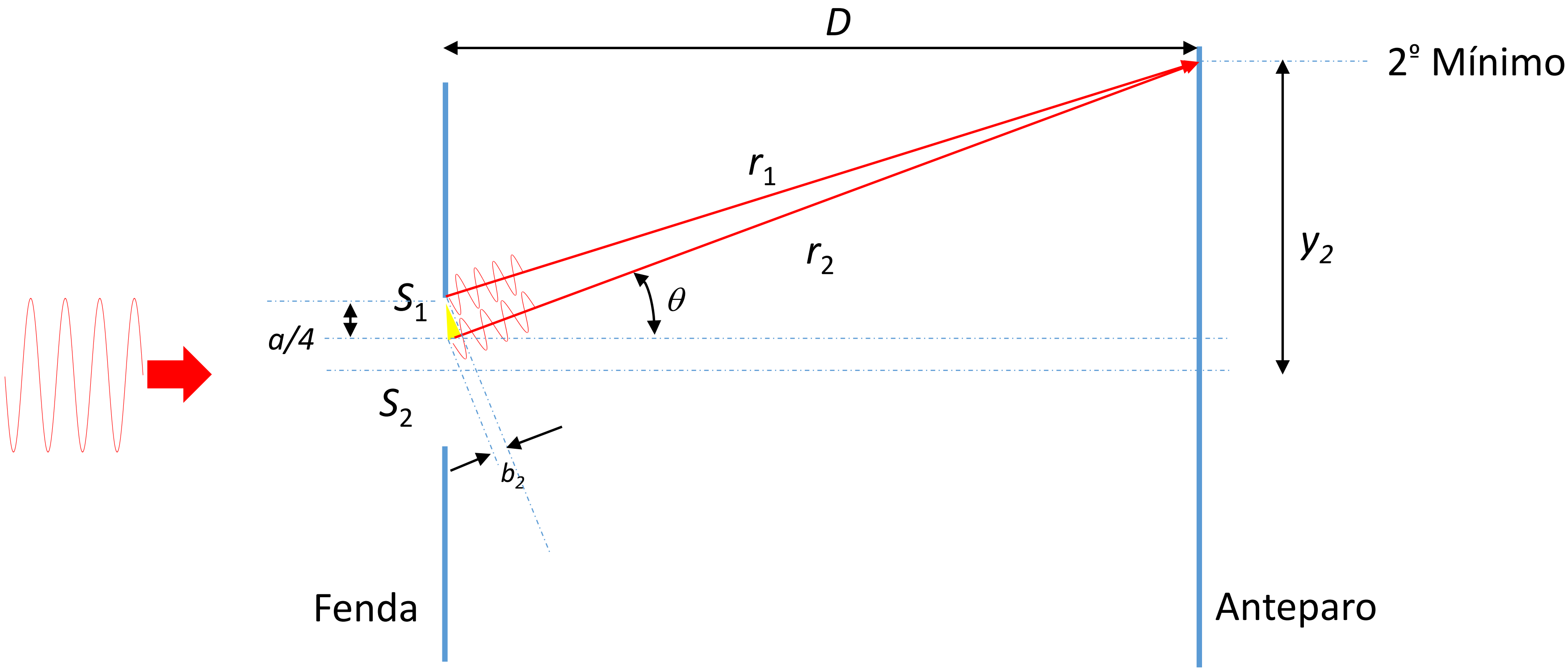
Pode-se observar o primeiro mínimo quando houver uma defasagem de $\lambda/2$ entre a borda e o centro da fenda, ou seja:



O primeiro mínimo ocorre quando $b_1=\lambda/2$: $$sen\theta = \frac{b_1}{(a/2)} = \frac{2b_1}{a} = \frac{\lambda}{a} \Rightarrow \boxed{a\ sen\theta = \lambda}$$

Difração numa fenda

Para calcular o segundo mínimo, subdivide-se mais uma vez a fenda em mais duas partes:



O segundo mínimo ocorre quando $b_2 = \lambda/2$: $sen\theta = \dfrac{b_2}{(a/4)} = \dfrac{4b_2}{a} = \dfrac{2\lambda}{a}$ $\Rightarrow$ $\boxed{a\ sen\theta = 2\lambda}$

Difração numa fenda

Subdividindo a fenda em 2 partes: Primeiro mínimo $\Rightarrow$ $\boxed{a\ sen\theta = \lambda}$

Subdividindo a fenda em 4 partes: Segundo mínimo $\Rightarrow$ $\boxed{a\ sen\theta = 2\lambda}$

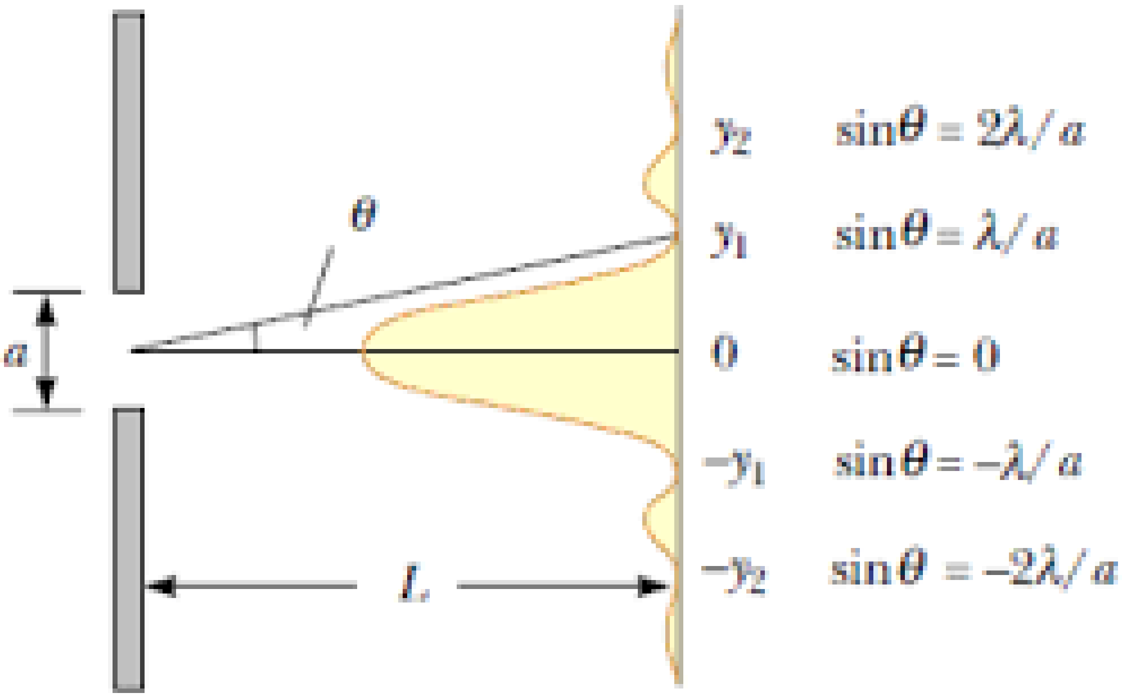
Subdividindo a fenda em 6 partes: Terceiro mínimo $\Rightarrow$ $\boxed{a\ sen\theta = 3\lambda}$

E assim por diante

Subdividindo a fenda em 2*m* partes: *m* mínimo $\Rightarrow$ $\boxed{a\ sen\theta = m\lambda}$ (*m*=1,2,3..)

