Publicado em inglês sob o título "EPISODES FROM THE EARLY HISTORY OF MATHEMATICS" pela "MATHEMATICA ASSOCIATION OF AMERICA". Tradução do Prof. João Bosco Pitombeira de Carvalho.

Ilustrado pelo autor

Agradecimentos

As figuras 1.1, 1.3, 1.5 foram reproduzidas de "*The Babylinian Expedition of the University of Pennsylvania*, Series A: Cuneiform Texts, Vol. XX, Part 1, by h. V. Hilprecht, Philadelphia, 1906", por cortesia do Departamento de Arqueologia da Universidadede Pennsylvania.
A Figura 1.4 foi reproduzida de "A. Parrot's *Le Palais de Mari, Architecture*, Librairie Orientaliste Paul Geuthner, Paris, 1958", por cortesia da Missão Arquelógica de Mari.
A Figura 1.6a foi reproduzida por gentileza do Prof. Hallo, da Coleção Babilônia Yale.

Distribuição:
Sociedade Brasileira de Matemática
Estrada Dona Castorina, 110 - Jardim Botânico
CEP: 22460-320 - Rio de Janeiro - RJ
Tel.: (21) 2529-5073 ou 2529-5076
Fax.: (21) 2529-4143 ou 2529-5072
E-mail: sbm@impa.br
Homepage: http://www.sbm.org.br

ISBN: 85-85818-07-7

EPISÓDIOS

Da História Antiga da Matemática

Por
Asger Aaboe

Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro

— 2002 —

Outros títulos da Sociedade Brasileira de Matemática

1. **Exame de Textos**: Elon Lages Lima (editor)

Coleção do PROFESSOR DE MATEMÁTICA

1. **Logaritmos**: Elon Lages Lima
2. **Análise Combinatória e Probabilidade**: Augusto C. Morgado, João Bosco Pitombeira de Carvalho, Paulo Cezar Pinto Carvalho e Pedro Fernandez
3. **Medida e Forma em Geometria**: Elon Lages Lima
4. **Meu Professor de Matemática e outras Histórias**: Elon Lages Lima
5. **Coordenadas no Plano**: Elon Lages Lima
6. **Trigonometria, Números Complexos**: Manfredo P. do Carmo, Augusto C. Morgado, Eduardo Wagner (Notas Históricas de João Bosco Pitombeira)
7. **Coordenadas no Espaço**: Elon Lages Lima
8. **Progressões e Matemática Financeira**: Augusto C. Morgado, Eduardo Wagner e Sheila C. Zani
9. **Construções Geométricas**: Eduardo Wagner (colaboração de José P. Q. Carneiro)
10. **Introdução à Geometria Espacial**: Paulo Cezar Pinto Carvalho
11. **Geometria Euclidiana Plana**: João Lucas Marques Barbosa
12. **Isometrias**: Elon Lages Lima
13. **A Matemática do Ensino Médio, Volume 1**: Elon Lages Lima, Paulo Cezar Pinto Carvalho, Eduardo Wagner e Augusto Cesar Morgado
14. **A Matemática do Ensino Médio, Volume 2**: Elon Lages Lima, Paulo Cezar Pinto Carvalho, Eduardo Wagner e Augusto Cesar Morgado
15. **A Matemática do Ensino Médio, Volume 3**: Elon Lages Lima, Paulo Cezar Pinto Carvalho, Eduardo Wagner e Augusto Cesar Morgado
16. **Matemática e Ensino**: Elon Lages Lima
17. **Temas e Problemas:** Elon Lages Lima, Paulo Cezar Pinto Carvalho, Eduardo Wagner e Augusto Cesar Morgado

Coleção MATEMÁTICA APLICADA

1. **Introdução à Inferência Estatística**: Heleno Bolfarine e Monica Carneiro Sandoval

Coleção FUNDAMENTOS DA MATEMÁTICA ELEMENTAR

1. **Olimpíadas Brasileiras de Matemática 1ª a 8ª** (problemas e soluções)
2. **Olimpíadas de Matemática do Estado do Rio de Janeiro** (problemas e soluções)

Dedicado a

Kristen, Anne,
Erik, and Niels.

CONTEÚDO

Prefácio do Tradutor

Este livro é uma tradução de *Episodes from the Early History of Mathematics*, de Asger Aaboe, publicado como o volume 13 da New Mathematical Library, da Mathematical Association of America, pela editora Random House, Inc., New York, 1964.

Em primeiro lugar, é bom lembrar que o inglês não é a língua nativa do autor do livro, que é dinamarquês. Assim, o livro, de conteúdo extremamente interessante, não deve ser encarado como um modelo de estilo literário de língua inglesa. Abundam construções do tipo "...Greece two thousand years ago, or Babylonia four thousand years ago" (p.1), que em português fica mais bem traduzida como "a Grécia de dois mil ou a Babilônia de quatro mil anos atrás", modificando-se assim um pouco a construção original do autor. Um outro exemplo, traduzido fielmente segundo o original, forneceria, "o conteúdo dos tabletes não fornece nenhuma pista para a idade dos tabletes".

A modificação trivial deste tipo de construção foi o máximo de liberdade que me permiti com o estilo do autor, excetuando o emprego de sinônimos em língua portuguesa para evitar a repetição monótona de uma mesma palavra em inglês.

Fazemos a seguir alguns comentários sobre problemas específicos da tradução.

Em primeiro lugar, adotei a atitude bem liberal de aceitar as palavras que constam como verbetes do *Novo Dicionário da Língua Portuguesa*, de Aurélio Buarque de Holanda, Editora Nova Fronteira, 1ª Edição, Rio de Janeiro, s/d. Encontramos aí, entre outros, "caractere" e "dígito", neologismos introduzidos pelo processamento de dados. No entanto, esta política conduz rapidamente a dificuldades, pois este dicionário registra "consistência", com a acepção matemática de compatibilidade, mas não registra "consistente", com a significação de coerente, compatível. Neste caso, optamos por empregar livremente a palavra consistente, que já é muito usada no linguajar matemático. Seguimos o mesmo critério em relação a "completude" (a completude de um conjunto de axiomas), e a "construtível" e "construtibilidade", nenhum dos três registrados no dicionário.

Vale para a tradução em português o comentário do autor sobre a transcrição, em inglês, dos nomes do grego clássico. Registrei simplesmente, em cada caso, uma das formas de uso comum em português, sem preocupar-me com considerações sobre a transcrição coerente dos nomes próprios.

Uma palavra que me causou muitas hesitações antes de traduzí-la foi "early", como empregada no texto. Em princípio, poderia ser traduzida como "antigo" ou "primitivo". Embora os comentários do autor sobre a matemática grega pré-euclidiana, da Grécia arcaica (Tales) ou clássica (Zenão), em contraposição à da época helenística (Euclides, Arquimedes, Ptolomeu), idade do apogeu da matemática grega, possam deixar margem a que seja aceita a tradução "primitivo", decidi traduzí-la consistentemente como "antigo", quer no título do livro ou dos capítulos, quer no decorrer do texto.

Na parte referente à matemática babilônia, um pequeno problema foi a tradução do termo "old Babylonian", que tem um significado bem definido, em história e arqueologia, designando o período em torno do século vinte a.C., que traduzimos sistematicamente como Babilônia mais antiga, a fim de não carregar o trecho com referências a épocas. Uma visão resumida das civilizações da Mesopotâmia e da Grécia antiga poderá ser encontrada em *História Antiga*, de Paul Petit, DIFEL, São Paulo, Rio de Janeiro, 4ª edição, 1979, Capítulos II, p. 17–28; Capítulo X-XI, p. 79–97; Capítulo XVIII, p. 139-154 e Capítulo XXII, p. 181–192.

Existem, em inglês, palavras distintas para designar uma régua sem escala (straightedge) e uma régua com escala (ruler). Ora, é prática geral em

português dizer-se "construção com régua e compasso", quando o certo, neste contexto, seria dizer "construção com régua sem escala e compasso". Assim, fica convencionado que a expressão "construção com régua e compasso" significa "construção com régua sem escala (straightedge) e compasso".

Foi acrescentado ao Capítulo 2 um pequeno apêndice sobre as traduções de Euclides. Ao fim do livro encontram-se as notas e observações.

Obviamente esta tradução, que não é um modelo de estilo literário em português, contém defeitos e falhas, que poderão ser corrigidos caso os leitores atentos os apontem.

João Pitombeira de Carvalho

Rio de Janeiro, março de 1984

Introdução

Quando um estudante se vê transplantado para uma nova escola em terras estranhas, fica naturalmente muito intrigado por grande parte do currículo. O estudo das línguas e dos assuntos que dependem muito delas, como a literatura, muda radicalmente de nação para nação, e alguns assuntos, a história por exemplo, podem mesmo ser interpretados diferentemente em partes distintas do mesmo país. Mas, nas ciências e na matemática, o aluno se sentirá provavelmente bem à vontade; pois embora a ordem e o estilo da apresentação dos detalhes possam variar de local para local, estes assuntos são essencialmente internacionais.

Mas se agora imaginarmos nosso estudante transportado não somente para um local diferente mas também para outra época – por exemplo, a Grécia de dois mil ou a Babilônia de quatro mil anos atrás – ele teria que procurar atentamente para achar algo que pudesse reconhecer como sendo ciência, quer em conteúdo quer em método. Classificaríamos como filosofia o que era chamado de "física" na época de Aristóteles, com suas discussões sobre o número de princípios básicos e sobre a natureza do movimento; e sua conexão com a física moderna apareceria somente após um estudo cuidadoso do desenvolvimento das ciências físicas. Somente a matemática pareceria familiar a nosso estudante: ele poderia resolver equações quadráticas com seus colegas babilônios e fazer construções geométricas com os gregos. Isso não quer dizer que ele não perceberia diferenças, mas elas seriam somente de forma, e não de conteúdo; o sistema numérico dos babilônios não seria o mesmo que o nosso, mas a fórmula babilônia para resolver equações quadráticas é usada ainda hoje.

