

$$6. S_1 = \{ \underbrace{\sin t}_{w_1}, \underbrace{\cos t}_{w_2}, \underbrace{\sin t \cos t}_{w_3} \} \quad e$$

$$S_2 = \{ \underbrace{1}_{w_1}, \underbrace{\sin 2t}_{w_2}, \underbrace{\cos 2t}_{w_3} \}$$

Provar que $[S_1] = [S_2]$.

Precisamos provar que: $S_1 \subset [S_2]$ e $S_2 \subset [S_1]$.

I: Provar que $S_2 \subset [S_1]$

$$w_1 = 1 \cdot u_1 + 1 \cdot u_2 + 0 \cdot u_3 \in [S_1] \quad \text{Logo } S_2 \subset [S_1].$$

$$w_2 = 0 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 + 2 \cdot u_3 \in [S_1]$$

$$w_3 = -\frac{1}{2} u_1 + 1 \cdot u_2 + 0 \cdot u_3 \in [S_1]$$

II Provar que $S_1 \subset [S_2]$.

$$\text{Sabemos que } \cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t \\ = \cos^2 t - 1 + \cos^2 t,$$

$$\text{Logo, } 2\cos^2 t = 1 + \cos 2t$$

$$\text{Assim, } \cos^2 t = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2t$$

$$\text{Portanto } u_2 = \frac{1}{2} w_1 + 0 \cdot w_2 + \frac{1}{2} w_3.$$

$$\text{Analogamente, } \sin^2 t = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2t.$$

$$\text{Logo } u_1 = \frac{1}{2} w_1 + 0 \cdot w_2 - \frac{1}{2} w_3.$$

$$u_3 = \sin t \cos t = \frac{1}{2} \sin 2t.$$

$$u_3 = 0 \cdot w_1 + \frac{1}{2} w_2 + 0 \cdot w_3.$$

Logo $S_1 \subset [S_2]$.

Por I e II e a propriedade (4)
se subespaço gerado, temos que $[S_1] = [S_2]$

7. Mostrar que o vetor $v = (1, 2, 2)$ NÃO é combinação linear de $u = (1, 1, 2)$ e $w = (1, 2, 1)$ 2

Suponha que existem $x, y \in \mathbb{R}$ tais que
 $(1, 2, 2) = x(1, 1, 2) + y(1, 2, 1)$. Temos

então:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}}_u x + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_w y \quad (*)$$

Temos então o sistema com matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{L_2 \leftrightarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftrightarrow L_3 - 2L_1}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftrightarrow L_3 + L_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \text{ O sistema } (*) \text{ é inconsistente!}$$

Logo $(1, 2, 2)$ não pode ser escrito como CL de u e w !

O sistema linear de 3 equações e 3 incógnitas é $(*)$.

8. Sejam v_1, v_2, v_3 os vetores linha e w_1, w_2, w_3 os vetores coluna

da matriz $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$.

Mostrar que $[v_1, v_2, v_3] = [w_1, w_2, w_3]$.

$$v_1 = (1, 2, 3)$$

$$v_2 = (4, 5, 6)$$

$$v_3 = (7, 8, 9)$$

$$v_2 - v_1 \in [v_1, v_2, v_3]$$

"

$$(3, 3, 3)$$

$$v_3 - v_2 \in [v_1, v_2, v_3]$$

$$(3, 3, 3)$$

Temos então que $v_1 = (1, 2, 3)$ e $u_1 = (1, 1, 1)$
 $\in [v_1, v_2, v_3]$ e $u_2 = v_1 - v_2 \in$
 $[v_1, v_2, v_3]$ $(0, 1, 2)$

Vamos provar que $[v_1, v_2, v_3] = [u_1, u_2]$ (*)

$$v_1 = u_1 + u_2$$

$$v_2 = u_1 + 4u_2$$

$$v_3 = u_1 + 6u_2$$

$\Rightarrow \{v_1, v_2, v_3\} \subset [u_1, u_2]$
 e já tínhamos
 que $\{u_1, u_2\} \subset [v_1, v_2, v_3]$.

Portanto a afirmação (*) é válida.

Agora temos que:

$$w_1 = (1, 4, 7)$$

$$w_2 = (2, 5, 8)$$

$$w_3 = (3, 6, 9)$$

$$\text{Temos que } w_3 - w_2 = u_1$$

$$w_3 - w_2 = u_1$$

$$\text{e } w_2 - 2w_1 = (0, -3, -6) =$$

$$-3u_2 \Rightarrow$$

$$u_2 = -\frac{1}{3}(w_2 - 2w_1)$$

$$u_2 = (0, 1, 2)$$

$$\text{Logo } [u_1, u_2] \subset [w_1, w_2, w_3].$$

$$\text{Provar que } \{w_1, w_2, w_3\} \subset [u_1, u_2]$$

$$w_1 = u_1 + 3u_2$$

$$w_2 = 2u_1 + 3u_2$$

$$w_3 = 3u_1 + 3u_2.$$

$$\text{Assim } [w_1, w_2, w_3] \subset [u_1, u_2].$$

$$\text{Portanto } [w_1, w_2, w_3] = [u_1, u_2], \quad (**)$$

De (*) e (**) temos que

$$[v_1, v_2, v_3] = [u_1, u_2] = [w_1, w_2, w_3], \quad \blacksquare$$

11 (a) $[S \cup T] \subset [S] + [T]$ VERDADEIRO 5

Seja $v \in [S \cup T]$. Então, existem

$$\underbrace{u_1, \dots, u_r}_{\in S}, \underbrace{w_1, \dots, w_s}_{\in T} \in S \cup T \text{ e } a_1, \dots, a_r \in \mathbb{R} \\ b_1, \dots, b_s \in \mathbb{R}$$

tais que $v = \underbrace{a_1 u_1 + \dots + a_r u_r}_{u \in [S]} + \underbrace{b_1 w_1 + \dots + b_s w_s}_{w \in [T]}$

Logo $v = u + w$, $u \in [S]$ e $w \in [T]$,

Assim, $[S \cup T] \subset [S] + [T]$.

Provar agora que $[S] + [T] \subset [S \cup T]$.

Se $v \in [S] + [T] \Rightarrow v = u + w$,
onde $u \in [S]$ e $w \in [T]$, $\rightarrow$ existe

Assim, $u = a_1 u_1 + \dots + a_r u_r$, $a_i \in \mathbb{R}$, $u_i \in S$
 $w = b_1 w_1 + \dots + b_s w_s$, $b_i \in \mathbb{R}$, $w_i \in T$
 $1 \leq i \leq s$.

Como $\{u_1, \dots, u_r\} \cup \{w_1, \dots, w_s\} \in S \cup T$,
temos que $v \in [S \cup T]$. ■

(b) FALSO

$$S = \{(1, 1, 1)\} \subset \mathbb{R}^3, \quad T = \{(2, 2, 2)\} \subset \mathbb{R}^3$$

$$[S] = \{(x, x, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$$

$$[T] = \{(2y, 2y, 2y), y \in \mathbb{R}\} = \{2y(1, 1, 1), y \in \mathbb{R}\}$$

Assim, $S \cap T = \emptyset$, mas $[S] \cap [T] = [S] = [T]$. ■