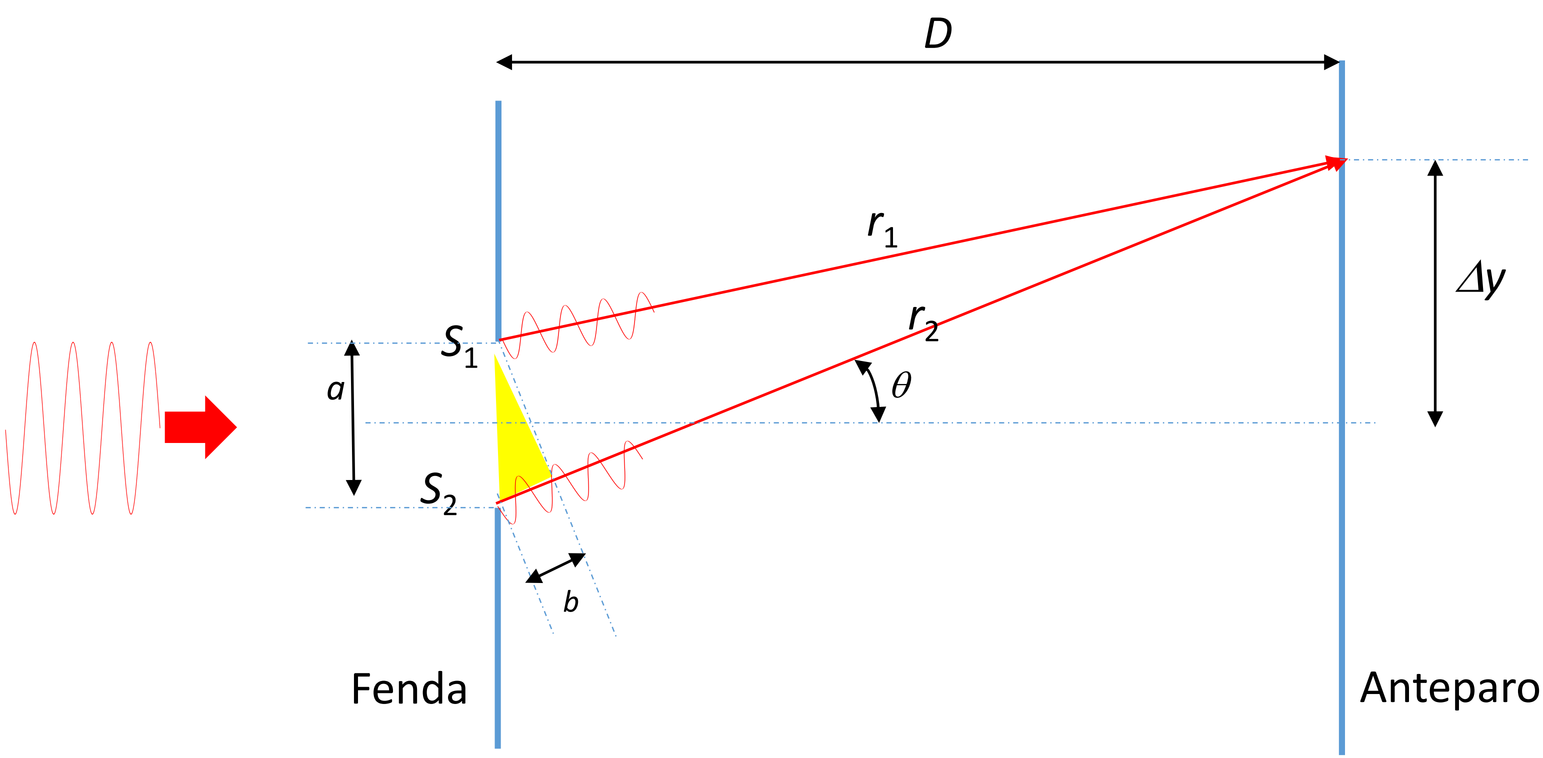
Segundo o principio de Huygens, 2*m* está relacionado ao número de fontes e deve ser muito grande!

Difração numa fenda



Difração numa fenda

Podemos escrever em termos de fase ϕ, para qualquer ângulo θ:



$$sen\theta = \frac{b}{(a)} = \frac{b}{a}$$

$$\phi = b\frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\begin{cases} b = \dfrac{\lambda}{2\pi}\phi \\ sen\theta = \dfrac{1}{a}\left(\dfrac{\lambda}{2\pi}\phi\right) \end{cases}$$

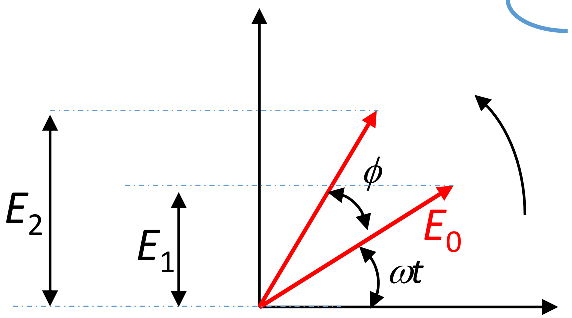
$$\boxed{\phi = \left(\frac{2\pi a}{\lambda}\right) sen\theta}$$