A permanência única e a universalidade da matemática, sua independência do tempo e do contexto cultural, são conseqüências diretas de sua própria natureza. No Capítulo 2 direi algo sobre a estrutura das teorias matemáticas, de maneira que me contentarei aqui com chamar a atenção somente para algumas facetas do caráter singular de nosso assunto.

Em primeiro lugar, devo mencionar que a matemática é acumulativa; ou seja, nunca perde território, e suas fronteiras estão sempre se expandindo. Isto é em parte uma conseqüência de seus padrões absolutos; eles asseguram que tudo aquilo que uma vez foi boa matemática será sempre bom e permanecerá como parte do corpo vivo do conhecimento matemático. Este crescimento constante oferece um contraste com o progresso da física, para dar um exemplo, que tem sido a vítima, ou melhor a beneficiária, de várias revoluções radicais. Assim, enquanto que a física grega tem somente interesse histórico para um físico moderno, a matemática grega é ainda boa matemática, que não pode ser evitada pelo matemático moderno. Foi o matemático inglês Littlewood quem disse, com um sorriso pedante, que deveríamos considerar os matemáticos gregos não como alunos inteligentes, ou "candidatos a bolsas", mas sim como "companheiros de outra universidade".

Outra faceta que devo mencionar é o caráter dedutivo da matemática: uma teoria matemática progride de maneira ordenada, lógica, a partir de axiomas explicitamente enunciados. Uma conseqüência disso é que o conhecimento de um certo teorema implica, ou deveria implicar, o conhecimento de todos seus antecessores que o liguem aos axiomas. Assim, um principiante deve começar pelo início, e o começo é freqüentemente composto de conteúdo velho. Posso ilustrar isso com uma citação biológica que, devido a sua forma curiosa, gravei na memória. Diz que a *ontogenia recapitula a filogenia*, e isso significa que, no desenvolvimento de um indivíduo, vemos, em passagem rápida, o desenvolvimento de toda sua espécie. Tomada literalmente, esta afirmação pode conduzir, e tem conduzido, a todo tipo de absurdos, mas apropriadamente restrita contém algo de verdadeiro. Da mesma maneira modificada, ela se aplica à espécie dos matemáticos. O desenvolvimento embriônico de um matemático, isto é, a educação que o conduz dos princípios até à frente de pesquisa de sua época, segue com efeito, grosseiramente, o desenvolvimento da própria matemática.

Assim, quer queiramos ou não, o passado está muito presente conosco na matemática, e, quer queira ou não, um matemático deve principiar por estudar o que é, em conteúdo, matemática antiga, vestida da maneira adotada pela moda matemática de sua época. Além disso, os matemáticos têm orgulho justificado da grande antiguidade de seu assunto: a matemática é uma disciplina tão antiga que até o estudo de sua história se tornou assunto reconhecido de trabalho acadêmico muito antes do da maioria das ciências. É portanto particularmente natural para o estudante de matemática travar conhecimento com a história de seu assunto, e o propósito deste pequeno volume é ajudá-lo a fazer isso.

Decidi não tentar dar uma visão geral da história da matemática, desde seus princípios até os dias de hoje. Um tal tratamento, quando limitado a um comprimento razoável, se torna necessariamente fraco em detalhes matemáticos, e só faz sentido àqueles que são suficientemente competentes matematicamente para fornecerem profundidade a um retrato superficial. Em vez disso, selecionei quatro episódios da história da matemática antiga, e os tratei detalhadamente, com comentários que transmitam noção do contexto apropriado. Como princípio orientador de minha escolha de tópicos, usei primeiramente o de que o conteúdo matemático deveria estar ao alcance de um estudante com conhecimento da álgebra e geometria do segundo grau, de maneira que exclui tudo o que diz respeito aos processos de limites e ao cálculo (exceto a demonstração curta e elegante que conduziu Arquimedes à sua descoberta do volume e da superfície de uma esfera, e que não consegui resistir a incluir). Além disso, quis que minhas seleções fossem matematicamente significantes, representativas de suas épocas e de seus autores, e ainda assim fora dos caminhos tradicionais percorridos pelas histórias populares da matemática; eu as desejava capazes de

tratamento independente, e que no entanto tivessem em comum alguns temas e idéias.

Obviamente tais objetivos podem somente ser aproximados. Os tópicos que escolhi são, na ordem em que aparecem neste livro, e também em ordem cronológica, uma apresentação da matemática babilônia, reconstruída por meio dos textos cuneiformes somente durante o último meio-século; a construção por Euclides do pentágono regular, de seus *Elementos*; três pequenos exemplos da matemática de Arquimedes: sua trissecção do ângulo, sua construção do heptágono regular, e sua descoberta do volume e da superfície de uma esfera; e, por fim, a trigonometria grega como é apresentada por Ptolomeu em seu *Almagesto*. Tentei sempre enfatizar quais são as fontes de nosso conhecimento da matemática antiga, e na minha apresentação do material procurei permanecer o mais fiel possível aos textos, desde que isso não seja incômodo ao leitor moderno.

Um tema recorrente nas seleções da matemática grega é o problema de dividir o círculo em um certo número de partes iguais; Euclides consegue obter a divisão em cinco partes iguais usando somente o compasso e a régua, Arquimedes tem que usar ferramentas mais complicadas, e Ptolomeu está interessado em calcular o comprimento da corda que subtende uma parte própria da circunferência do círculo. O sistema numérico babilônio, que era a espinha dorsal da matemática babilônia, é adotada por Ptolomeu como a única maneira razoável de expressar frações (e está desta maneira presente em nossas subdivisões de graus e horas). A influência babilônia pode ser observada na formulação de Euclides para as equações quadráticas, e embora seu método de solução seja aparentemente diferente do dos babilônios, há semelhanças nas duas maneiras de atacar o mesmo problema. Deixarei que o leitor descubra outros fios de ligação entre os quatro capítulos, embora cada um deles possa ser lido separadamente.

Finalmente, desejo fazer duas observações que servem como desculpa, e são um aviso sobre a maneira de escrever os nomes gregos nos três últimos capítulos. Em primeiro lugar, não fiz nenhuma tentativa de ser coerente em sua grafia, mas simplesmente escrevi o que me parecia natural. Se um leitor estiver interessado na maneira grega correta de um certo nome, poderá rapidamente reconstruí-lo, usando minha grafia; a coerência impediria o uso de muitos nomes consagrados, como *Platão, Aristóteles* e *Euclides*. Em segundo lugar, a quantidade de nomes de matemáticos e filósofos gregos que fizeram somente uma ou duas aparições insignificantes em minha história é grande, e poder-se-ia muito bem propor que seus nomes fossem omitidos. Mas sempre que tive a possibilidade de escolher, por exemplo, entre "Estobeu diz que" ou "baseado em fontes antigas", escolhi a primeira alternativa, pois não vejo nenhuma justificativa para a imprecisão, quando ela pode facilmente ser evitada. O leitor que desejar consultar a referência terá sido ajudado por minha escolha, e o que não desejar fazer isso não terá sofrido nenhum prejuízo. Não quis, contudo, tornar as páginas deste livro pesadas com outros detalhes eruditos; de qualquer maneira, vários dos trabalhos citados na bibliografia ao fim do livro contêm referências completas.

É muito estimulante descobrir a maneira de pensar das grandes mentes do passado distante, e nas ciências matemáticas pode-se reconhecer quando a ressonância é obtida com um grau muito mais alto de certeza do que em qualquer outro campo. É um privilégio conduzir outros pelos caminhos percorridos pela primeira vez há tanto tempo, ou, segundo uma bela frase antiga, fazer com que os antigos falem novamente, em seus túmulos. Não há, contudo, nenhum substituto real para a leitura dos próprios matemáticos antigos, e se este livreto conseguir induzir alguns de seus leitores a fazerem isso, terá desempenhado bem sua tarefa.

1. A Matemática da Babilônia

1.1 As fontes

Ao nos referirmos à matemática babilônia, queremos dizer o tipo de matemática cultivada na antiga Mesopotâmia, a região entre os rios Eufrates e Tigres, ou, grosseiramente, o que é hoje o Iraque. Estamos portanto usando o termo "babilônio" em um sentido mais amplo do que o costumeiro nos relatos da história política do Oriente Próximo, nos quais este termo se refere ao estado em torno da cidade da Babilônia.

Até bem pouco tempo, sabíamos da matemática babilônia somente por intermédio de referências esparsas, na literatura grega clássica, aos matemáticos e astrônomos caldeus, isto é, babilônios. Baseando-se nestas referências, supunha-se que os babilônios tinham algum tipo de misticismo numérico ou numerologia; mas hoje sabemos quão longe da verdade se achava tal hipótese.

Ao fim do século dezenove, os arqueólogos começaram a escavar as colinas da Mesopotâmia. Algumas destas colinas se formaram com os detritos das cidades do passado, de vida muito longa. A maioria das casas era construída com tijolos cozidos ao sol (o que acontece ainda hoje), e cada chuva os erodia um pouco. Novas casas eram construídas no mesmo local, e pouco a pouco o nível do solo subia, até que se formaram as colinas. Este processo ainda continua, pois algumas delas estão até hoje coroadas por aldeias habitadas, descendentes diretas das antigas cidades. Assim, se fazemos uma secção reta vertical de uma tal colina, achamos camada após camada de estágios diferentes da mesma cidade, com os mais antigos embaixo.

