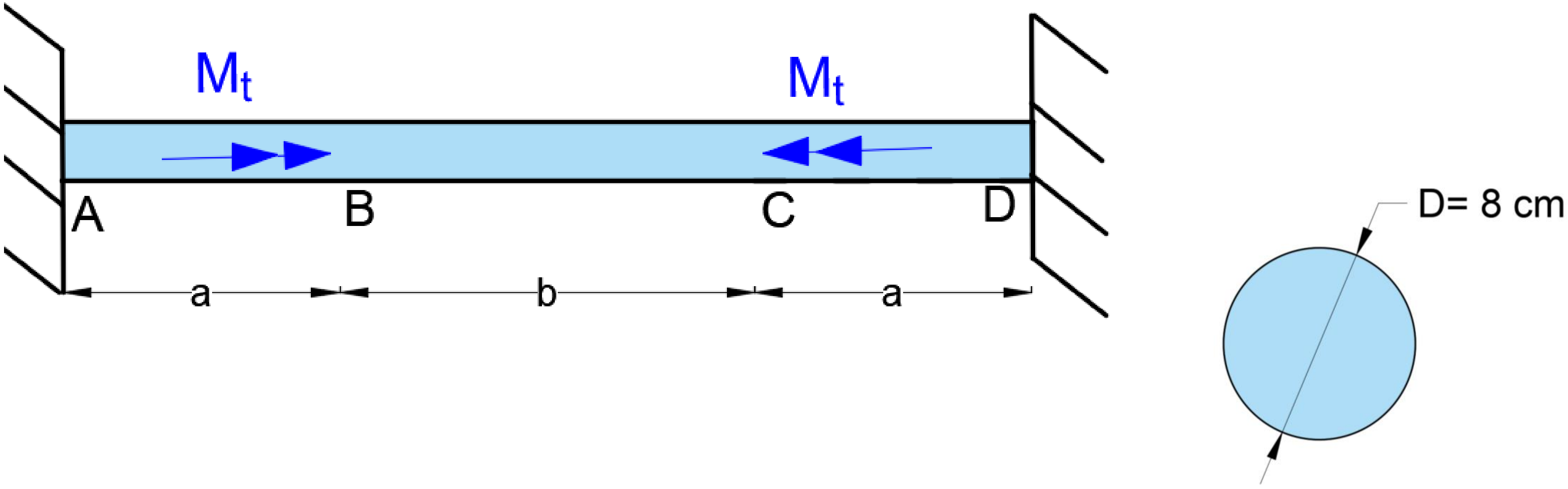
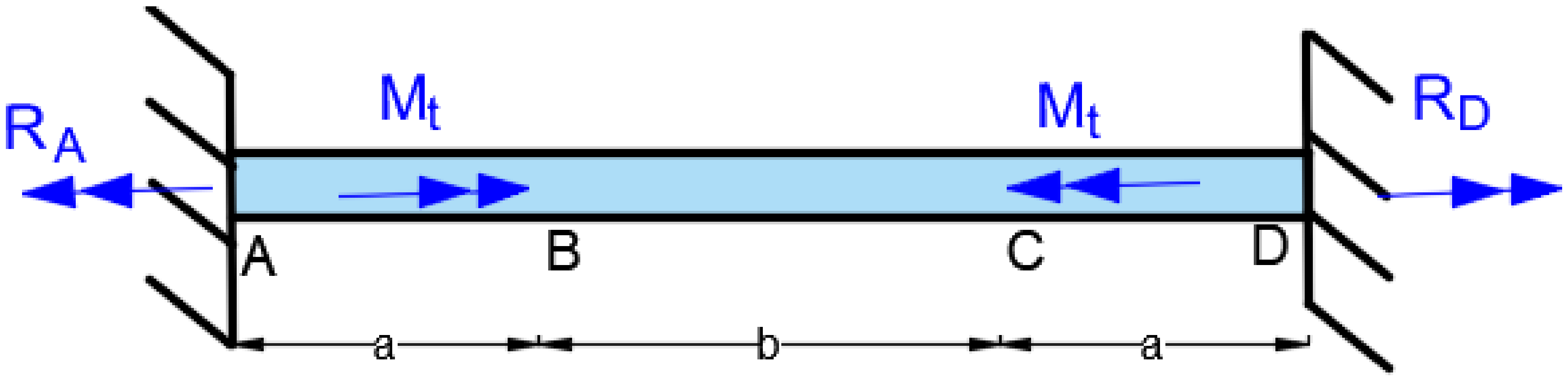
EXEMPLO 4

15. Considere-se um eixo biengastado, com momentos torçores M_t aplicados nos pontos B e C, veja figura. Admitindo-se que o valor de $G = 10\ 000\ kN/cm^2$, determinar a relação a/b para que a capacidade do eixo seja máxima. Para a relação a/b obtida e sendo a tensão de cisalhamento admissível igual a $10\ kN/cm^2$, determinar o valor de M_t.



Problema hiperestático, obter diagrama em termos da reação em **D**

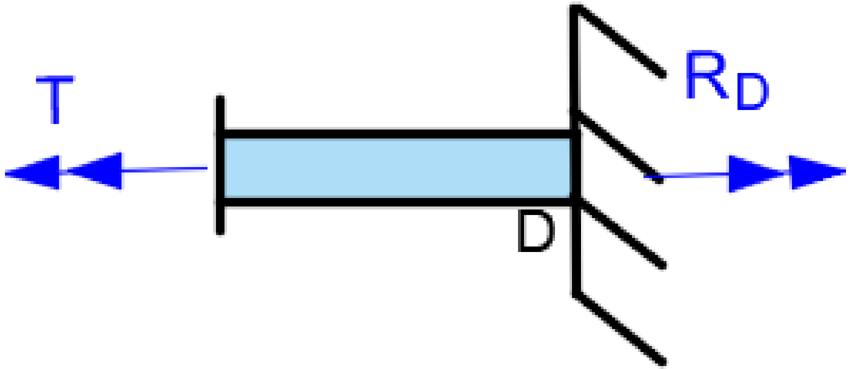
Duas incógnitas (R_A e R_D)
Uma equação: $\sum M = 0$



Inicialmente escrever o diagrama em termos da reação em **D**, assim:

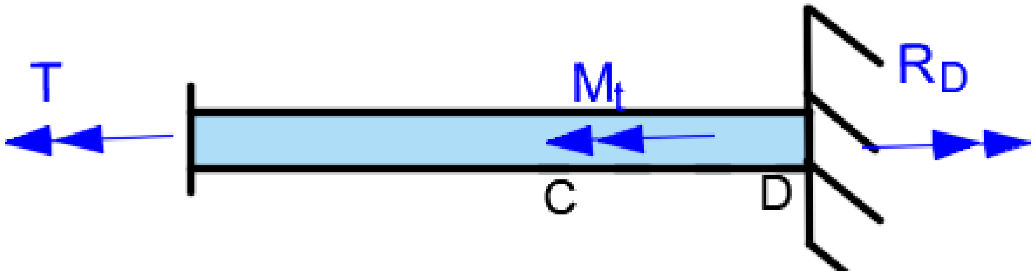
Inicialmente, cortar em cada trecho para obter valores em termos da reação em **D**, assim:

Corte 1



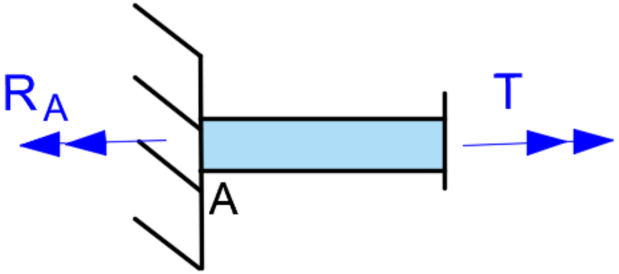
$$T - R_D = 0 \qquad T = R_D$$

Corte 2



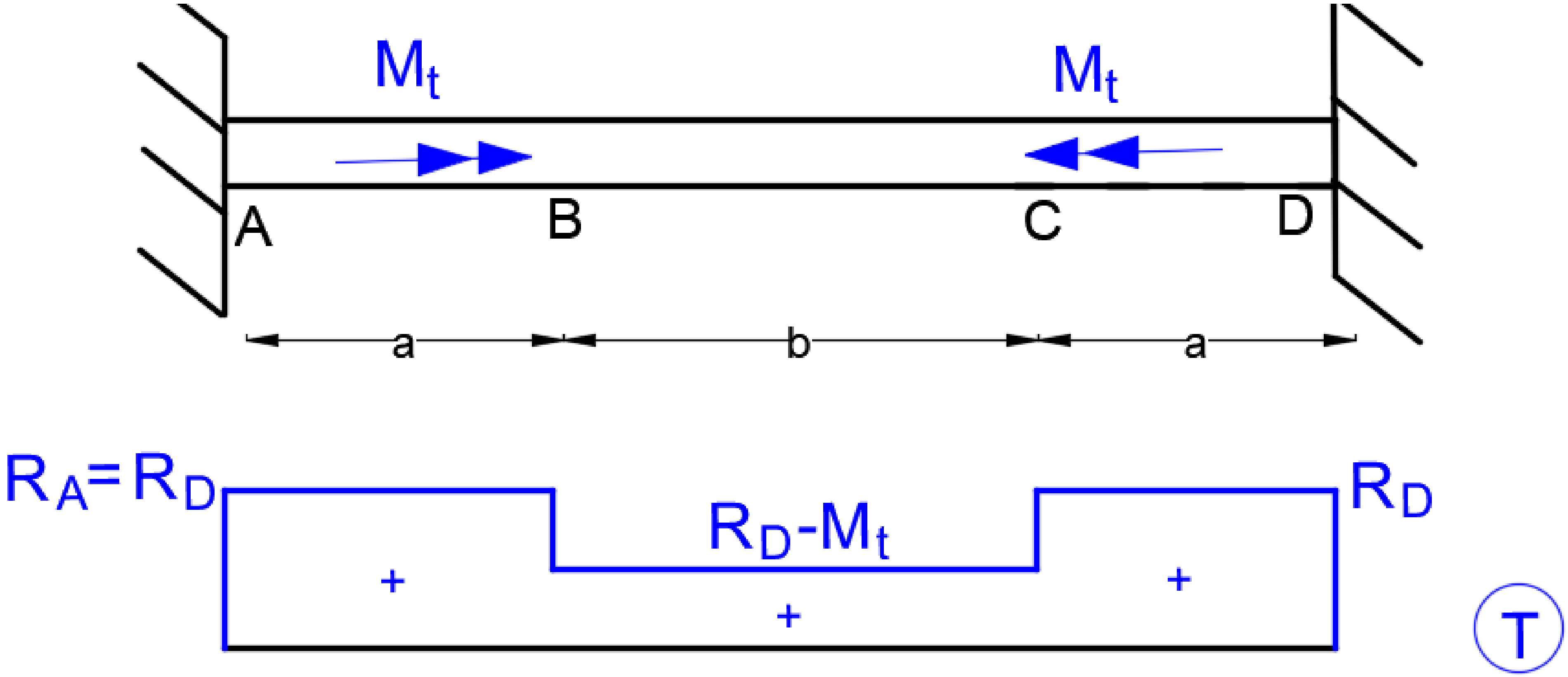
$$T - R_D + M_T = 0 \qquad T = R_D - M_T$$

Corte 3



$$T - R_A = 0 \qquad T = R_A = R_D \qquad \text{(eq. 1)}$$

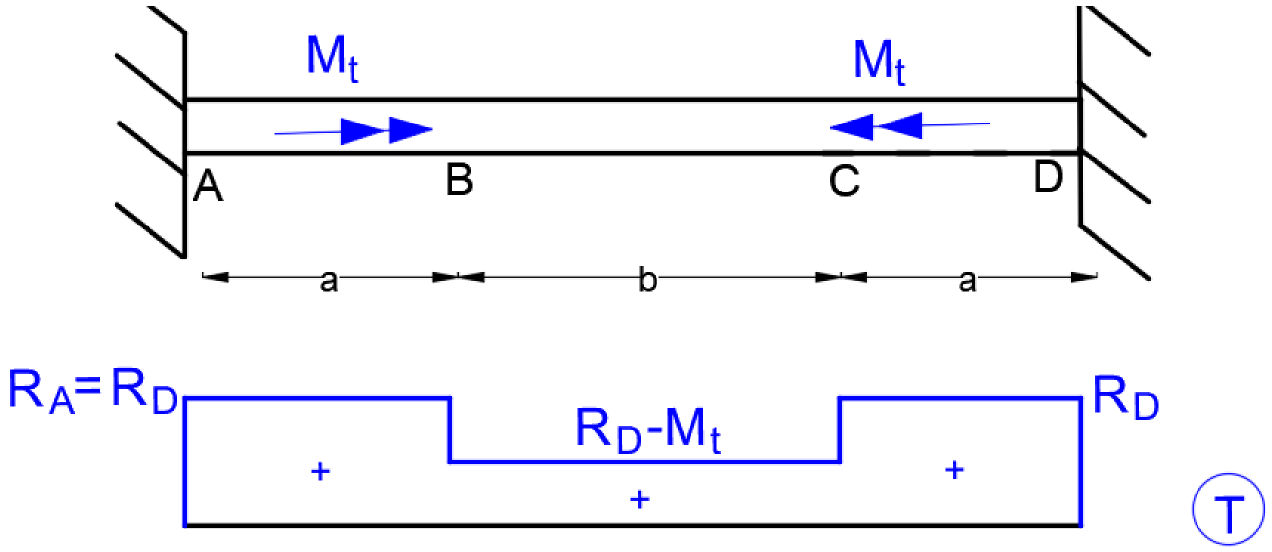
EXEMPLO 4 – Diagrama de momento torçor



Necessário outra equação: Equação de coerência do giro:

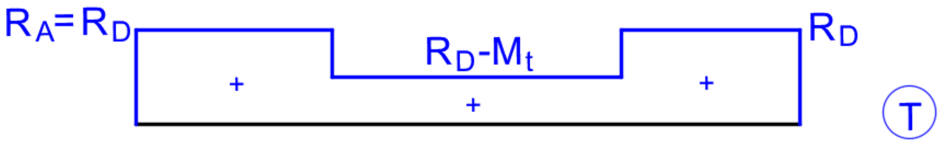
Seções **A** e D são fixas, indica que o giro da seção em torno de seu eixo é **NULA:**

$$\boldsymbol{\phi_A = 0} \qquad \textbf{e} \qquad \boldsymbol{\phi_D = 0}$$



$$\phi_D = \phi_A + \left(\frac{T.L}{G.I_p}\right)_{AB\rightarrow CD} = 0 + \frac{R_D.a}{GJ} + \frac{(R_D - M_t).b}{GJ} + \frac{R_D.a}{GJ} = 0 \rightarrow \boldsymbol{R_D} = \frac{\boldsymbol{M_t.b}}{\boldsymbol{2a+b}}$$

O diagrama anterior com $R_D = \frac{M_t.b}{2a+b}$



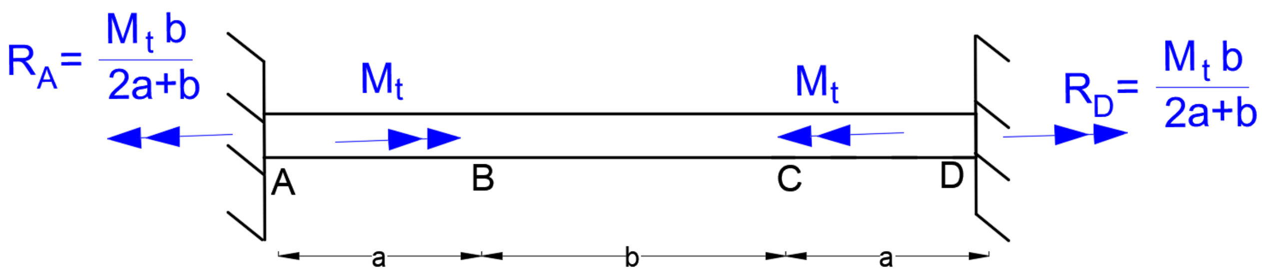
Trechos AB e CD: $\boldsymbol{T = \frac{M_t.b}{2a+b}}$

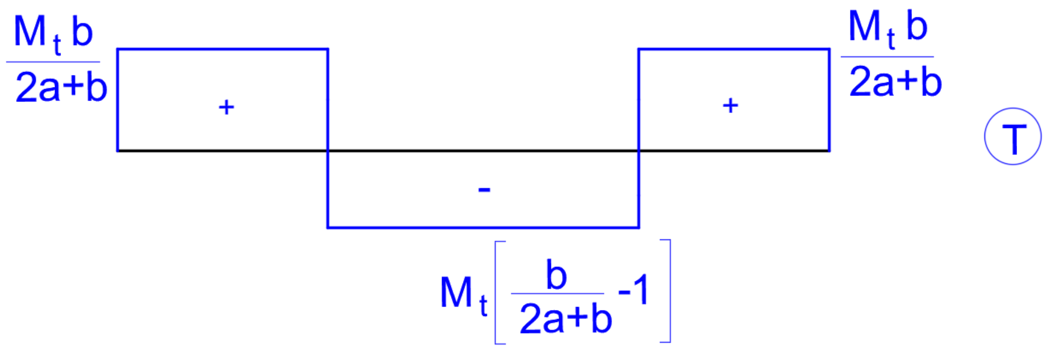
Trecho BC:

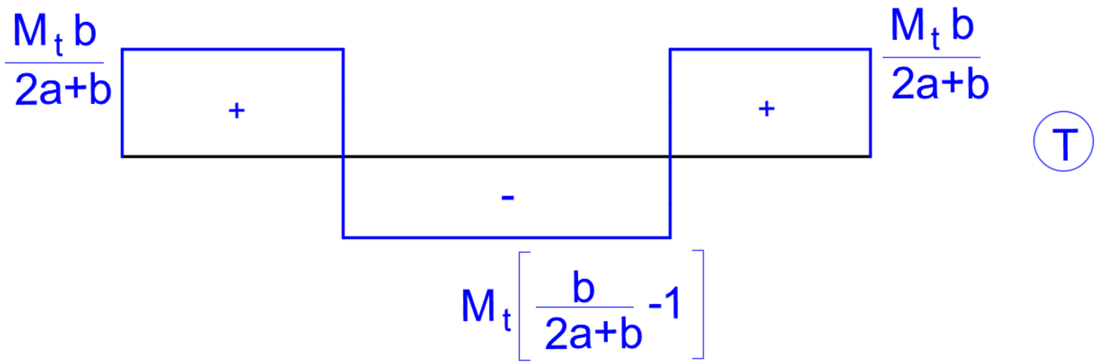
$$\boldsymbol{T = \frac{M_t.b}{2a+b} - M_t = M_t\left(\frac{b}{2a+b} - 1\right)}$$

$$\frac{b}{2a+b} < 1 \quad \rightarrow T < 0$$

Assim, o diagrama fica:





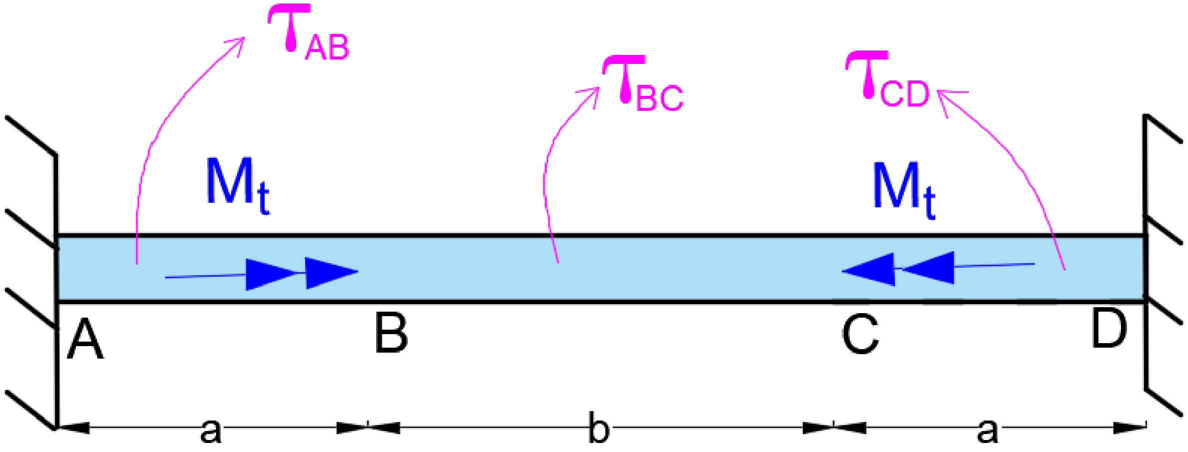


Análise de tensões:

Trecho AB e CD: $\tau_{AB} = \frac{T_{AB}}{J}\rho_{max} = \frac{M_t . b}{(2a+b)}\frac{\rho_{max}}{J}$

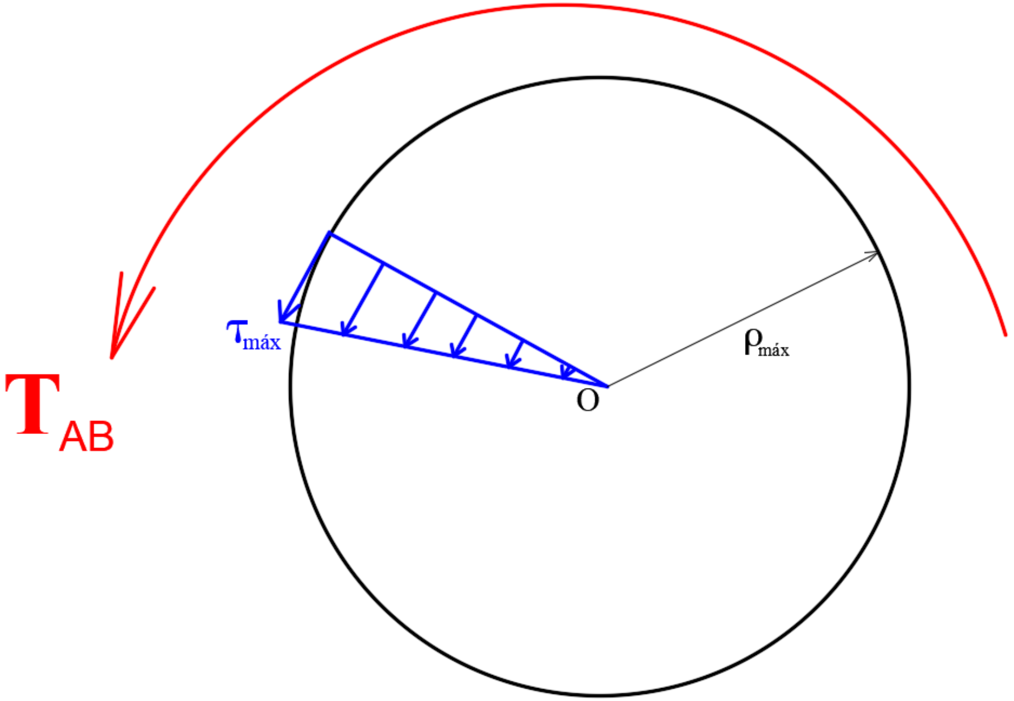
Trecho BC: $\tau_{BC} = \frac{T_{BC}}{J}\rho_{max} = M_t\left(\frac{b}{2a+b} - 1\right)\frac{\rho_{max}}{J}$

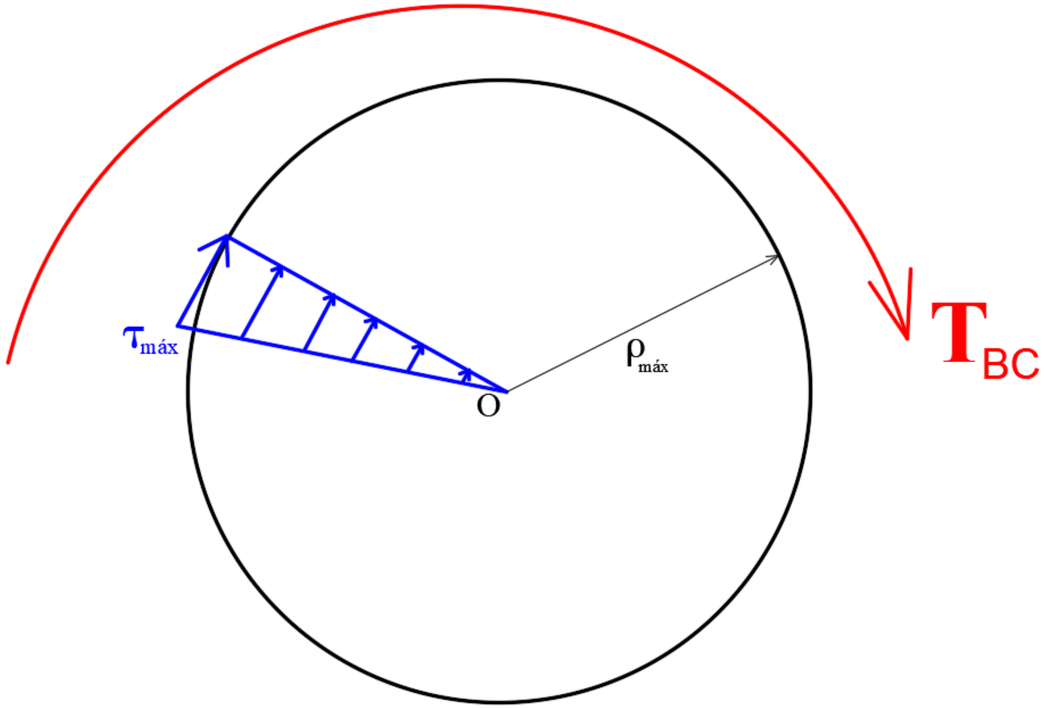
Como obter a capacidade máxima do eixo?



Como obter a capacidade máxima do eixo?

Aproveitar ao máximo o material ⇒ Tensões em todo o eixo sejam iguais!





Como obter a capacidade máxima do eixo?

Tensões em todo o eixo sejam iguais!

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_{AB} = \dfrac{M_t . b}{(2a+b)} \dfrac{\rho_{max}}{J} \\[2ex] \tau_{BC} = M_t \left(\dfrac{b}{2a+b} - 1 \right) \dfrac{\rho_{max}}{J} \\[2ex] \text{Como as tensões têm} \\ \text{sentidos contrários} \end{array} \right\}$$

$$\tau_{AB} = -\tau_{BC}$$

Como obter a capacidade máxima do eixo?

