MAT6682 - Tópicos de Análise Funcional - 2023
Lista 6

1. Construção de Sequências Básicas. Bases Equivalentes

1. Sejam X um espaço de Banach e $\varepsilon > 0$. Prove as seguintes afirmações:

a) Se $(x_n^*)_{n\geq 1}$ é uma sequência em X^* tal que $x_n^* \xrightarrow{w^*} 0$ e $x_n^* \overset{\|\cdot\|}{\not\to} 0$, então $(x_n^*)_{n\geq 1}$ admite uma subsequência básica com constante básica menor ou igual a $1+\varepsilon$.

b) Se $(x_n)_{n\geq 1}$ é uma sequência em X tal que $x_n \xrightarrow{w} 0$ e $x_n \overset{\|\cdot\|}{\not\to} 0$, então $(x_n)_{n\geq 1}$ admite uma subsequência básica com constante básica menor ou igual a $1+\varepsilon$.

2. Seja X um espaço de Banach de dimensão infinita com dual separável. O objetivo deste exercício é provar que X possui uma sequência básica contrátil.

a) Dada $(x_n^*)_{n\geq 1}$ uma sequência densa em $X^* \setminus \{0\}$, construa recursivamente uma sequência $(x_n)_{n\geq 1}$ em S_X satisfazendo $x_m \in \bigcap_{n=1}^{m} \operatorname{Ker}(x_n^*)$ e $\|x\| \leq (1+2^{-m})\|x+\lambda x_{m+1}\|$ para todos $m \geq 1$, $x \in \operatorname{span}\{x_1,\dots,x_m\}$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Conclua que $(x_n)_{n\geq 1}$ é uma sequência básica.

b) Mostre que $(x_n)_{n\geq 1}$ é contrátil.

3. Considere a sequência $(f_n)_{n\geq 0}$ em $C[0,1]$, onde $f_n(t) = t^n$ para cada $n \geq 0$. Prove as seguintes afirmações:

a) Se $(\alpha_n)_{n\geq 0}$ é uma sequência de escalares tal que $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n f_n = 0$, então $\alpha_n = 0$ para todo $n \geq 0$.

b) $(f_n)_{n\geq 0}$ não é sequência básica. (*Sugestão:* calcule $\|f_n - f_{n+1}\|_\infty$.)

c) $(f_n)_{n\geq 0}$ admite subsequência básica.

4. Sejam X e Y espaços de Banach e $(x_n)_{n\geq 1}$, $(y_n)_{n\geq 1}$ bases de Schauder de X e de Y, respectivamente. Mostre que $(x_n)_{n\geq 1}$ e $(y_n)_{n\geq 1}$ são equivalentes se, e somente se, existem constantes $0 < C_1 \leq C_2$ sastisfazendo

$$C_1 \left\| \sum_{n=1}^{m} \alpha_n y_n \right\| \leq \left\| \sum_{n=1}^{m} \alpha_n x_n \right\| \leq C_2 \left\| \sum_{n=1}^{m} \alpha_n y_n \right\|$$

para todos $m \geq 1$ e $\alpha_1,\dots,\alpha_m \in \mathbb{K}$.

5. Sejam X e Y espaços de Banach e $(x_n)_{n\geq 1}$, $(y_n)_{n\geq 1}$ bases de Schauder de X e de Y, respectivamente. Suponha que $(x_n)_{n\geq 1}$ e $(y_n)_{n\geq 1}$ sejam equivalentes. Prove as seguintes afirmações:

a) $(x_n)_{n\geq 1}$ é contrátil se, e somente se, $(y_n)_{n\geq 1}$ é contrátil.

b) $(x_n)_{n\geq 1}$ é limitadamente completa se, e somente se, $(y_n)_{n\geq 1}$ é limitadamente completa.

6. Sejam X um espaço de Banach, $(x_n)_{n\geq 1}$ uma sequência básica em X e $x_0 \in X \setminus \overline{\operatorname{span}}\{x_n : n \geq 1\}$. Suponha que exista $x^* \in X^*$ tal que $x^*(x_n) = 1$ para todo $n \geq 1$.

a) Construa um funcional linear $y^* \in X^*$ tal que $y^*(x_n) = 1$ para todo $n \geq 1$ e $y^*(x_0) = 0$.

b) Considere o operador linear $T : X \to X$ dado por $T(x) = y^*(x)x_0$. Mostre que $\operatorname{Id} + T$ é um isomorfismo. Conclua que $(x_n + x_0)_{n\geq 1}$ é uma sequência básica equivalente a $(x_n)_{n\geq 1}$.

7. **(Teorema de Krein-Milman-Rutman)** Sejam X um espaço de Banach, D um subconjunto denso de X e $(x_n)_{n\geq 1}$ uma base de Schauder de X. Mostre que D contém uma base de Schauder de X equivalente a $(x_n)_{n\geq 1}$.

8. Sejam X um espaço de Banach e $(x_n)_{n\geq 1}$ uma sequência básica em X.

   a) Mostre que $(x_n)_{n\geq 1}$ é equivalente à base canônica de ℓ_1 se, e somente se, $\sup_{n\geq 1} \|x_n\| < +\infty$ e existe $M > 0$ tal que $\sum_{n=1} |\alpha_n| \leq M \left\| \sum_{n=1}^{m} \alpha_n x_n \right\|$ para todos $m \geq 1$ e $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{K}$.

   b) Mostre que $(x_n)_{n\geq 1}$ é equivalente à base canônica de c_0 se, e somente se, $\inf\limits_{n\geq 1} \|x_n\| > 0$ e existe $M > 0$ tal que $\left\| \sum_{n=1}^{m} \alpha_n x_n \right\| \leq M \max\limits_{1\leq n\leq m} |\alpha_n|$ para todos $m \geq 1$ e $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{K}$.

9. Sejam X um espaço de Banach e $(x_n)_{n\geq 1}$ uma base de Schauder de X. Mostre que $(x_n)_{n\geq 1}$ é contrátil se, e somente se, toda base de blocos limitada de $(x_n)_{n\geq 1}$ converge fracamente para zero.