As escavações das colinas forneceram, entre muitos outros testemunhos das esplêndidas civilizações antigas, milhares de tabletes de argila com inscrições. Foi reconhecido bem cedo que alguns deles lidavam com números, mas somente há uns trinta anos é que se chegou a uma compreensão profunda e apreciação da matemática babilônia.

Dispomos hoje de uns 400 tabletes ou fragmentos de tabletes de conteúdo matemático, que foram cuidadosamente copiados, transcritos, traduzidos e explicados em volumes abrangentes e definitivos. Os próprios tabletes estão guardados em museus e coleções de muitos países; por vezes, partes diferentes do mesmo tablete se encontram em museus diferentes. Um tablete intacto – há somente poucos deles – é mais ou menos do tamanho de uma mão e é feito de argila em geral não cozida. A escrita é chamada *cuneiforme*, isto é, com forma de cunha, pois os símbolos são feitos com marcações simples em forma de cunha, que foram impressas com um estilete sobre o tablete, enquanto ele se achava ainda úmido. A maior parte dos tabletes datam de um par de séculos em torno de 1700 a.C., e os restantes, dos três últimos séculos antes de Cristo (ainda não há explicação satisfatória para a longa pausa entre estes dois grupos). A idade de um tablete matemático deve ser deduzida da camada da colina em que foi achado, ou a partir do estilo da escrita, pois seu conteúdo não fornece nenhuma pista para sua idade. Parece-nos curioso, familiarizados com a evolução explosiva da matemática e das ciências durante o último par de séculos, não somente que a matemática babilônia tenha conservado seu caráter por quese 2000 anos, sob mudanças políticas violentas, mas também que tenha mantido seu conteúdo sempre dentro dos mesmos limites. Não podemos, nos textos disponíveis, reconstituir vestígios de qualquer desenvolvimento (há, contudo, alguns tabletes muito antigos que exibem um estágio primitivo do

sistema numérico babilônio, e pode-se observar uma preferência por exemplos numéricos mais elaborados, nos textos posteriores). Parece, portanto, que a criação da matemática babilônia deu-se com grande rapidez, e que este curto período de crescimento rápido foi seguido por um grande período de estagnação. Quanto aos criadores da matemática babilônia, nada sabemos, a não ser o resultado de seu trabalho.

1.2 O Sistema Numérico Babilônio. Uma Tábua de Multiplicação

Antes de nos aproximarmos da matemática babilônia, devemos familiarizarmonos com o sistema numérico babilônio, pois ele teve, como veremos, uma influência generalizada sobre a natureza da matemática babilônia. Nos dois parágrafos seguintes, tentarei mostrar como foi possível descobrir a estrutura deste sistema, numérico unicamente a partir dos textos, sem nenhum conhecimento prévio. Obviamente é mais fácil fazer isso quando se conhece o resultado final, de maneira que devemos prevenir o leitor quanto à tendência de subestimar as dificuldades enfrentadas pelos estudiosos pacientes que em primeiro lugar desvendaram o caminho que percorreremos.

A Figura 1.1 é uma cópia da frente (anverso) e da parte de trás (verso) de um antigo tablete babilônio. De cada lado a escrita consiste em simples símbolos dispostos em duas colunas, representadas na Figura 1.1 por Col I (à esquerda) e Col II; se contarmos ambos os lados, cada coluna tem 24 linhas, mas por enquanto não levaremos em conta a última linha.
Consideremos a coluna I, a partir do topo. Na primeira linha há uma cunha vertical, na segunda duas cunhas verticais, e na terceira três. É natural interpretá-las como sendo 1, 2, 3. Em verdade, as seis linhas seguintes podem facilmente ser lidas como 4, 5, 6, 7, 8, 9, pois estes são, respectivamente, o

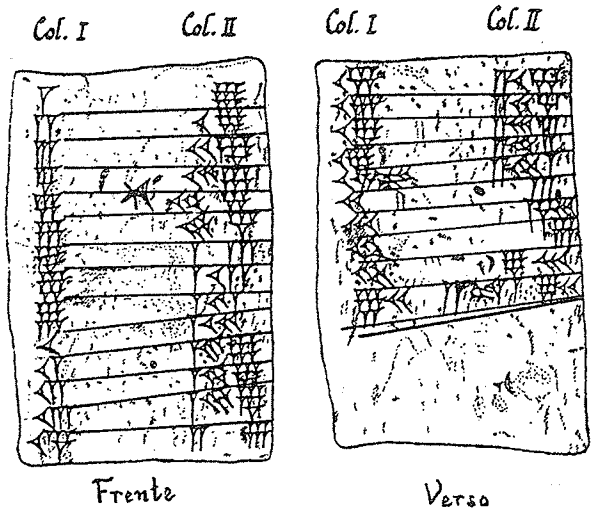

Figura 1.1.

número de cunhas verticais nelas. Observamos, contudo, que estão dispostas em grupos de três – a propósito, isso torna mais fácil lê-las rapidamente – de maneira que, por exemplo, 8 está escrito em três níveis, dois com três cunhas em cada, e um com duas. Após 9, encontramos um novo símbolo, uma cunha angular, em posição horizontal. Se ela for interpretada como sendo 10, as oito linhas seguintes não oferecem nenhuma dificuldade, pois são compostas de uma cunha angular e dos nossos símbolos já decifrados de 1 a 8. Podem portanto ser imediatamente lidas como sendo 11, 12, 13,..., 18. Não nos preocuparemos com a linha seguinte (em verdade, ela contém um sinal especial para 19 e algumas marcas apagadas – mas 19 é geralmente escrito como uma cunha angular e nove cunhas verticais). Nas quatro linhas subseqüentes há respectivamente duas, três, quatro e cinco cunhas angulares, que deveriam significar 20, 30, 40 e 50.

Resumindo o que aprendemos até agora: os números babilônios são construídos usando-se dois símbolos básicos, uma cunha vertical, que representa 1,

e uma cunha angular, que significa 10. A primeira coluna lista simplesmente todos os inteiros até 20, inclusive, seguidos de 30, 40, 50.

Apliquemos então este conhecimento à coluna II. Sem muitas dificuldades, podemos decifrar que as seis primeiras linhas são 9, 18, 27, 36, 45, 54. Podemos agora fazer uma forte hipótese sobre nosso texto, ou seja, que ele é uma tábua de multiplicação por 9. As sétima e oitava linhas deveriam então ser 63 e 72, mas vemos aí uma cunha angular seguida de um 3 e um 12 respectivamente. Obviamente, não funcionará interpretar esta cunha angular como sendo 1. A única coisa que faz sentido é supor que ela representa 60. Transcreveremos estas linhas sob a forma 1,3 e 1,12, e supondo que o primeiro 1 representa 60 teremos:

$$1,3 = 1.60 + 3 = 63 \quad \text{e} \quad 1,12 = 1.60 + 12 = 72.$$

As linhas seguintes podem ser transcritas e interpretadas como

$$1,21 = 81$$
$$1,30 = 90$$
$$1,39 = 99$$
$$1,48 = 108$$
$$1,57 = 117,$$

e todas corroboram nossa hipótese de que este texto é uma tábua de multiplicação por 9. A décima quarta linha contém duas cunhas verticais e um 6, aquilo que transcrevemos como sendo 2,6. Isso deveria representar 14.9 = 126, de maneira que devemos interpretar o 2 inicial como sendo 120 = 2.60. Podemos agora então escrever as linhas seguintes como representando

$$2,15 = 2.60 + 15 = 135$$
$$2,24 = 144$$
$$2,33 = 153$$
$$2,42 = 162$$
$$2,51 = 171,$$

mas a linha seguinte tem somente um 3, que deverá representar 180. Se este 3 estivesse seguido de um símbolo que representasse o zero, ou seja, o que transcreveríamos como 3,0, isto estaria em concordância perfeita com o que achamos até agora, pois 3,0 seria 3.60 + 0, da mesma maneira que 2,15 foi $2.60 + 15 = 135$. Somos assim obrigados a supor que os babilônios não usavam um símbolo que representasse o zero ao fim de um número, mas deixavam ao leitor a tarefa de adivinhar que uma casa vazia extra estava subentendida. Podemos testar esta hipótese duas linhas mais abaixo, onde encontramos, em frente a 40, um 6 que interpretamos como 6,0 ou 6.60 + 0, que é com efeito 40.9. As duas linhas restantes sem explicação em frente a 30 e 50 – ainda não estamos considerando a última – são agora trivialmente lidas como sendo

$$4,30 = 4.60 + 30 = 270 = 9.30$$
$$7,30 = 7.60 + 30 = 450 = 9.50.$$

Vemos assim que o texto faz sentido perfeito se supusermos que os símbolos numéricos[1], ou algarismos, mudam de valor com sua posição, de tal maneira que se movemos um algarismo uma casa para a esquerda, multiplicamos seu valor por 60.

Se analisarmos outros textos da mesma maneira como fizemos com a tábua de multiplicação por 9, esta hipótese é amplamente verificada. Temos, então 59 algarismos, transcritos como 1,2,3,...,59, e escritos como combinações de cunhas angulares e de cunhas verticais. Por meio destes algarismos são escritos

todos os números; isso é conseguido atribuindo importância à posição que um algarismo ocupa, de maneira que, cada vez que um algarismo se move uma casa para a esquerda seu valor se torna 60 vezes maior. Ao transcrever os números babilônios separaremos, em geral, como feito acima, os algarismos por vírgulas. Assim, o número que transcrevemos como 1,25,30 pode significar

$$1.60^2 + 25.60 + 30 = 3600 + 1500 + 30 = 5130.$$

Mas, como dissemos acima em conexão com 20.9 e 40.9, pode ser que devêssemos transcrever o número como sendo 1,25,30,0, ou em verdade, como 1,25,30,0,0, casos em que os valores seriam 60 ou 60 vezes maiores do que 5130, pois

$$1,25,30,0 = 1.60^3 + 25.60^2 + 30.60 + 0 = 60.5130$$

e

$$1,25,30,0,0 = 1.60^4 + 25.60^3 + 30.60^2 + 0.60 + 0 = 60^2.5130.$$

De fato, se nada mais é conhecido, a seqüência de algarismos 1,25,30 pode representar qualquer um dos números 5130.60^n, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$; qual deles, deve ser determinado pelo contexto. Esta não é uma falha tão grande do sistema numérico quanto parece à primeira vista; em geral, não há dúvidas sobre o valor correto.