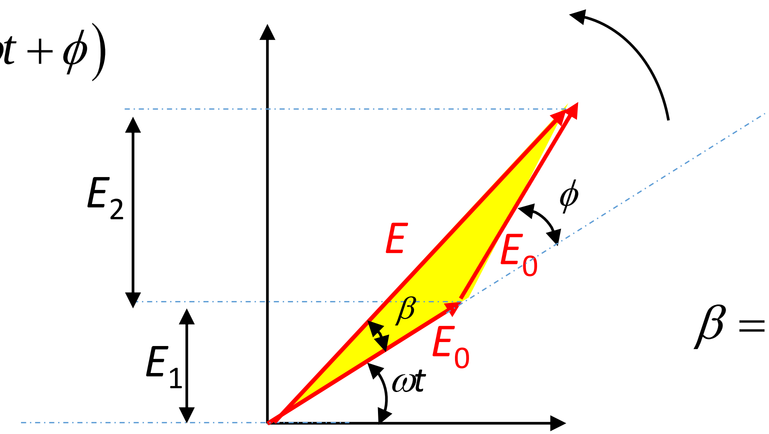
Difração numa fenda

Vamos usar o modelos de Fasor (método geométrico) para determinar o padrão de difração (cálculo quantintativo)

Apenas duas fontes:

$$E = E_1\left[S_1\right] + E_2\left[S_2\right] \quad \begin{cases} E_1 = E_0 sen\ \omega t \\ E_2 = E_0 sen\ \left(\omega t + \phi\right) \end{cases}$$





$$\beta = \frac{\phi}{2}$$

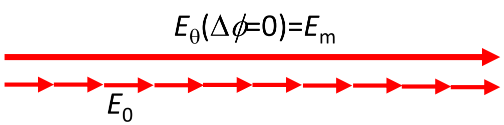
$$\cos\beta = \frac{E/2}{E_0} \Rightarrow E = 2\left(E_0 \cos\beta\right)$$

$$E = 2\left(E_0 \cos\frac{\phi}{2}\right) \Rightarrow \boxed{I = 4I_0 \cos^2\frac{\phi}{2}}$$

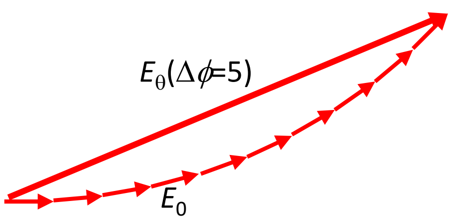
Difração numa fenda

Vamos usar o modelos de Fasor (método geométrico) para determinar o padrão de difração (cálculo quantintativo)

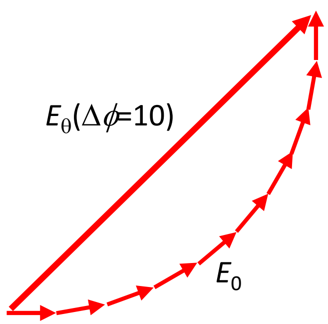
No caso de *m* fontes: Ex: *m*=10



Máximo central, $\theta=0$



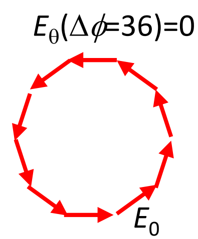
Direção θ um pouco fora da direção central



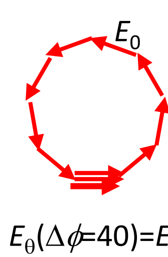
Direção θ um mais fora da direção central

$$\phi = m\Delta\phi$$

Primeiro mínimo

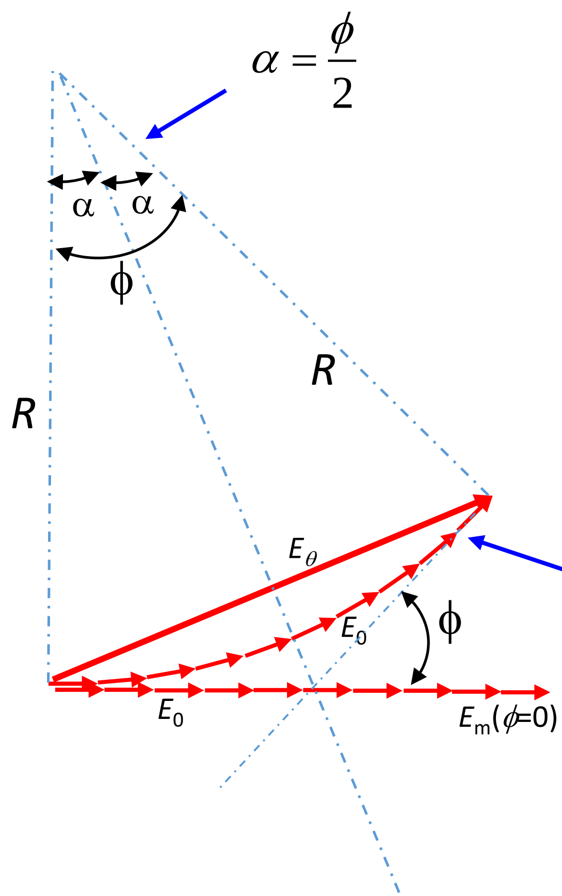


Direção um pouco depois do mínimo



Difração numa fenda

Vamos usar o modelos de Fasor (método geométrico) para determinar o padrão de difração (cálculo quantintativo)



$$sen\alpha = \frac{E_\theta / 2}{R} = \frac{E_\theta}{2R} = sen\left(\frac{\phi}{2}\right)$$

$$E_\theta = 2R sen\left(\frac{\phi}{2}\right)$$

$$\text{Comprimento do arco} = \phi R = E_m \Rightarrow R = \frac{E_m}{\phi}$$

$$E_\theta = \frac{2E_m}{\phi} sen\left(\frac{\phi}{2}\right) = \frac{E_m}{(\phi/2)} sen\left(\frac{\phi}{2}\right)$$

Difração numa fenda

Vamos usar o modelos de Fasor (método geométrico) para determinar o padrão de difração (cálculo quantintativo)

$$E_\theta = \frac{2E_m}{\phi} sen\left(\frac{\phi}{2}\right) = \frac{E_m}{(\phi/2)} sen\left(\frac{\phi}{2}\right)$$

Intensidade é o campo ao quadrado:

$$(E_\theta)^2 = \frac{(E_m)^2}{(\phi/2)^2} sen^2\left(\frac{\phi}{2}\right)$$

$$I = I_m \frac{sen^2\left(\frac{\phi}{2}\right)}{\left(\frac{\phi}{2}\right)^2} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \boxed{I = I_m \left(\frac{sen\alpha}{\alpha}\right)^2} \\ \boxed{\alpha = \frac{\phi}{2}} \\ \boxed{\phi = \left(\frac{2\pi a}{\lambda}\right) sen\theta} \end{array} \right.$$

