SME0212 – Primeira Prova

Instruções

A prova possui cinco questões de igual valor e deve ser entregue através da página da disciplina no eDisciplinas. Os formatos aceitáveis são html e pdf. Por favor, não entreguem em formatos "executáveis", como os notebooks do Jupyter.

A prova pode ser entregue até amanhã (21 de outubro de 2021) às 16:20h (quatro horas e vinte minutos da tarde). O professor estará em sala de aula hoje para tirar dúvidas sobre os enunciados.

Boa prova, as questões são fáceis. Não colem (o professor fica muito triste mesmo quando isso ocorre).

1

Denotemos $B_\epsilon(\boldsymbol{x}) := \{\boldsymbol{y} : \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| \leq \epsilon\}$. Um ponto $\boldsymbol{x}^*$ é dito *minimizador local* de $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ quando existe $\epsilon > 0$ tal que para todo $\boldsymbol{x} \in B_\epsilon(\boldsymbol{x}^*)$ tenhamos

$$f(\boldsymbol{x}^*) \leq f(\boldsymbol{x}).$$

Defina adequadamente *minimizador global*, e os conceitos correspondentes de *maximizador* local e global e prove que a tarefa de maximização pode ser reduzida à de minimização.

2

Dizemos que $\boldsymbol{d} \in \mathbb{R}^n$ é uma direção de descida para $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a partir de $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ quando existe $\Lambda > 0$ tal que para todo $\lambda \in (0, \Lambda]$ temos

$$f(\boldsymbol{x} + \lambda \boldsymbol{d}) < f(\boldsymbol{x}).$$

Prove que se f é diferenciável em $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{d}^T \nabla f(\boldsymbol{x}) < 0$, então $\boldsymbol{d}$ é uma direção de descida.

3

Considere o algoritmo definido por $\boldsymbol{x}^{k+1} = \boldsymbol{x}^k - \lambda_k \nabla f(\boldsymbol{x}^k)$, onde $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é convexa e diferenciável. Mostre que vale

$$\|\boldsymbol{x}^{k+1} - \boldsymbol{y}\|^2 \leq \|\boldsymbol{x}^k - \boldsymbol{y}\|^2 - 2\lambda_k\big(f(\boldsymbol{x}^k) - f(\boldsymbol{y})\big) + \lambda_k^2 \|\nabla f(\boldsymbol{x}^k)\|^2.$$

4

Considere o problema irrestrito $\min\{f_\gamma(\boldsymbol{x}) := \|A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}\|_2^2 + \gamma\|\boldsymbol{x}\|_1\}$ e denote por $\boldsymbol{x}_\gamma^*$ a sua solução. Prove que se $\alpha > \beta$ então $f_\alpha(\boldsymbol{x}_\alpha^*) \geq f_\beta(\boldsymbol{x}_\beta^*)$. Generalize.

5

Considere o seguinte algoritmo de gradientes conjugados:

$$\boldsymbol{x}^{k+1} = \boldsymbol{x}^k + \lambda_k \boldsymbol{d}^k$$

onde

$$\lambda_k = \arg\min f(\boldsymbol{x}^k + \lambda \boldsymbol{d}^k),$$

$$\beta_k = \frac{\nabla f(\boldsymbol{x}^k)^T \left(\nabla f(\boldsymbol{x}^k) - \nabla f(\boldsymbol{x}^{k-1})\right)}{\nabla f(\boldsymbol{x}^{k-1})^T \nabla f(\boldsymbol{x}^{k-1})} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{d}^k = -\nabla f(\boldsymbol{x}^k) + \beta_k \boldsymbol{d}^{k-1}.$$

Mostre que $\boldsymbol{d}^k$ é uma direção de descida.