Os babilônios usaram, por vezes, um símbolo para o zero[2], em textos mais recentes, mas somente para representar o espaço vazio no *interior* de um número, a fim de distinguir, por exemplo, $1,0,30 = 3630$ de $1,30 = 90$. Nos textos mais antigos deixava-se simplesmente um espaço aberto entre o 1 e o 30, ou, mesmo mais simplesmente, não se fazia nada.

Para sermos completos, esclarecemos que a última linha em nossa tábua de multiplicação por 9 diz que

$$8,20 \quad \text{vezes } 1 \quad \text{é } 8,20$$

e é o que chamaríamos de uma *linha de transição*. Nosso texto faz parte de uma série e a linha de transição é a primeira linha do próximo texto.

1.3 O Sistema Numérico Babilônio. Uma tábua de Recíproca

O que apresentamos acima sobre a tábua de multiplicação por 9 é, no entanto, somente parte da história do sistema numérico babilônio. O resto pode ser extraído de um texto que está transcrito, exceto quanto a sua primeira linha, na Figura 1.2. Ele é de um tipo de que encontramos muitos exemplos (tanto da época babilônia mais antiga, quanto da época dos selêucidas[3] diferindo somente em suas primeiras linhas, de maneira que todos contém os números da Figura 1.2. O tablete reproduzido parcialmente na Figura 1.1 contém, entre outras coisas, duas cópias deste tipo de texto.

Col. I	Col. II
2	30
3	20
4	15
5	12
6	10
8	7,30
9	6,40
10	6
12	5
15	4

Col. I	Col. II
16	3,45
18	3,20
20	3
24	2,30
25	2,24
27	2,13,20
30	2
32	1,52,30
36	1,40
40	1,30

Col. I	Col. II
45	1,20
48	1,15
50	1,12
54	1,6,40
1	1
1,4	56,15
1,12	50
1,15	48
1,20	45
1,21	44,26,40

Figura 1.2.

Como nosso primeiro texto, o da Figura 1.2 consiste em números dispostos em duas colunas, Col. I e Col. II. A estrutura desta tábua se torna evidente se

formarmos, linha por linha, o produto dos números da Col. I e seus correspondentes da Col. II, interpretando-os como aprendemos no parágrafo precedente, assim

$$\begin{aligned} 2.39 &= 60 = 1,0 \\ 3.20 &= 60 = 1,0 \\ 4.15 &= 60 = 1,0 \\ 5.12 &= 60 = 1,0 \\ 6.10 &= 60 = 1,0 \\ 8.7,30 &= 60^2 = 1,0,0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Parece que, para todas as trinta linhas, o resultado é sempre alguma potência positiva de 60, e a seleção dos números da Col. I (ou pelo menos a dos que são menores do que 60) fica explicada quando observamos que a Col. I contém precisamente todos os inteiros menores do que 60 que são fatores de alguma potência de 60. A propósito, eles são mais bem caracterizados da seguinte maneira:

A fatorização em primos de 60 é

$$60 = 2^2.3.5,$$

e portanto a de uma potência de 60 é

$$60^n = 2^{2n}.3^n.5^n.$$

Se um inteiro contém um fator primo distinto de 2, 3 e, 5, não pode dividir uma potência de 60^4. Por outro lado, se não contém fatores primos além de 2, 3 ou 5, podemos seguramente achar uma potência de 60 que ele dividirá. O seguinte exemplo representativo tornará isso claro. Tome

$$24 = 2^3.3;$$

a fim de colocar o lado direito sob a forma $2^{2n}.3^n.5^n$ multiplicamo-lo por $2.3.5^5 = 150$, e temos assim

$$24.150 = 2^4.3^2.5^2 = 60^2$$

ou, em notação babilônia

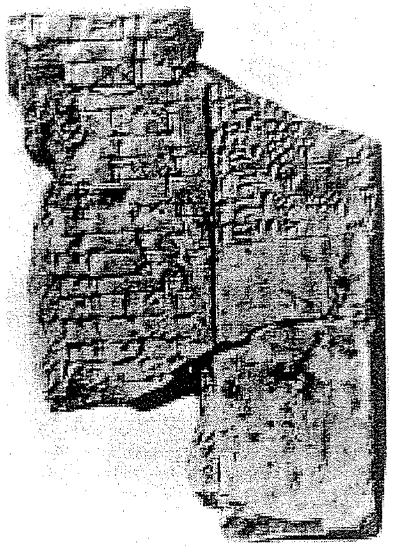

Figura 1.3. Fotografia de um tablete proveniente de Nipur (Sudeste da Babilônia). Um forte traço vertical divide-o em duas partes. À esquerda o professor, ou, como suspeito, um aluno mais avançado, escreveu a tábua de multiplicação por 45 (as últimas sete ou oito linhas se quebraram), e do lado direito um principiante tentou copiar a tábua. Não é necessário ser um perito em escrita cuneiforme para verificar como a mão dele era desajeitada e insegura. Não chegou nem a completar seu trabalho. A tábua do lado esquerdo está transcrita abaixo (os colchetes na transcrição significam simplesmente que reconstrui o que se encontra em seu interior); o grupo de cunhas que significa *a-rá* (vezes) termina por uma cunha vertical que nas últimas linhas poderia ser confundida com 1. A segunda linha contém um erro (2,30 em vez de 1,30).

45 *a − rá* 1	45	[*a − rá* 6]	4,30	[*a*−]*rá* 12	9
[*a − rá* 2]	1,30	[*a − rá* 7]	5,15	[*a*−]*rá* 13	9,45
[*a − rá*] 3	2,15	[*a − rá*] 8	6	[*a*−]*rá* 14	10,30
[*a − rá* 4]	3	[*a − rá*] 9	6,45	[*a*−]*rá* 15	11,15
[*a − rá* 5]	3,45	[*a − rá*] 10	7,30	[*a*−]*rá* 16	1[2]
		[*a − r*]*á* 11	8,15		

$$24.2,30 = 1,0,0$$

em concordância com o texto da Figura 1.2.

Explica-se assim a ausência na Coluna I, de 7, 11, 13, 17, 19, 23, etc., e de seus múltiplos.

Ao estudarmos nossa tábua, vimos que, se lermos, em cada linha, os números como no parágrafo precedente, o produto dos números que nela aparecem, nas duas colunas, é uma potência de 60. Mas aprendemos também que qualquer potência positiva de 60 era escrita, pelos babilônios, como 1. Em verdade, é esta fraqueza aparente do sistema numérico babilônio que fornece a chave para a compreensão correta de nossa tabela, pois sugere a interpretação mais simples de que os produtos dos números na col. I e de seus correspondentes na col. II são sempre 1, em vez de potências distintas de 60, ou seja, em outras palavras, que a col. II dá o recíproco dos números da col. I. Esta interpretação exige, naturalmente, que não mais consideremos as entradas da col. II como sendo inteiros, mas sim como inteiros divididos por uma potência apropriada de 60. Por exemplo, costumávamos interpretar 7,30, que aparece na sexta linha, como sendo o inteiro $7.60 + 30 = 450$, e vemos que multiplicando-o por 8 obtemos 1,0,0 ou 60^2. Se agora 7,30 deve representar $1/8$, seu novo valor deve ser 60 vezes menor. Em outras palavras, em vez de interpretar a sexta linha da col.

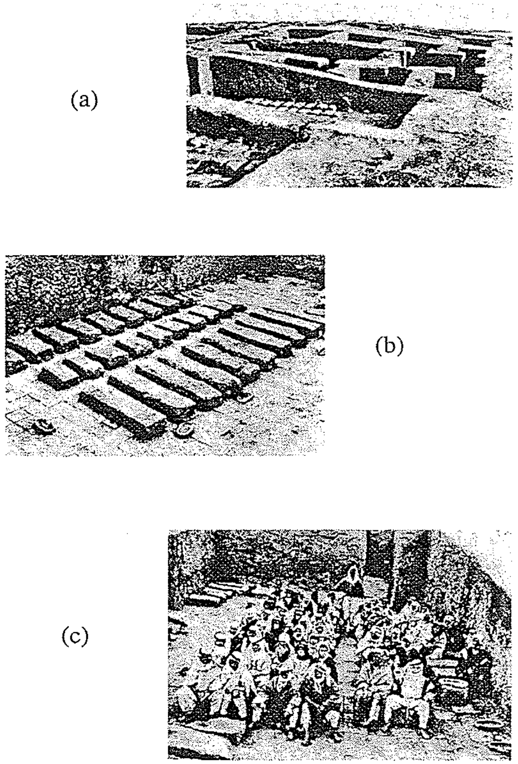

Figura 1.4. Uma sala de aula da Mesopotâmia antiga (Palácio de Mari). (a) mostra duas salas de aula adjacentes, (b) a que está mais bem preservada e que, em (c), está ocupada pelos trabalhadores da expedição.