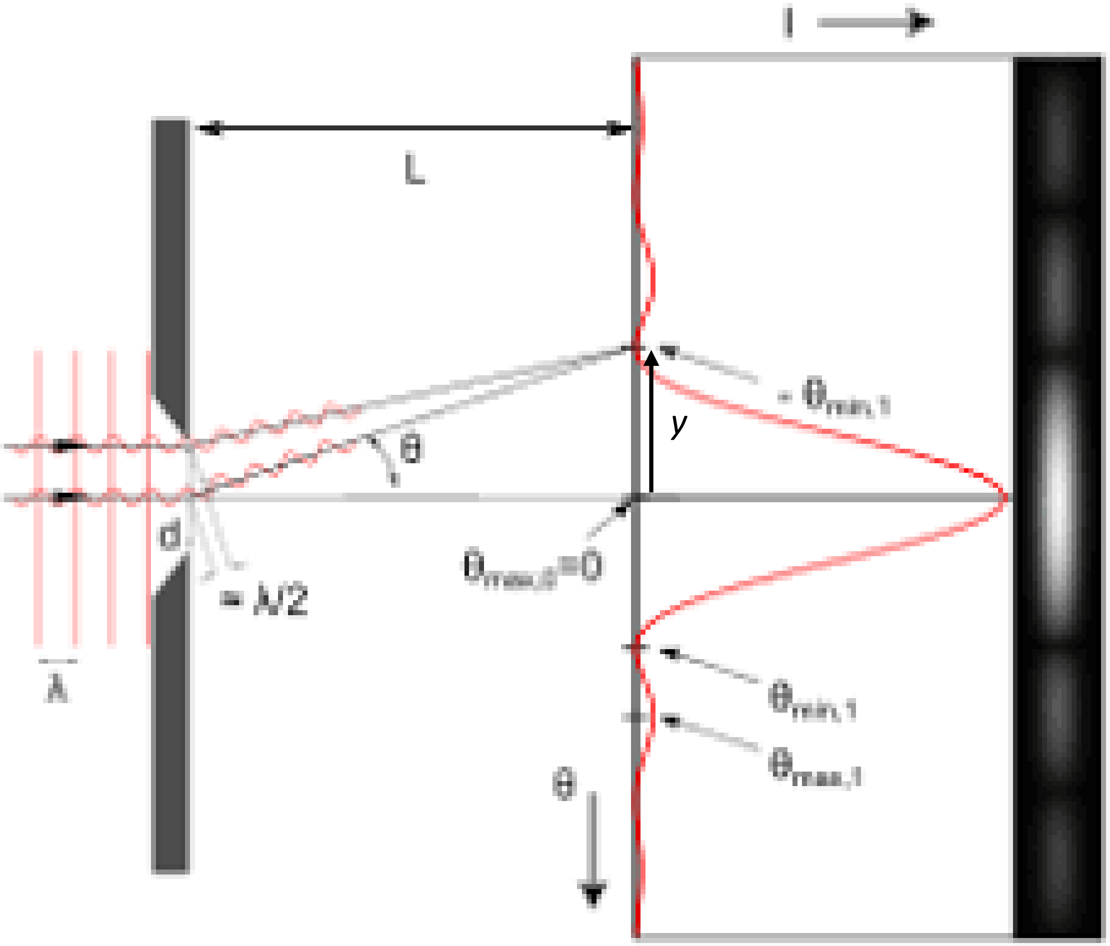
Função Sinc ao quadrado

$$\boxed{\phi = \left(\frac{2\pi a}{\lambda}\right) sen\theta} \Leftrightarrow \boxed{\frac{\phi}{2} = \left(\frac{\pi a}{\lambda}\right) sen\theta}$$

Difração numa fenda

$$I = I_m \left(\frac{sen\alpha}{\alpha} \right)^2$$

$$\alpha = \frac{\phi}{2} = \left(\frac{\pi a}{\lambda} \right) sen\theta$$



Considerando ângulo pequenos:

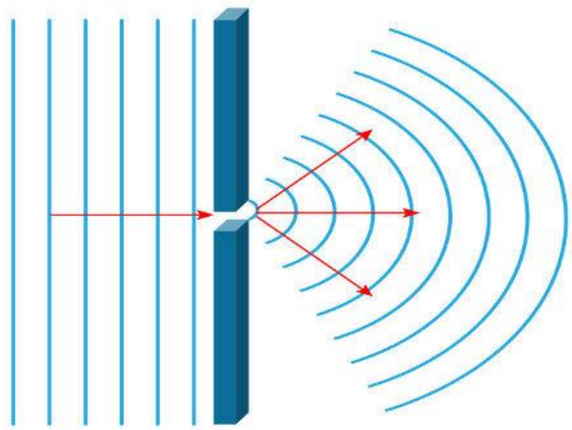
$$\alpha = \frac{\phi}{2} = \left(\frac{\pi a}{\lambda} \right) \frac{y}{L}$$

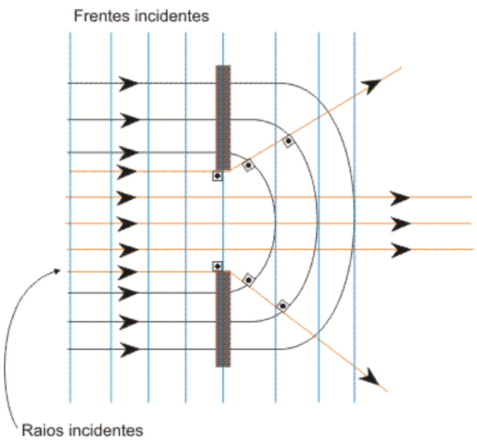
$$I = I_m \left(\frac{sen\left(\frac{\pi a y}{\lambda L} \right)}{\left(\frac{\pi a y}{\lambda L} \right)} \right)^2$$