II da Figura 1.2 como

$$7,30 = 7.60 + 30\,\frac{60^2}{8},$$

a interpretamos agora como sendo

$$\frac{7,30}{60^2} = \frac{1}{8}$$

ou

$$\frac{7.60 + 30}{60^2} = \frac{7}{60} + \frac{30}{60^2}$$

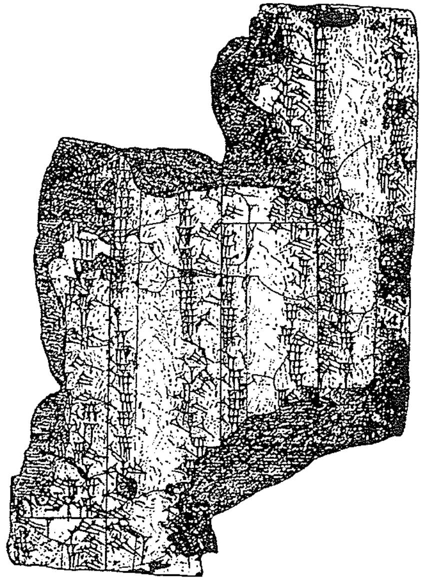

Figura 1.5. O tablete copiado aqui é o verso do da Figura 1.3. É, sem nenhuma dúvida, o trabalho de um estudante, embora mais avançado do que o jovem aluno que escreveu no outro lado. Neste lado há várias cópias de uma tábua de multiplicação e de uma tábua de recíprocos padrão.

que é, com efeito, 1/8. De maneira que agora o 7 em 7,30 representa 7/60 e o 30 representa $30/60^2$.

Semelhantemente, o número 44,26,40, que acompanha 1,21 (= 81) na última linha deve ser lido como

$$\frac{44}{60^2} + \frac{26}{60^2} + \frac{40}{60^2}$$

que é igual a 1/81.

Vemos novamente que movimentar um algarismo uma casa para a esquerda aumenta seu valor por um fator de 60 ou, o que é o mesmo, movimentá-lo uma casa para a direita divide seu valor por 60, e que este princípio é usado *mesmo além da casa das unidades.* Este último fato é a novidade importante, pois significa que certas frações podem ser escritas de maneira simples no sistema numérico babilônio.

Mas isso também implica que uma seqüência de algarismos como 1,25,30, que já interpretamos como sendo

$$1.60^2 + 25.60 + 30 = 5130,$$

pode significar agora 5130 vezes 60^k onde k é um número qualquer, positivo, negativo, ou zero. Sempre que tivermos certeza de onde se encontra a casa das unidades – como quase sempre acontece, pelo contexto – separaremos, ao fazermos transcrições, a parte inteira da parte fracionária por um ponto-e-vírgula, por exemplo

$$1,25;30 = 2.60 + 25 + \frac{30}{60} = 85\tfrac{1}{2},$$
$$1;25,30 = 1 + \frac{25}{60} + \frac{30}{60^2} = 1\tfrac{17}{40},$$

e assim sucessivamente. Deve ser enfatizado mais uma vez, no entanto, que nem os ponto-e-vírgulas nem os zeros finais aparecem nos textos originais, mas foram adicionados em nossas transcrições modernas para torná-los mais claros.

Problemas

1.1 Verifique que 44,26,40, com a interpretação acima, é o recíproco de 81. Onde deveria ficar o ponto-e-vírgula;

1.2 Identifique a tábua de multiplicação e a tábua de recíprocos na Figura 1.5 (a tábua de recíprocos principia com a afirmação de que 2/3 de 1 é 0;40). Tente descobrir os erros do aluno.

1.4 Sistemas Numéricos Posicionais

As semelhanças entre nosso próprio sistema numérico e o dos babilônios são várias: nós, como eles, empregamos um número finito de símbolos ou algarismos

(usamos dez) para exprimir todos os inteiros; fazemos também estes algarismos cumprirem sua missão atribuindo importância a suas posições, de modo que com cada mudança de casa para a esquerda, seu valor seja multiplicado por um fator constante (conosco, 10, com os babilônios, 60). Nós, como eles, usamos uma extensão deste princípio para exprimir certas frações (frações decimais em nosso caso) fazendo valer mesmo além da casa das unidades a regra de que a movimentação de um algarismo uma casa para a direita significa dividir seu valor pelo fator constante 10, ou 60. A propósito, os números 10 e 60, que desempenham um papel tão crucial, são chamados as *bases* dos dois sistemas numéricos, que são designados respectivamente por sistema *decimal* e *sexagesimal*; e da mesma maneira que falamos de *frações decimais*, chamamos suas correspondentes babilônias de *frações sexagesimais.*

As diferenças entre os dois sistemas, ou seja, a base babilônia pouco familiar, 60, e a ausência do equivalente da vírgula decimal no sistema sexagesimal são talvez, à primeira vista, mais óbvias do que as semelhanças, mas são realmente menos importantes. A fim de tornar isso claro, é bom considerar o problema da notação numérica de maneira mais geral.

Não há, obviamente, nada de particularmente marcante sobre os números 10 e 60; a escolha de 10 por nossos antepassados foi simplesmente devida a um acaso biológico, e embora os babilônios também usassem seus dedos para contar, como podemos deduzir de seu símbolo especial para 10, sua escolha de 60 como base teve também motivação fora da matemática, como discutiremos mais tarde nesta secção. Em verdade, não é demasiadamente difícil demonstrar que qualquer inteiro b maior do que 1 pode servir de base de um sistema *posicional*, como chamamos um sistema com as características comuns ao sistema decimal e sexagesimal. Em um tal sistema necessitaremos de b símbolos ou algarismos distintos, cujos valores principais são $1, 2, \ldots, b-1$. Mover um algarismo uma casa para a esquerda significará multiplicar seu valor por b, e movê-lo uma casa para a direita, mesmo além da casa das unidades, significará dividir seu balor por b.

Ilustraremos isso por meio de um exemplo que, por coincidência, adquiriu recentemente importância prática nos computadores eletrônicos, ou seja, o *sistema binário*, onde b é dois. Temos então dois algarismos 0 e 1. Os dez primeiros números inteiros são escritos como segue neste sistema:

$$1,\ 10,\ 11,\ 100,\ 101,\ 110,\ 111,\ 1000,\ 1001,\ 1010.$$

Afim de traduzir o número binário 1001011 em notação decimal observe que

$$1001011 = 1.2^6 + 0.2^5 + 0.2^4 + 1.2^3 + 0.2^2 + 1.2 + 1 = 75.$$

Reciprocamente, se devemos escrever, por exemplo, o número 308 (dado em notação decimal) sob forma binária, observamos que 308 está entre as duas potências consecutivas de 2 a seguir:

$$2^8 = 256 \quad \text{e} \quad 2^9 = 512$$

e desta maneira

$$308 = 2^8 + 52.$$

O número 52 está entre

$$2^5 = 32 \quad \text{e} \quad 2^6 = 64$$

de maneira que

$$52 = 2^5 + 20.$$

Semelhantemente

$$20 = 2^4 + 4 = 2^4 + 2^2,$$

e desta maneira

$$\begin{aligned} 308 &= 2^8 + 2^5 + 2^4 + 2^2 \\ &= 1.2^8 + 0.2^7 + 0.2^6 + 1.2^5 + 1.2^4 + 0.2^3 + 1.2^2 + 0.2 + 0; \end{aligned}$$

isso, escrito sob forma binária, se torna 100110100.

A notação numérica posicional se presta particularmente bem aos cálculos aritméticos; e jaz aí sua importância. Tudo o que é necessário fazer é aprender, de uma vez por todas, as tábuas que dão os produtos e as somas de dois números quaisquer de um algarismo; o resto é efetuado segundo os métodos computacionais familiares da escola elementar.

Voltando ao nosso exemplo binário, as tábuas de multiplicação e adição são as mais simples possíveis:

$$\begin{array}{c|cc} \cdot & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c|cc} + & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 10. \end{array}$$

Conseqüentemente, uma multiplicação binária é efetuada como segue

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & 1 & 0 & 1 \\ & & & & 1 & 1 & 0 \\ \hline & & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 1 & 0 & 1 & \\ & 1 & 1 & 0 & 1 & & \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

Problema

1.3 Verifique esta multiplicação traduzindo-a em notação decimal.

O fato de que o sistema binário se tornou popular ultimamente no mundo dos computadores se deve a duas de suas características: ele usa somente dois algarismos, e isso concorda bem com as duas coisas que uma lâmpada pode fazer – estar acesa ou apagada; e suas tábuas de adição e multiplicação são facilmente ensinada a uma máquina. O preço que se paga por esta simplicidade é o comprimento bem grande de números razoavelmente pequenos; por exemplo, $1024 = 2^{10}$ já exige onze algarismos.

Podemos voltar agora às diferenças evidentes entre os sistemas sexagesimal e decimal; deveria estar claro que a base 60, embora pouco familiar, funciona tão bem como a base 10. Certamente cada base tem suas vantagens e desvantagens; uma desvantagem óbvia da base maior 60 é que uma tábua de multiplicação terá dimensões 59 por 59, o que praticamente proíbe sua memorização; por outro lado, é possível escrever números bem grandes com poucos algarismos sexagesimais.

Outra vantagem da base babilônia é que mais frações podem ser escritas como frações sexagesimais finitas do que como frações decimais finitas. Em verdade, já descrevemos tais frações na secção sobre a tábua de recíprocos, mas parece natural fazer a pergunta mais geral:

Quando é que uma fração *reduzida* p/q (isto é, uma fração sem fatores comuns ao denominador e numerador) tem desenvolvimento finito em um sistema numérico de base b?

Observamos em primeiro lugar que uma fração decimal finita pode ser considerada como uma fração cujo denominador é uma potência de 10, e uma fração sexagesimal finita como uma cujo denominador é uma potência de 60. Semelhantemente, uma fração finita em qualquer outro sistema numérico de base b é uma fração cujo denominador é uma potência de b. Nosso problema é então: quando é que uma fração *reduzida* p/q pode ser transformada em uma fração com denominador b^n? Como podemos mudar o denominador de uma fração reduzida somente multiplicando tanto o numerador quanto o denominador por um inteiro, a resposta é: p/q pode ser transformada em uma fração p'/b^n precisamente se o denominador contém somente fatores primos que também aparecem em b^n e portanto em b.

Assim, como 2 já é primo, as únicas frações reduzidas que podem ser escritas como frações binárias finitas são aquelas cujos denominadores já são potências de 2. As que podem ser transformadas em frações decimais finitas são aquelas cujos denominadores não possuem outros fatores primos além de 2 e 5, pois $10 = 2.5$. Mas como $60 = 2^2.3.5$, os fatores primos permissíveis para desenvolvimentos sexagesimais finitos são 2, 3 e 5. Assim, se considerarmos os denominadores $2, 3, 4, \ldots, 20$, somente quatro deles fornecerão frações binárias finitas, sete darão decimais finitas equivalentes, e treze terão desenvolvimentos sexagesimais finitos.

Problema

1.4 Dos números $2, 3, 4, \ldots, 20$, que têm recíprocos com desenvolvimentos binários finitos, quais os que possuem desenvolvimentos decimais finitos, e quais os que têm recíprocos com desenvolvimentos sexagesimais finitos?

A outra grande diferença, ou seja, a ausência do equivalente à vírgula decimal é, certamente, uma falha no sistema sexagesimal. No entanto, não é tão séria quanto pode parecer à primeira vista. É suficiente lembrar-nos que, quando estamos lidando com multiplicações ou divisões de frações decimais, a primeira coisa que fazemos é esquecer as vírgulas decimais; em verdade, elas não têm influência sobre a seqüência dos algarismos do resultado, mas controlam somente sua grandeza. Em verdade, quando usamos uma régua de cálculo ou procuramos o logaritmo de um número, estamos em situação não muito diferente da dos babilônios, pois obtemos em primeiro lugar os algarismos da resposta e temos então que decidir sobre a posição da vírgula decimal. De qualquer maneira, esta deficiência é um pequeno preço a pagar em troca da enorme vantagem de que as operações com frações são em geral não mais complicadas do que as operações com os inteiros.

A origem do sistema sexagesimal não pode ser definida com certeza. A seguir, uma descrição muito simplificada de uma explicação plausível. Sabemos que havia nos tempos primitivos vários sistemas de pesos e medidas, entre eles um em que a maior unidade era 60 vezes a menor. Era costume escrever uma medida de, digamos, setenta e duas unidades menores, como um 1 grande seguido de um 12 pequeno; isso representava uma unidade grande e doze unidades pequenas. Mas esta idéia, de que a quantidade de unidades grandes era escrita com um símbolo grande, era também usada quando a razão de uma unidade grande para uma pequena era diferente de 60 (por exemplo, em alguns textos antigos 100 é por vezes escrito com um 10 grande). Cada um destes métodos tinha em si o germe de um sistema posicional; com efeito, depois de algum tempo os caracteres grandes tenderiam a ser escritos em tamanho ordinário, e então tudo o que é necessário é alguém com a idéia brilhante de estender ousadamente o princípio posicional a várias posições. O fato de que o número 60 desempenhou papel importante talvez esteja relacionado com o fato de que a principal unidade de peso de prata – o *mana* – estava sub-dividida em 60 *shekels*. Isso pode ter dado o impulso à consideração dos sessenta avos como subdivisões naturais das unidades, por um lado – e daí as frações sexagesimais – e por outro, à preferência geral por 60.

Deveria ser acrescentado que um uso inteiramente consistente do sistema sexagesimal só se encontra em textos matemáticos e astronômicos, e mesmo nestes últimos podem-se achar números escritos como, por exemplo, i-*me* 15 (significando *cento* e quinze) em vez de 1,55. Na vida prática, os babilônios mostravam o mesmo desprezo profundo pela racionalidade em seu uso das unidades de pesos e medidas que o mundo moderno dos povos de língua inglêsa.

1.5 A Artimética Babilônia

Vimos, no parágrafo precedente, que uma desvantagem de uma base grande como 60 é o tamanho desconfortável das tábuas de multiplicação que mostram os produtos de dois números quaisquer de um algarismo. Treme-se ao imaginar os pobres alunos babilônios tentando memorizar uma tal tábua de dimensões 59 por 59, e sentimos alívio de saber que havia grande quantidade de tábuas de vários tipos, incluindo as de multiplicação; de maneira que se torna claro que uma tal memorização era desnecessária.

Isso não quer dizer que temos tábuas contendo os 59 vezes 59 produtos. O que encontramos são muitas tábuas do tipo discutido na Secção 1.2 - que era a tábua de multiplicação por 9 – dispostas segundo múltiplos de p;

$$\begin{array}{cc} 1 & p \\ 2 & 2p \\ 3 & 3p \\ \vdots & \vdots \\ 19 & 19p \\ 20 & 20p \\ 30 & 30p \\ 40 & 40p \\ 50 & 50p, \end{array}$$

e por vezes terminando com p^2. Chamamos p de *número principal* da tábua de multiplicação. Com ela, qualquer múltiplo de p pode ser facilmente achado $-47p$ é simplesmente a soma de $40p$ mais $7p$, que estão ambos tabulados.

Poderíamos pensar que havia cinqüenta e nove de tais tábuas, com $p = 1, 2, 3, \ldots, 59$. Mas o que vemos realmente é uma seleção de números principais que é, à primeira vista, bem estranha. Temos, por exemplo, uma tábua de multiplicação com $p = 44, 26, 40$, um número enorme, mas nenhuma para $p = 17$.

É a presença deste curioso número principal 44,26,40 que faz com que as peças do quebra-cabeças se encaixem, pois 44,26,40 é o último número da tábua padrão de recíprocos discutida na Secção 1.3. Parece que os números principais eram essencialmente os números que encontramos em uma tábua de recíprocos padrão. Uma exceção é 7 que, bem naturalmente, aparece como número principal, embora esteja ausente das tábuas de recíprocos, e desta maneira o produto de dois números quaisquer pode ser facilmente achado. A coincidência virtual entre os números principais e os números da tábua de recíprocos nos fornece uma pista para a maneira como os babilônios realmente calculava. É bem claro que a tábua de recíprocos combinada com estas tábuas de multiplicação servia também para divisões, pois a dividido por b é a multiplicado pelo recíproco de b, ou

$$\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b} \cdot$$

Em nosso sistema decimal temos várias regras e atalhos que facilitam os cálculos, tais como: para multiplicar por 5 divida por 2 e multiplique o resultado por 10; um número é divisível por 3 (ou 9) se a soma de seus algarismos é divisível por 3 (ou 9). Trabalhando-se sistematicamente com o sistema sexagesimal, descobrem-se logo várias destas técnicas simples; a razão de que são possíveis muito mais regras na base sexagesimal do que no sistema decimal é porque a base 60 tem muitos divisores.

Problema

1.5 Tente descobrir e formular regras para multiplicar e dividir por 6 no sistema sexagesimal.

Os cálculos sexagesimais eram além disso auxiliados por uma grande variedade de tábuas. Encontramos tábuas de recíprocos ampliadas - que dão até mesmo os recíprocos com várias casas decimais – de números como 7 e 11, cujos

recíprocos não possuem desenvolvimentos sexagesimais finitos. Há tábuas para o cálculo de juros compostos (a taxas exorbitantes, por exemplo, de 20% ao ano), tábuas de quadrados e de raízes quadradas, de cubos, e várias tábuas bem complicadas, que indicam um interesse em processos numéricos muito além das exigências da aritmética simples.

Fica assim perfeitamente claro que os babilônios não encontravam mais dificuldades com o cálculo aritmético do que nós, hoje. Neste aspecto, eles foram únicos no mundo clássico, e não é portanto surpreendente que, quando a astronomia grega atingiu um estágio em que cálculos extensos eram necessários, os astrônomos gregos – como veremos mais tarde com Ptolomeu – voltaram-se para o sistema sexagesimal a fim de acharem uma maneira sensata de escrever frações. Esta é a razão porque um emprego especial das frações babilônias foi conservado continuamente vivo e é usado até hoje, por exemplo, na subdivisão de graus e horas, as unidades para a medida das duas quantidades básicas observadas na astronomia clássica, ou seja, os ângulos e o tempo. Inconsistentemente, os gregos escreviam a parte inteira destas medidas em seu próprio sistema, e o mesmo fazemos nós quando escrevemos, por exemplo, $120°12'20''$. Poucos percebem que, ao dizermos que são duas horas 30 minutos e 10 segundos da tarde[5], estamos em verdade usando a linguagem dos babilônios de 4000 anos atrás, os quais, de maneira algo mais simples, teriam dito que se passaram 2;30,10 horas desde o meio dia[6].

1.6 Três Textos Matemáticos Babilônios

A apresentação de uma visão completa da matemáica babilônia está claramente além do escopo deste livro, mas os seguintes três textos podem dar ao leitor algum sentimento sobre sua natureza. Os dois primeiros mais antigos são da Babilônia, isto é, dos séculos em torno de 1700 a.C. e o último é selêucida, isto é, dos três últimos séculos a.C. Como já mencionado, as datas não podem ser deduzidas do contexto, e nestes casos o estilo fornece a época.

Os textos matemáticos cuneiformes estão geralmente divididos em duas classes, textos de tabelas e textos de problemas, embora a fronteira entre os dois tipos não seja de nenhuma maneira nítida. A tábua de multiplicação por 9 e a tábua de recíprocos são exemplos perfeitos de textos de tabelas. Um texto de problemas consiste freqüentemente de muitos problemas de tipo semelhante, pedagogicamente dispostos em ordem de dificuldade crescente. Os exemplos A e C a seguir foram selecionados de dois de tais textos, cada um deles com muitas secções.