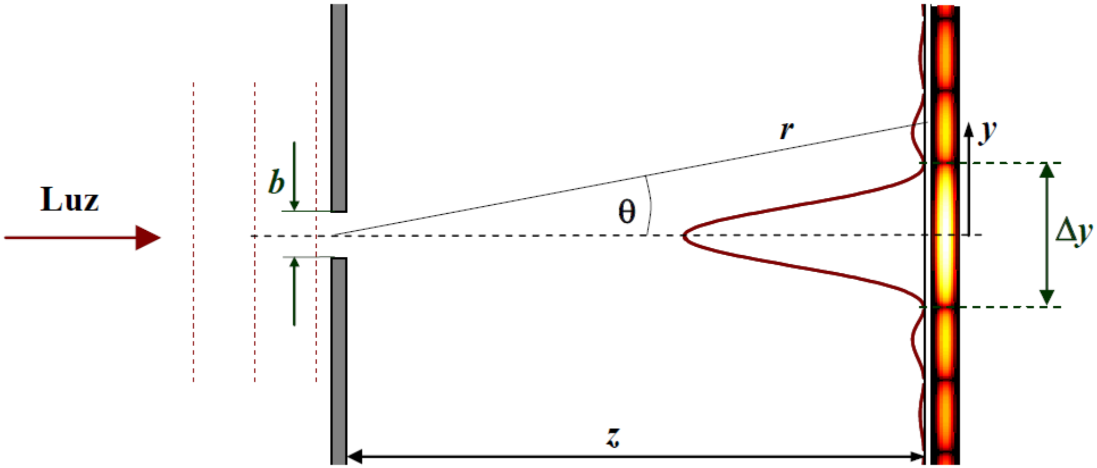
Difração

Fenda pequena

Fenda grande





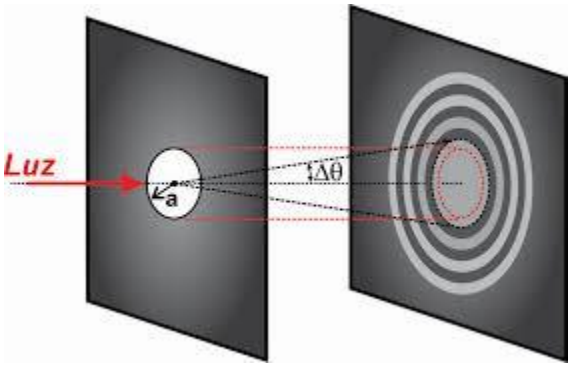


1º Mínimo

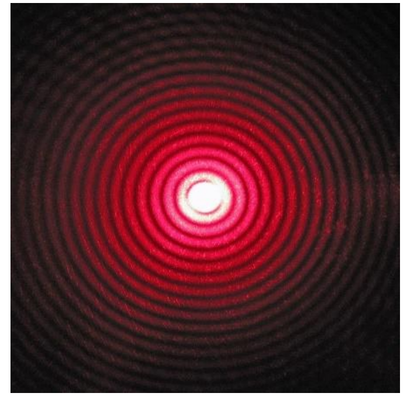
$$a\ sen\theta = \lambda$$

$$sen\theta = \frac{\lambda}{a}$$

Difração num furo

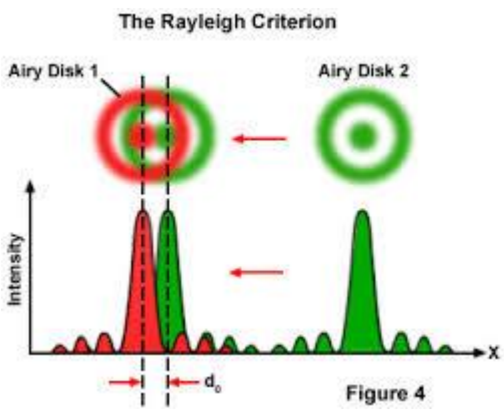


Furos pequenos

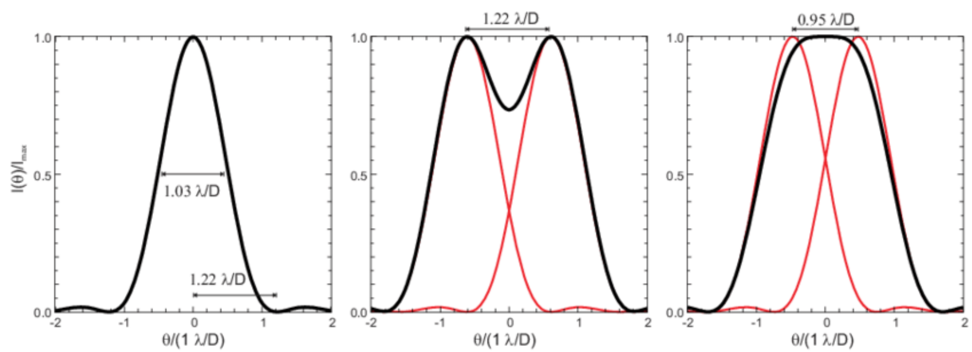


Definição de critério de resolução

(Critério de Rayleigh)



Primeiro mínimo no máximo do vizinho próximo!



1º Mínimo

$$sen\theta = \frac{\lambda}{a}$$

(Fenda)

1º Mínimo

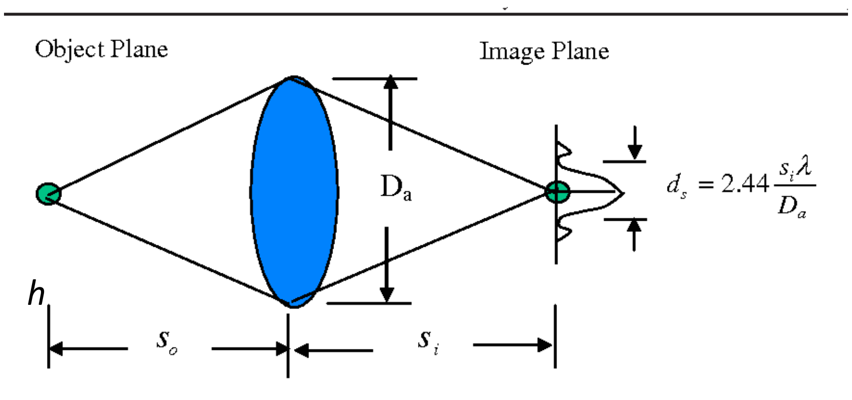
$$sen\theta = 1,22\frac{\lambda}{a}$$

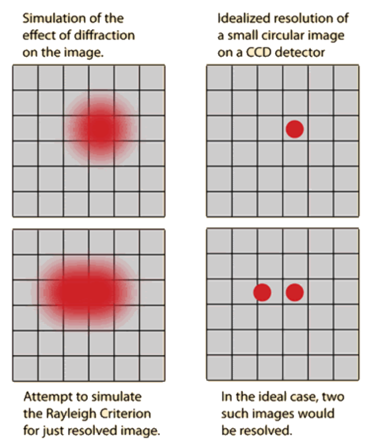
(Círculo)

Critério de Rayleigh

Mas qual a importância desse critério de resolução?