A. *Equações Quadráticas.* Apresentaremos aqui a tradução livre da sexta e sétima secção de um tablete[(7)] que contém vinte e quatro secções. O tablete é da Babilônia antiga. Os ponto-e-vírgulas foram adicionados na tradução, mas veremos que não há nenhuma dúvida possível quanto a suas posições.

(1) Somei a área e dois terços do lado de meu quadrado, e o resultado é 0.35. Tome 1, o "coeficiente". Dois terços de 1, o coeficiente, é 0;40. Metade disso, 0;20, você multiplicará por 0;20 [e o resultado], que é 0;6,40, você adicionará a 0;35, e [o resultado], 0;41,40, tem raiz quadrada 0;50. Multiplique 0;20 por ele próprio e subtraia [o resultado] de 0;50, e 0;30 é [o lado] do quadrado.

Este exemplo enuncia e acha a solução da equação quadrática

$$x^2 + \frac{2}{3}x = 0;35$$

2/3 é escrito com um símbolo especial, e o primeiro paso é converter 2/3 em seu equivalente sexagesimal 0;40. Se seguirmos a solução passo a passo, seremos conduzidos ao que escreveríamos como

$$x = \sqrt{\left(\frac{0;40}{2}\right)^2 + 0;35} - \frac{0;40}{2} = 0;30.$$

Com efeito, a solução positiva de

$$x^2 + px = q$$

é, segundo a fórmula quadrática,

$$x = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q} - \frac{p}{2}.$$

Problema

1.6 Mostre que esta expressão é equivalente a uma das soluções de $x^2 + px = q$ fornecidas pela fórmula quadrática.

(2) Adicionei sete vezes o lado de meu quadrado a onze vezes sua área, e o resultado é 6;15. Tome 7 e 11. Multiplique 11 por 6;15 e [o resultado] é 1,8;45. Divida 7 por 2 [e obtenha 3;30]. Multiplique 3;30 por 3;30. Adicione [o resultado] 12;15 a 1,8;45 e [o resultado] 1,21 tem raiz quadrada 9. Subtraia 3;30, que você multiplicou por ele próprio, de 9, e você obtém 5;30.
O recíproco de 11 não divide. O que devo multiplicar por 11 para que o resultado seja 5;30? 0;30 é seu fator. 0;30 é [o lado do] quadrado.

Temos aqui uma solução da equação quadrática

$$11x^2 + 7x = 6;15.$$

A multiplicação por 11 tem como resultado transformá-la em uma equação quadrática em $11x$:

$$(11x)^2 + 7.(11x) = (6;15) \cdot 11 = 1,8;45$$

em que o coeficiente do termo quadrático é 1.

A equação

$$u^2 + 7u = 1,8;45$$

é resolvida agora da mesma maneira que no Exemplo A(1); assim

$$u = \sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2 + 1,8;45} - \frac{7}{2} = 5;30,$$

e de

$$11x = u = 5;30$$

obtemos

$$x = 0;30.$$

Esta última divisão por 11 não pode ser efetuada de maneira usual, ou seja, usando a multiplicação pelo recíproco de 11, pois "o recíproco de 11 não divide", isto é, não tem equivalente sexagesimal finito.

Observamos, em primeiro lugar, que estes problemas não têm nada de prático. O fato de que nos é pedido que adicionemos áreas e comprimentos mostra claramente que nenhuma situação geométrica real está sendo considerada. Em verdade, o termo "quadrado" não possui nenhum significado geométrico a mais do que o usado em nossa álgebra.

Observamos, além disso, que não é dada nenhuma fórmula geral ou teorema, como nossa fórmula quadrática, que resolver de uma vez por todas qualquer equação quadrática, e isso é geralmente válido para toda a matemática babilônia. Contudo, as instruções são tão específicas que temos certeza do processo geral; e, após ter resolvido uma grande quantidade de problemas, não haverá mais nenhuma dúvida.

Não existe, contudo, nenhuma indicação explícita de como se descobriram estas regras matemáticas implícitas. Somente com os gregos é que a noção de

demonstração de um teorema passa a desempenhar o papel central que sempre ocupou, a partir daí, na matemática.

B. *A Diagonal de um Quadrado.* A Figura 1.6a é uma cópia, e a Figura 1.6b uma tradução de um pequeno tablete[(8)] da Babilônia antiga.

Vemos três números

$$a = 30$$
$$b = 1,24,51,10$$
$$c = 42,25,35.$$

Observamos primeiramente que

$$c = a \cdot b$$

se introduzirmos os ponto-e-vírgulas nos locais apropriados, pois multiplicar por 30 é essencialmente a mesma coisa que dividir por 2. Se a representar o lado de um quadrado, como sugerido pela figura, e c a diagonal, então, pelo teorema de Pitágoras, $c^2 = 2a^2$ e $c = a\sqrt{2}$, de maneira que b deveria ser uma aproximação de $\sqrt{2}$, isto é, se for interpretado como 1;24,51,10. Isso é de fato correto, pois

$$(1;24,51,10)^2 = 1;59,59,59,38,1,40$$

que é muito próximo de 2.

Assim, o que o tablete nos diz é que se o lado do quadrado é $a = 30$, então sua diagonal é $c = 42;25,35$, e fornece também uma aproximação excelente de $\sqrt{2}$.

Aprendemos assim, com este simples tablete, com somente uma figura e três números sobre ele, que os babilônios sabiam que a diagonal de um quadrado é $\sqrt{2}$ vezes seu lado; isso implica que eles tinham conhecimento pelo menos de um caso especial do que costumamos hoje chamar de teorema de Pitágoras –

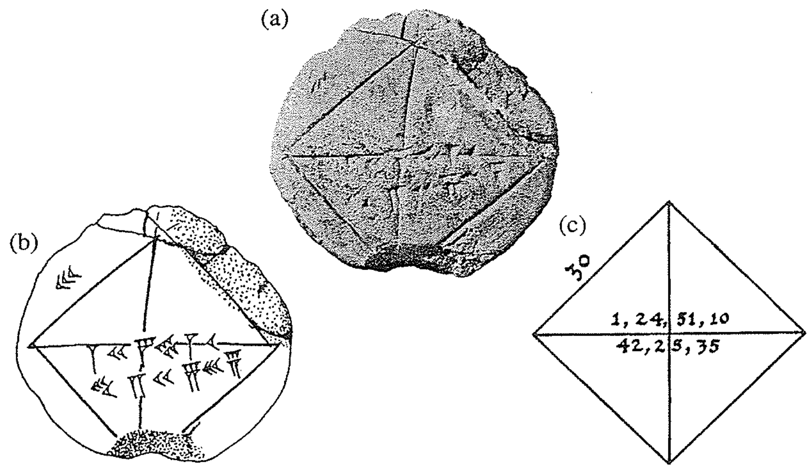

Figura 1.6.

isso aconteceu uns 1200 anos antes da época em que acreditamos que Pitágoras viveu – e por meio de outros textos (por exemplo, C a seguir) podemos ver que eles realmente usavam este teorema em sua forma mais geral. Além disso, aprendemos que os babilônios possuiam técnicas aritméticas suficientes para obterem uma excelente aproximação para $\sqrt{2}$.

C. *A Área de um Trapézio.* Temos a seguir a terceira das sete seções preservadas de um tablete[(9)] – seu reverso foi destruído – do período selêucida.

[em] Um trapézio 30 é o comprimento, 30 o segundo comprimento, 50 a largura superior, 14 a largura inferior. 30 vezes 30 é 15,0. Subtraia 14 de 50 e o resto é 36. Metade disso é 18. 18 vezes 18 é 5.24. Subtraia 5,24 de 15,0 e o resultado é 9,36. O que deveríamos multiplicar por si próprio para que o resultado seja 9,36? 24 vezes 24 é 9,36. 24 é a reta divisora. Adicione 50 e 14, as larguras, e [o resultado é] 1,4. Metade disso é 32. Multiplique por 24, a reta divisora, por 32, e [o resultado] é 12,48...

O resto da secção é dedicado a uma mudança de unidades de medida.

Este exemplo trata de achar a área de um trapézio isósceles de dimensões (veja a Figura 1.7)

$$1 = 30 \qquad w_1 = 50 \qquad w_2 = 14$$

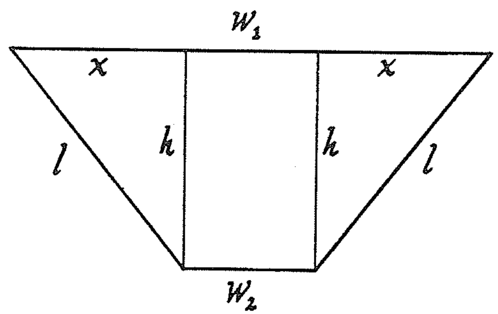

Figura 1.7.

O primeiro passo é achar o que na figura chamamos de x

$$x = \frac{w_1 - w_2}{2} = \frac{50 - 14}{2} = 18.$$

Em seguida a altura h – a "reta divisora" do texto – é determinada por meio do teorema de Pitágoras:

$$h = \sqrt{\ell^2 - x^2} = \sqrt{15,0 - 5,24} = \sqrt{9,36} = 24.$$

Finalmente a área é calculada segundo a fórmula correta:

$$A = h \cdot \frac{w_1 + w_2}{2} = 24.32 = 12,48.$$

1.7 Resumo

A matemática babilônia emerge, do grande número de textos, como uma criação de traços bem definidos, dos quais o leitor já vislumbrou alguns; a espinha dorsal da estrutura é o sistema posicional sexagesimal, que tornou os babilônios excelentes calculistas, e não é portanto surpreendente que os matemáticos babilônios mostrassem uma forte preferência pelo que chamaríamos hoje de álgebra e teoria dos números. Embora exista uma quantidade considerável de conhecimento geométrico, a geometria freqüentemente serve unicamente como disfarce para problemas essencialmente algébricos. Vimos isso nos exemplos A da Secção 1.6, em que áreas e comprimentos são adicionados, violando o sentido geométrico; e sempre que um problema geométrico é formulado, isso é feito com a finalidade de explícita de calcular alguma quantidade numérica, seja comprimento, área ou volume. Além disso, não há exemplos de teoremas, formulados com alguma generalidade, embora alguns dos exemplos resolvidos, dos quais deduzimos os processos gerais, sejam dados com tantos detalhes que o passo para um teorema é bem curto. Finalmente, nunca encontramos uma demonstração explícita nos textos matemáticos babilônios.

O método de transmitir o conhecimento matemático de geração em geração era portanto inteiramente diferente do empregado na matemática moderna, no entanto, ele talvez não pareça tão estranho a quem tiver sido submetido a um curso de álgebra de estilo antigo na escola secundária, em que se aprendiam, por exemplo, equações quadráticas resolvendo um grande número de exemplos com vários coeficientes, em vez de enunciar e demonstrar um teorema que mostrasse de uma vez por todas como resolver qualquer equação quadrática que pudesse aparecer. De fato, como vimos, os textos de problemas são exatamente tais longas listas de variações em torno de um tema central.

Após este resumo grosseiro da natureza geral da matemática babilônia, voltamo-nos agora para uma descrição sucinta de seu conteúdo.

Em álgebra, encontramos as soluções de equações do primeiro e segundo graus. As equações quadráticas são freqüentemente dadas sob a forma equivalente de duas equações com duas incógnitas, tais como

$$x + y = a, \quad xy = b,$$

das quais vemos imediatamente que x e y são as soluções de

$$z^2 - az + b = 0.$$

Eram resolvidas até mesmo equações especiais do terceiro grau, da forma

$$x^2(x+1) = a.$$

Os problemas são freqüentemente enunciados de tal maneira que, quando traduzidos para a notação algébrica moderna, surgem expressões extremamente complicadas, com parênteses encaixados, e não se pode deixar de ficar impressionado com a habilidade dos babilônios, que conseguiam reduzir tais expressões a formas padrões de equações, sem a ajuda de nossas técnicas algébricas. A propósito, achamos vários exemplos de textos de problemas em que diferentes problemas fornecem a mesma resposta; isso é semelhante ao hábito moderno de dar as respostas ao fim do livro.

Quanto ao conhecimento geométrico, reconhecemos em primeiro lugar um uso sem restrições do chamado teorema de Pitágoras, e desta maneira sua descoberta precede Pitágoras de um milênio e meio. Há, além disso, as fórmulas corretas para as áreas de figuras geométricas simples, como triângulos e trapézios (veja o exemplo C, Secção 1.6), e aproximações grosseiras da área e perímetro de um círculo (usando $\pi \sim 3$), embora alguns textos encontrados recentemente, que estão sendo publicados, indiquem o uso de valores melhores para π. E encontramos fórmulas, algumas corretas e outras não, para os volumes de vários sólidos.

Mencionemos enfim um texto que, talvez mais do que qualquer outro, mostra o alto grau de sofisticação atingido pela matemática babilônia. Foi publicado em 1945(10) e trata do que chamamos números pitagóricos. Um terno de números inteiros, tais como 3, 4, 5 ou 5, 12, 13, que representam os lados de um triângulo retângulo é chamado de um *terno de números pitagóricos*; em outras palavras, é uma solução, com números *inteiros* positivos, da equação

$$x^2 + y^2 = z^2.$$

É natural perguntar quantos de tais ternos existem, e como podem ser encontrados. Naturalmente, a partir do terno 3, 4, 5 podemos imediatamente formar infinitamente muitos outros ternos pitagóricos, ou seja $3n$, $4n$, $5n$, onde $n = 2, 3, 4, \ldots$, mas isso é tão óbvio que os contamos como um, representado por 3, 4, 5 e chamado de terno *reduzido*. Há um teorema que afirma que:

Se p e q tomam todos os valores inteiros, restritos somente pelas condições

1) $p > q > 0$
2) *p e q não possuem divisor comum (distinto de 1)*
3) *p e q não são ambos ímpares*

então as expressões

$$x = p^2 - q^2$$
$$y = 2pq$$
$$z = p^2 + q^2,$$

fornecerão todos os ternos pitagóricos reduzidos, e cada terno somente uma vez.[11]

Exemplos:

$p = 2, \quad q = 1$ fornece $x = 3 \quad y = 4 \quad z = 5$

$p = 3 \quad q = 2$ fornece $x = 5 \quad y = 2 \quad z = 13$

É claro que os babilônios conheciam alguma forma deste teorema, pois no texto em questão, Plimpton 322, achamos uma lista, de quinze linhas, dos valores correspondentes z^2/y^y, x, z onde x, y, z são ternos de números pitagóricos reduzidos. Os números envolvidos são tão grandes (por exemplo $x = 3, 31, 49$, $y = 3, 45, 0$, $z = 5, 9, 1$) que os métodos de ensaios e erros estão excluídos. O método específico de construção da tabela e seu uso ainda são assuntos controvertidos; isso acontece, pelo menos parcialmente, porque o lado esquerdo do tablete, que sem dúvida continha pistas importantes, está quebrado.

Problemas

1.7 Dado $x = 100$, quantos inteiros positivos y e z podem ser achados de tal maneira que x, y e z formem um terno pitagórico reduzido, com

$$x^2 + y^2 = z^2\,?$$

Responda à mesma pergunta com $x = 210$, $x = 420$, $x = 35$.

1.8 Reconstrua a tabela sexagesimal, de que vemos um fragmento na Figura 1.8. A tabela não é uma tradução de um texto antigo, mas é muito útil para a prática intensa com o sistema sexagesimal.
Este exercício imita um problema comum com que se deparam os estudiosos dos textos antigos; o destino é geralmente pouco generoso com o que nos lega.

Eis aí, como afirmado, um breve resumo do conteúdo da matemática babilônia. É talvez apropriado perguntar-se aqui qual o estado do conhecimento

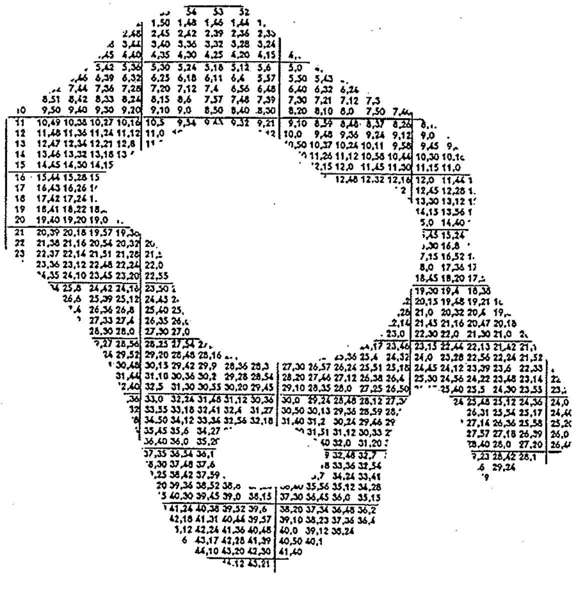

Figura 1.8.

matemático na outra grande cultura contemporânea, a egípcia. Há dois papiros matemáticos preservados, o *Papiro Rhind*, e o *Papiro de Moscou*, que nos dão uma idéia do caráter e do conteúdo da matemática egípcia. O resultado é muito desapontador, pois, contrariametne a todas as lendas, a matemática egípcia nunca conseguiu ultrapassar um estágio extremamente elementar. O conhecimento geométrico dos egípcios era, se estivermos lendo corretamente os textos, mais ou menos o dos babilônios, com uma omissão importante: o teorema de Pitágoras. Mesmo a afirmação freqüentemente repetida de que os egípcios conheciam o triângulo retângulo de lados 3, 4, 5 não se baseia nos textos disponíveis, mas foi inventada uns 80 anos atrás. Fora da geometria, eles não ultrapassaram a aritmética elementar. A explicação disso é, sem dúvida, que eles tiveram a idéia natural mas infeliz de admitir somente frações com numerador 1, isto é, frações da forma $1/n$, com uma exceção, ou seja $2/3$. Assim, eles representariam

$$\frac{2}{5} \text{ como } \frac{1}{3} + \frac{1}{15} \quad \text{ou} \quad \frac{9}{10} \text{ como } \frac{2}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{30}$$

enquanto que os babilônios escreveriam 0;24 ou 0;54. É portanto pouco surpreendente que as adições e multiplicações, simples trivialidades para os babilônios, permaneceram problemas de complexidade máxima para os egípcios. Os gregos herdaram este estilo egípcio, mas Ptolomeu, o astrônomo, antes de empreender cálculos sérios em seu Almagesto, afirma que: "em geral usaremos o sistema numérico sexagesimal devido à inconveniência das frações."

A redescoberta recente da matemática babilônia não somente aumentou diretamente nosso conhecimento do passado, mas nos forçou mesmo a uma reavaliação da matemática grega; com efeito, percebemos agora, por um lado, como os matemáticos gregos deviam muito aos seus precursores babilônios; e por outro, como o que era julgado ser produto da decadência da matemática grega era, em verdade, uma continuação direta da antiga tradição oriental. No entanto, a velha afirmação de que a matemática principiou com os gregos é ainda verdadeira, embora em um sentido mais restrito; pois foram eles que deram um papel central à formulação e demonstração de teoremas, dando assim à matemática a forma que ela conserva até hoje.