Correlação:
Tamanho Objeto ⇔ Tamanho Imagem ⇔ Tamanho Abertura





Há um limite teórico para a formação da menor ponto imagem (d_s) determinado pelo tamanho do ponto objeto (h), comprimento de onda (λ) e abertura do sistema óptico (D_a).

Condições Geométricas

$$\boxed{\frac{1}{s_0} + \frac{1}{s_i} = \frac{1}{f}}$$

$$\boxed{m = \frac{-s_i}{s_0} = \frac{h_i}{h}}$$

+

Condições Óptica Física

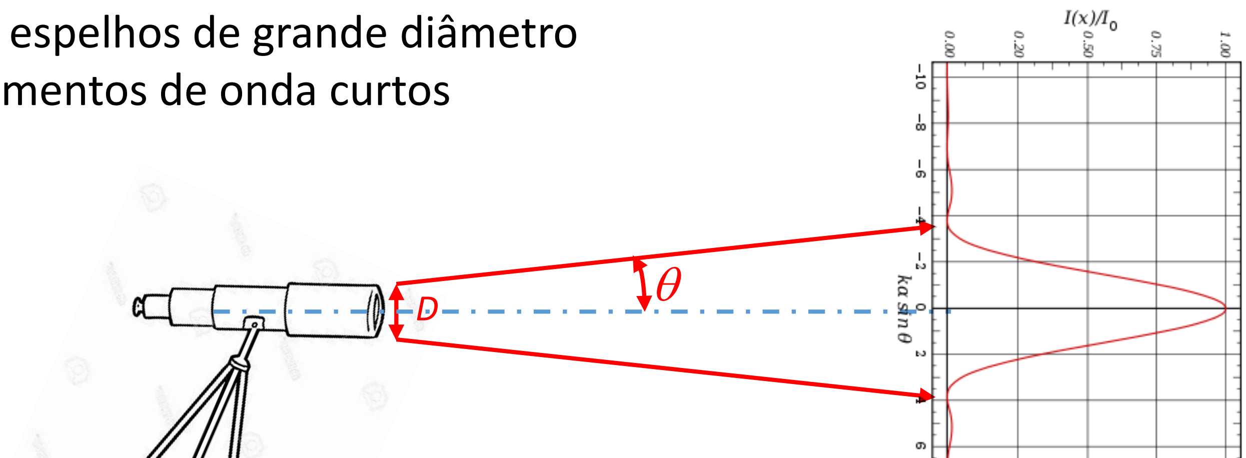
$$sen\theta = 1,22\frac{\lambda}{h} \Leftrightarrow sen\theta = 1,22\frac{\lambda}{D_a}$$

$$sen\theta \approx \frac{D_a}{2s_0} \Leftrightarrow sen\theta \approx \frac{D_a}{2s_i}$$

Critério de Rayleigh

Portanto, para melhorar a resolução:

- Lentes, espelhos de grande diâmetro
- Comprimentos de onda curtos



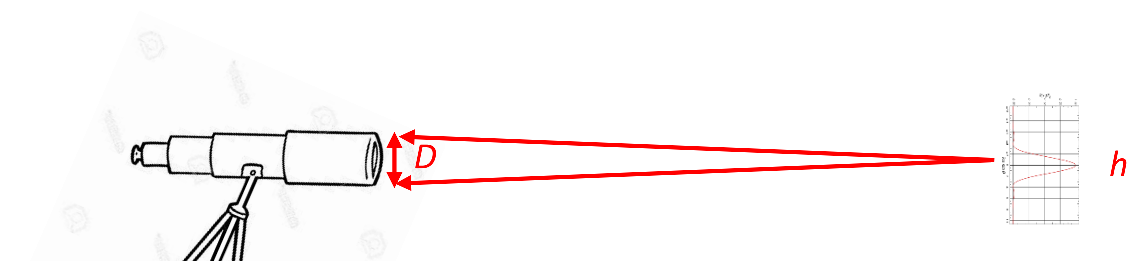
$$sen\theta = 1,22\frac{\lambda}{D} \approx \theta$$

Considerando λ em 500 nm:

- Olho humano, *D*=5 mm:
  θ=1,2x10^{-4} rad

- Telescópio de Galileo, *D*=3 cm:
  θ=2x10^{-5} rad

- Telescópio Gemini, *D*=8 m:
  θ=7,6x10^{-8} rad

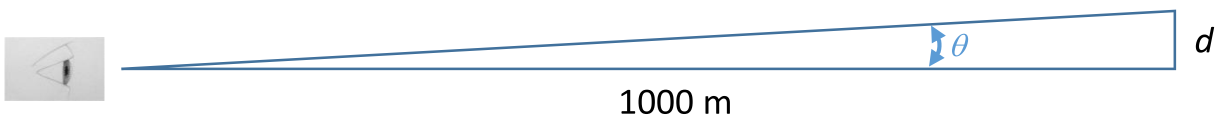


$$sen\theta = 1,22\frac{\lambda}{h}$$

Critério de Rayleigh

Exemplo: Uma pessoa num avião voando a 1000 m de altitude. Qual é a dimensão o menor objeto que ela pode "ver" (resolver, distinguir)? (considere λ=500 nm)

Olho humano, D=5 mm: Limite de difração θ=1,2x10^{-4} rad



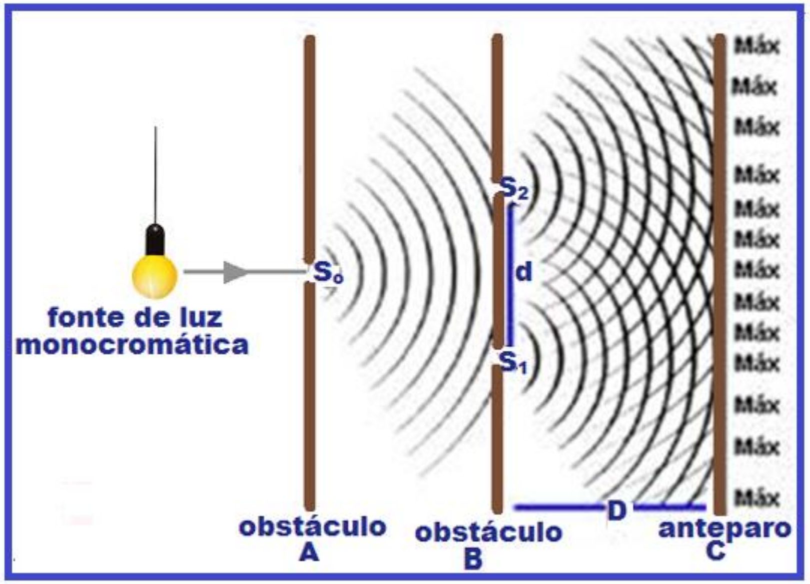
$$sen\theta = \frac{d}{1000} \approx \theta \quad \Rightarrow \quad d = 1000 * 1,2 \times 10^{-4} = 0,12 \text{ m} \quad \Rightarrow \quad \boxed{12 \text{ cm}}$$

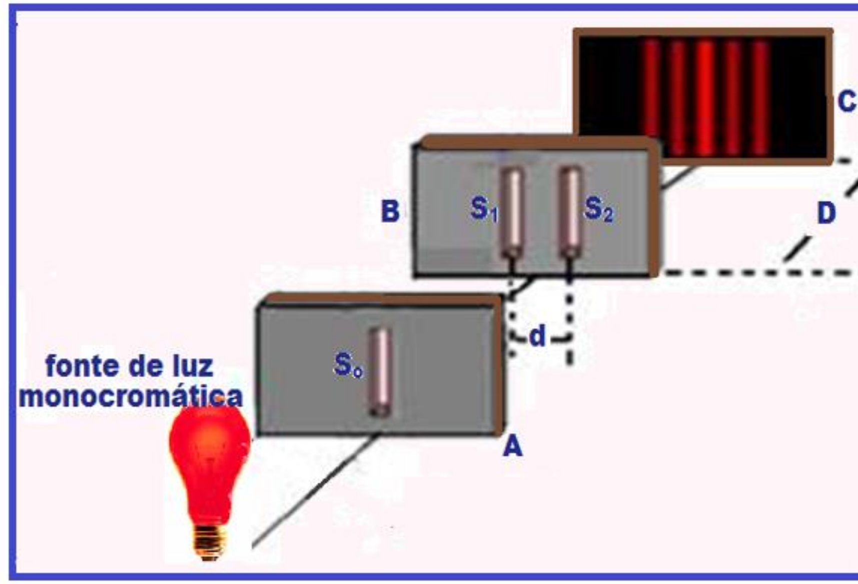
Telescópio (binóculos), D=3 cm: Limite de difração θ=2x10^{-5} rad

$$d = 1000 * 2 \times 10^{-5} = 0,02 \text{ m} \quad \Rightarrow \quad \boxed{2 \text{ cm}}$$

Difração na Dupla Fenda

Experimento de Young: Interferência + Difração





Interferência construtiva

$$d sen\theta = m\lambda$$

Interferência destrutiva

$$d sen\theta = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda$$

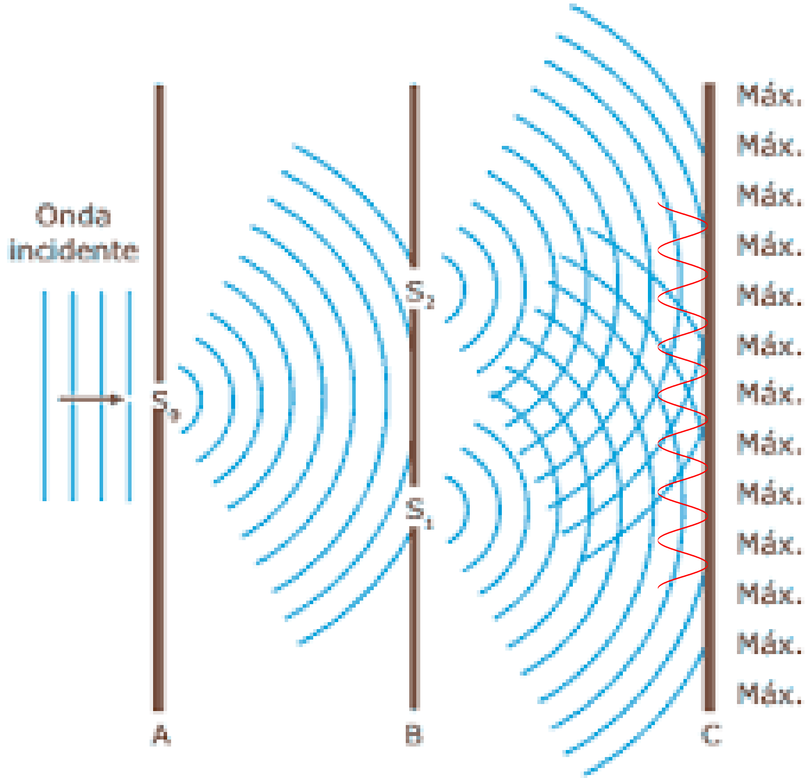
Só termo de interferência

$$I = E^2 = 4I_0 \cos^2\left(\frac{\phi}{2}\right)$$

$$\phi = \left(\frac{2\pi d}{\lambda}\right) sen\theta$$

Difração na Dupla Fenda

Experimento de Young: Interferência



Interferência

$$I = E^2 = 4I_0 \cos^2\left(\frac{\phi}{2}\right)$$

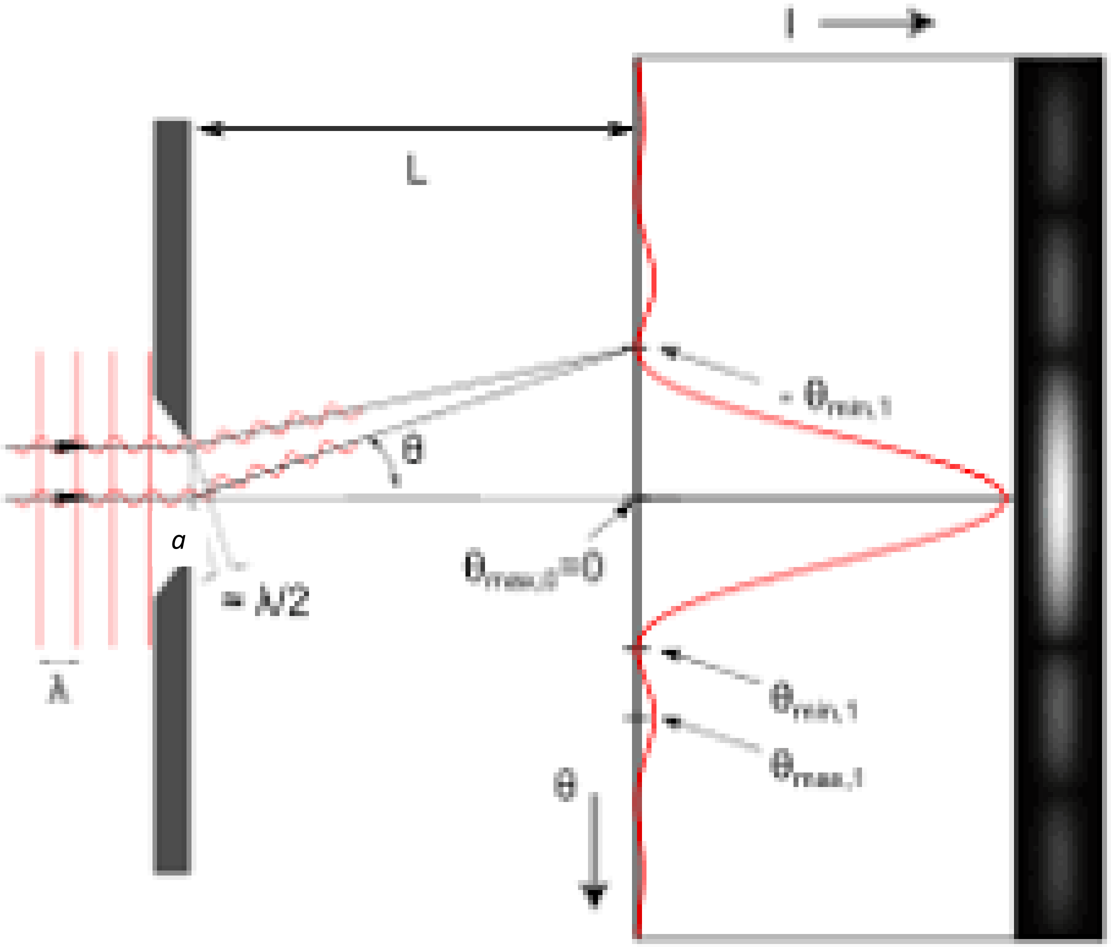
$$\beta = \frac{\phi}{2} = \left(\frac{\pi d}{\lambda}\right) sen\theta$$

d=Separação entre as fendas

Mas também temos que considerar que as fendas difratam a luz!

Difração na Dupla Fenda

Experimento de Young: Difração



Difração

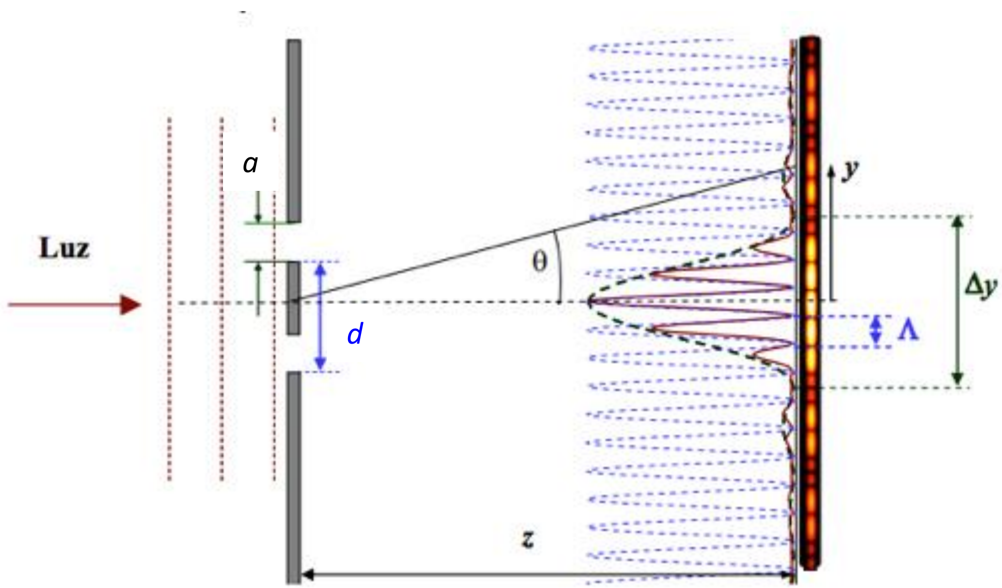
$$I = I_m \left(\frac{sen\alpha}{\alpha} \right)^2$$

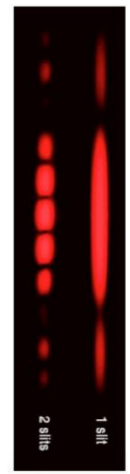
$$\alpha = \frac{\phi}{2} = \left(\frac{\pi a}{\lambda} \right) sen\theta$$

a=Largura das fendas

Difração na Dupla Fenda

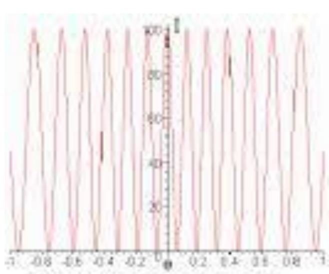
Experimento de Young: Interferência + Difração





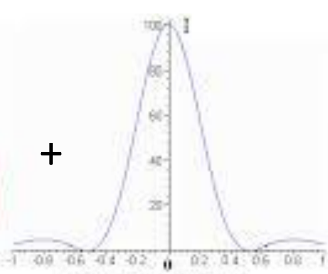
$$I = I_0 \overbrace{\left(\cos^2 \beta\right)}^{\text{Interferência}} \overbrace{\left(\frac{sen\alpha}{\alpha}\right)^2}^{\text{Difração}}$$

$$\beta = \left(\frac{\pi d}{\lambda}\right) sen\theta \qquad \alpha = \left(\frac{\pi a}{\lambda}\right) sen\theta$$



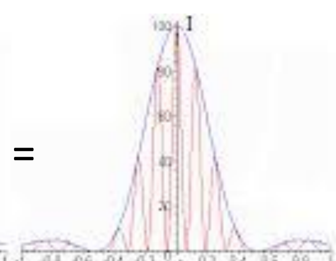
(a) interferência (fenda dupla apenas)

+



(b) difração (fenda única)

=



(c) Efeito conjunto de interferência e difração (fendas duplas)