Tensões em todo o eixo sejam iguais!

$$\tau_{AB} = -\,\tau_{BC} \Longrightarrow \frac{M_t . b}{(2a+b)} \frac{\rho_{max}}{J} = -M_t\left(\frac{b}{2a+b} - 1\right)\frac{\rho_{max}}{J}$$

$$\frac{b}{(2a+b)} = -\left(\frac{b}{2a+b} - 1\right) \Longrightarrow \frac{b}{(2a+b)} = \frac{-b}{2a+b} + 1 \Longrightarrow \frac{2b}{(2a+b)} = 1$$

$$\boldsymbol{b = 2a}$$

Calcular Mt:

Tensões no trecho AB: Tomando b = 2a

$$\tau_{AB} = \frac{M_t . b}{(2a+b)} \frac{\rho_{max}}{J} \leq \tau_{AB} = 10\mathrm{kN}/cm^2$$

$$\tau_{AB} = \frac{M_t . 2a}{(2a+2a)} \frac{4}{\frac{\pi}{32} 8^4} \leq 10\mathrm{kN}/cm^2 \qquad M_t \leq 2010{,}6\ \mathrm{kNcm}$$

$$\boldsymbol{M_t = 2010{,}6\ \mathrm{kNcm}}$$

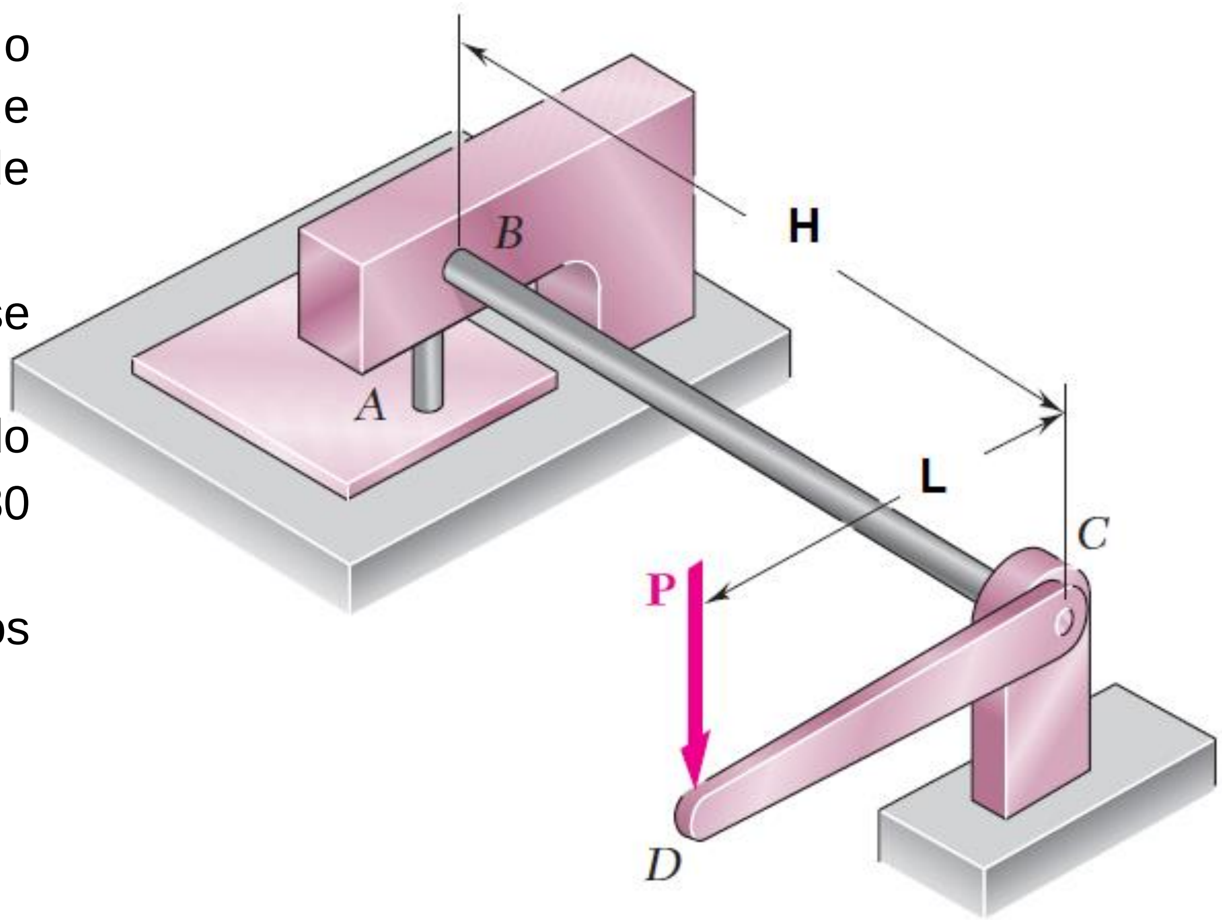
EXEMPLO 5

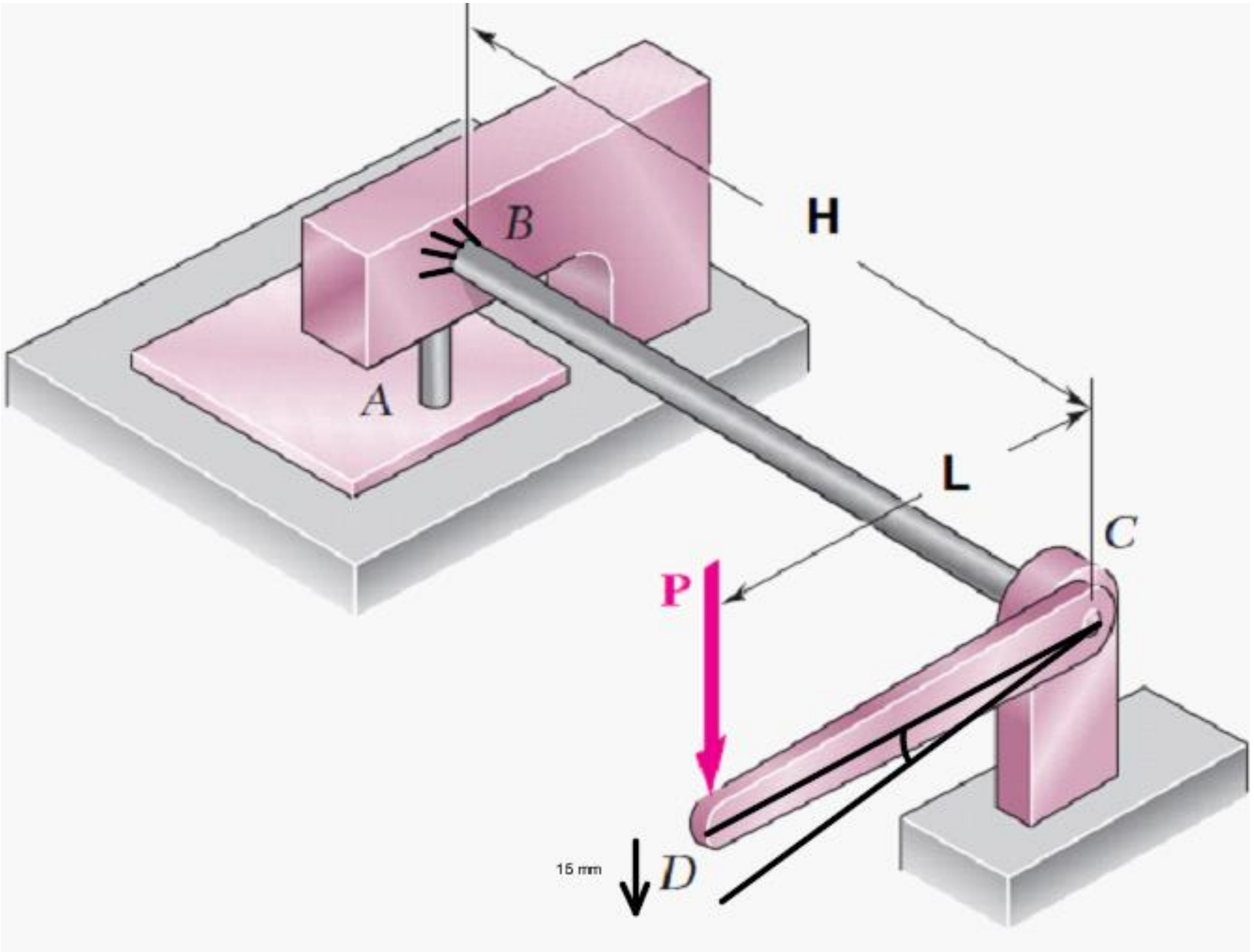
Um furo é feito em uma chapa de plástico em *A* através de uma força **P**, aplicada à extremidade *D* da alavanca CD, que está rigidamente conectada ao eixo cilíndrico BC e livre para girar em C. Especificações de projeto exigem que o deslocamento vertical do ponto *D* não exceda 15 mm desde o momento em que o punção toca a chapa até o ponto em que ele efetivamente penetra no plástico. Considere o eixo BC de aço. Adote *G* = 77 GPa. Determine:

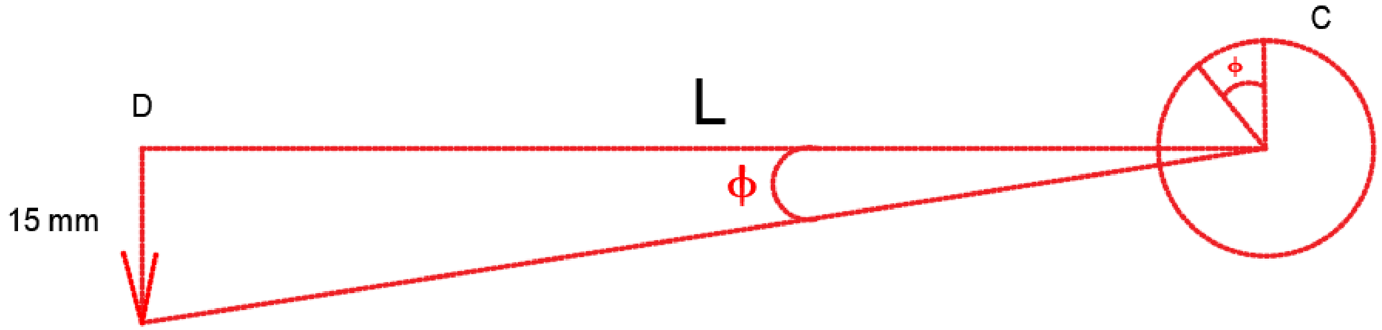
(a) o diâmetro mínimo necessário de BC para restringir esse deslocamento em D;

(b) o diâmetro mínimo necessário de BC para segurança do eixo BC e termos de tensão, sabendo que a τ_{adm} = 80 MPa;

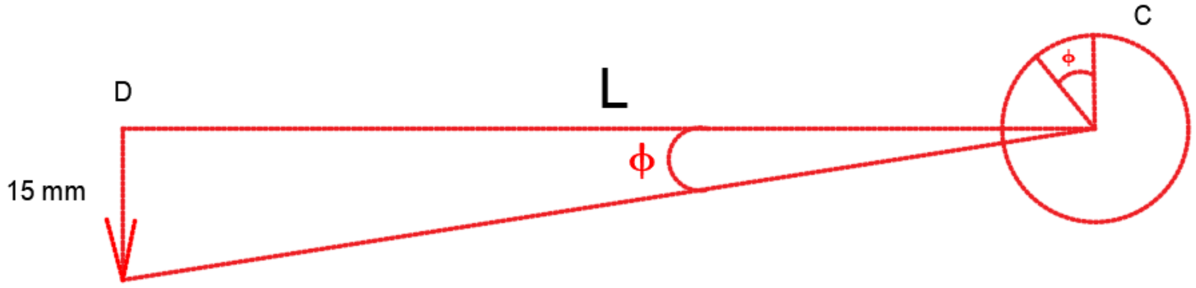
(c) diâmetro mínimo de BC do projeto que atenda ambos os itens (a) e (b).




H
B
A
L
C
P
15 mm
D


D
L
C
ϕ
15 mm

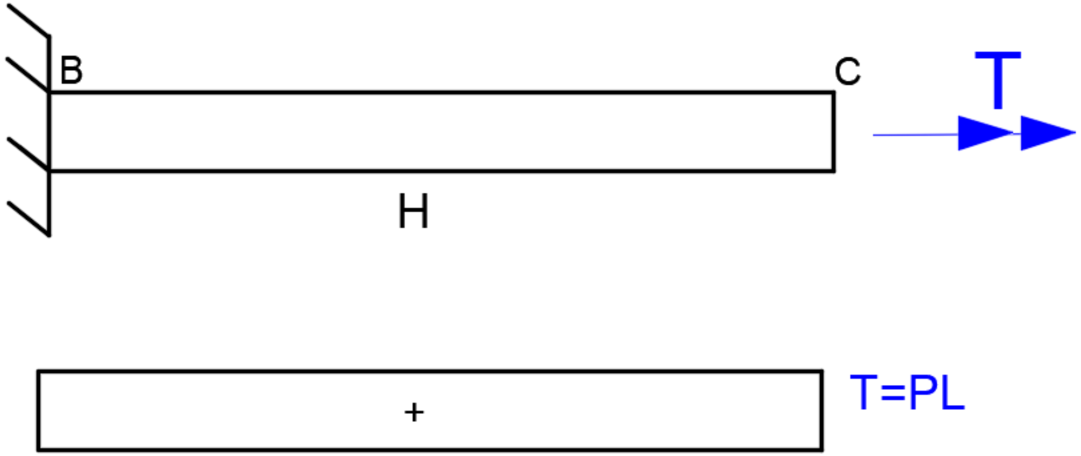
Considerando pequenos giros:

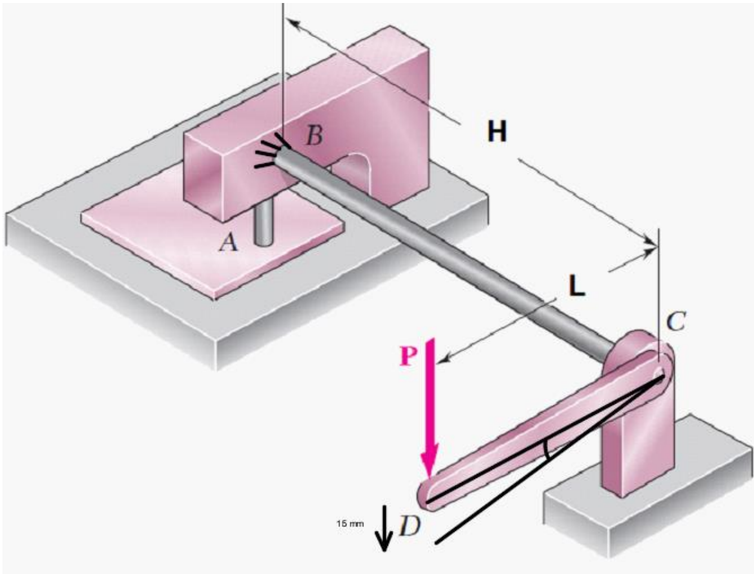


$$\mathrm{tg}(\phi) \cong \phi = \frac{15mm}{L}$$

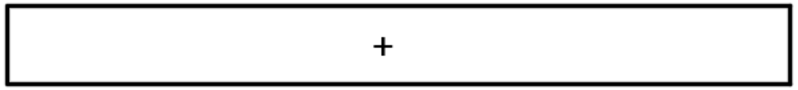
Deve-se limitar o deslocamento de 15 mm: $\phi \leq \frac{15mm}{L}$

Barra BC está fixa em B com torque em C





(a) O giro à torção em C é dado por:



$$\phi(C) = \phi(B) + \left(\frac{T.H}{G.J}\right)_{BC}$$

$$\phi(C) = 0 + \frac{PL.H}{G.J}$$

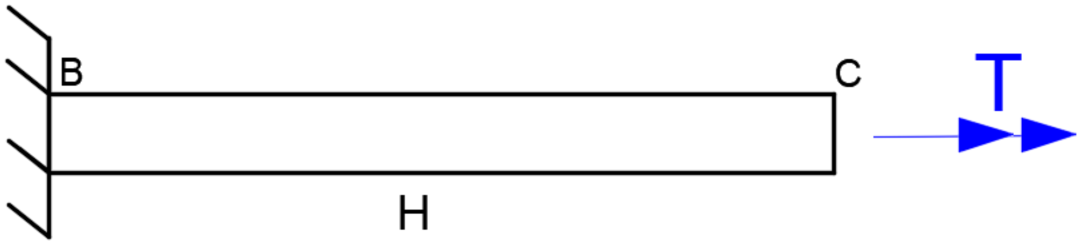
Como $\phi \leq \dfrac{15mm}{L}$ $\Longrightarrow$ $\dfrac{PL.H}{G.J} \leq \dfrac{15mm}{L}$

$$\frac{PL.H}{G.\frac{\pi}{32}d^4} \leq \frac{15mm}{L} \Longrightarrow \frac{PL^2.H}{15.10^{-3}.77.10^6.\frac{\pi}{32}} \leq \boldsymbol{d^4}$$

$$\boldsymbol{d \geq \sqrt[4]{\frac{PL^2.H}{15.10^{-3}.77.10^6.\frac{\pi}{32}}}} \quad (m)$$

Medidas em m e força em kN

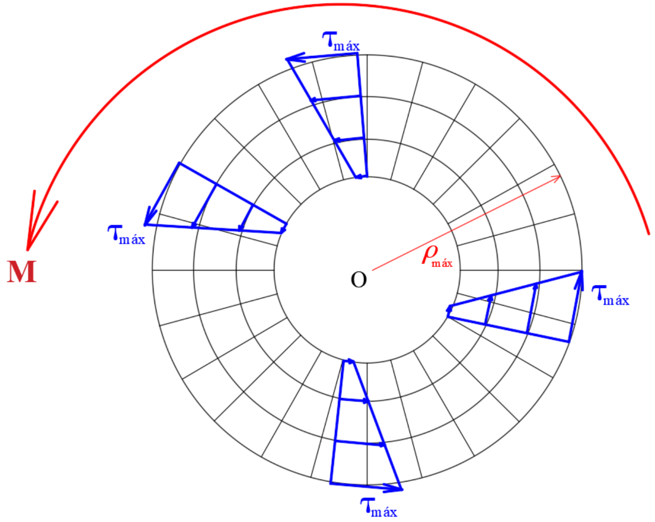
(b) A máxima tensão cisalhante é dada por:



$$\tau_{max} = \frac{M_{max}}{J}\rho_{max}$$

$$\tau_{max} = \frac{PL}{\frac{\pi}{32}d^4}0{,}5d \leq \tau_{\text{adm}}$$

$$\boldsymbol{d \geq \sqrt[3]{\frac{PL}{\frac{2\pi}{32}.\tau_{\text{adm}}}}} \quad (m)$$



τ_{adm} = 80 MPa

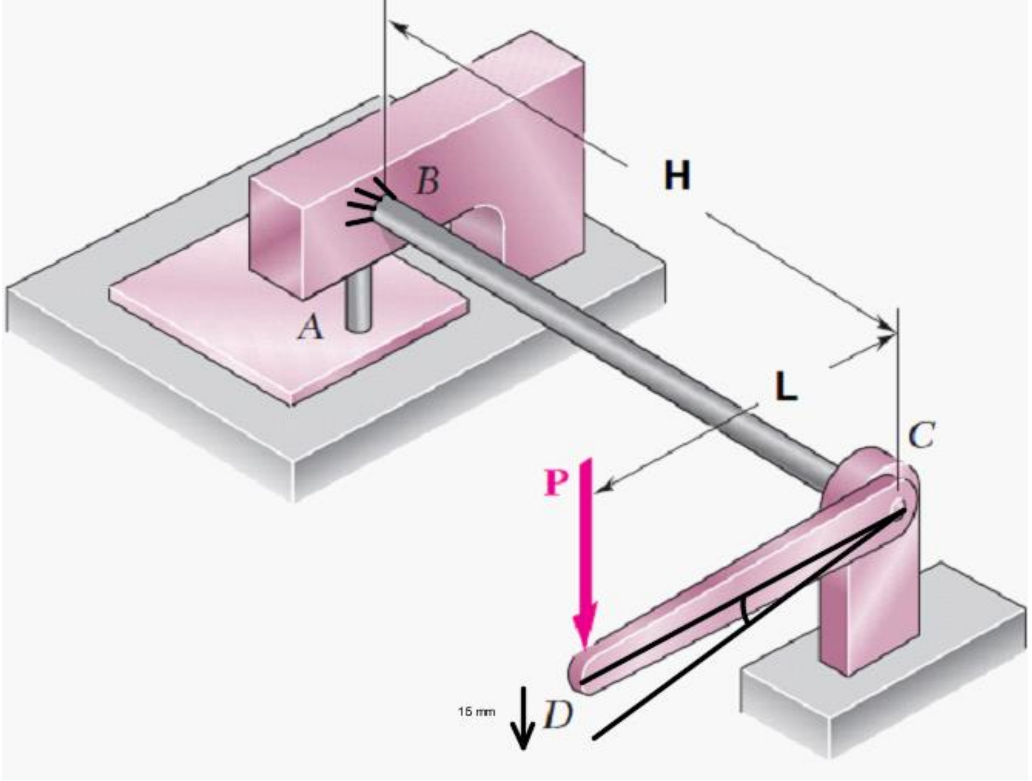
Medidas em m e força em kN

Adotando:

P = 1100 N; L = 400 mm; H = 900 mm

(a) $$d \geq \sqrt[4]{\frac{PL^2.H}{15.10^{-3}.77.10^6.\frac{\pi}{32}}} = 34{,}38 \text{ mm}$$

(b) $$d \geq \sqrt[3]{\frac{PL}{\frac{2\pi}{32}.\tau_{adm}}} = 30{,}37 \text{ mm}$$

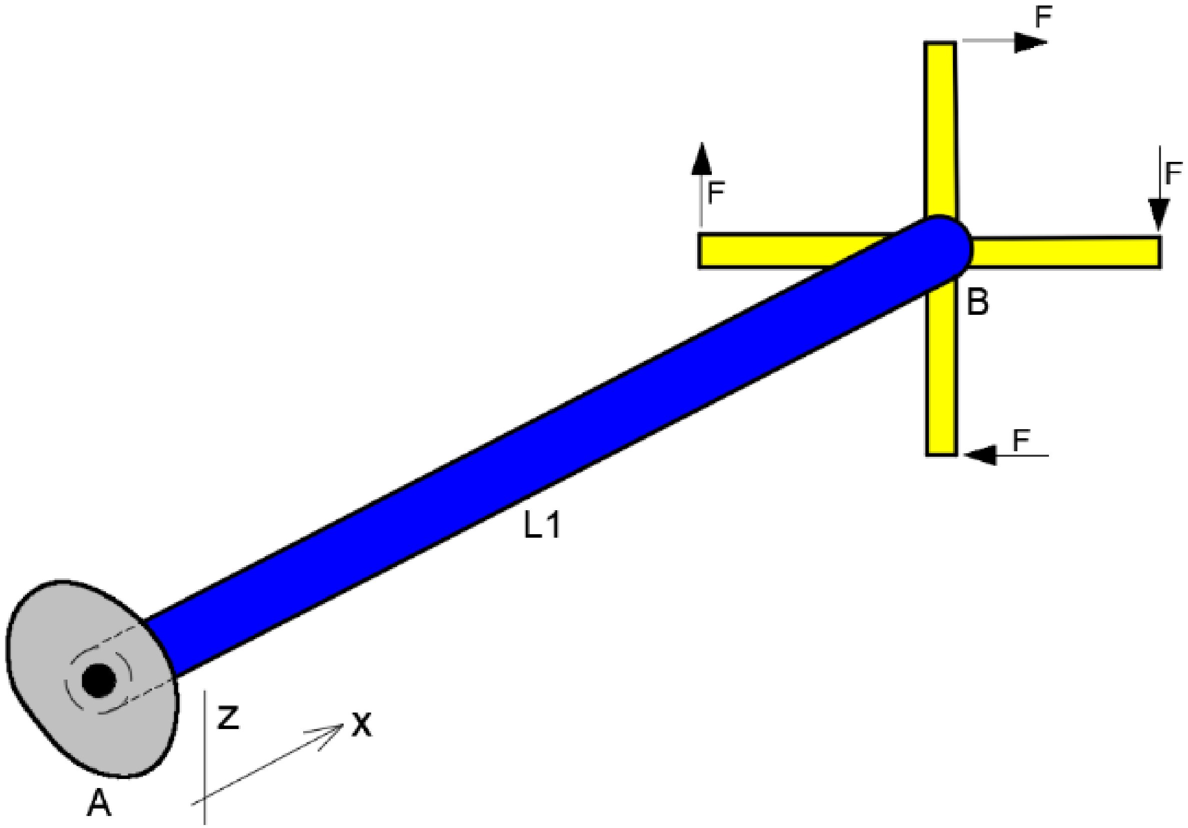


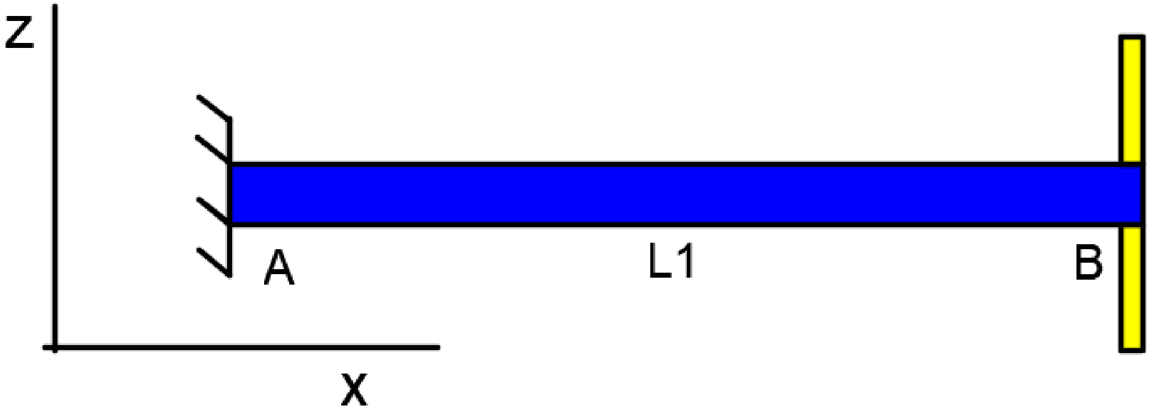
(c) maior(*d*) = 34,38 mm

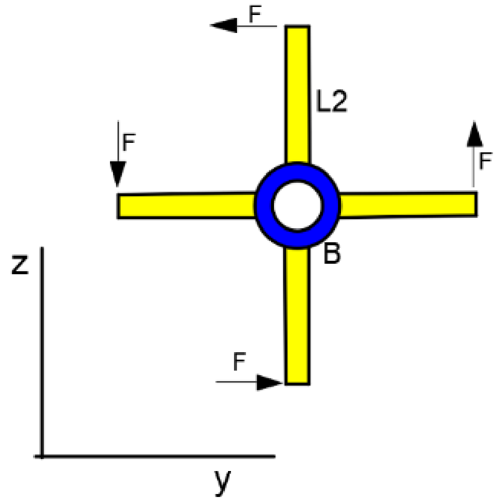
O eixo cilíndrico AB de comprimento L1 possui seção transversal vazada e está fixo junto a seção em A. Seu diâmetro externo e interno é, respectivamente, de 10 cm e 2 cm. Na seção junto a B são soldados 4 barras perpendiculares entre si que estão todas contidas no plano yz, nas quais atuam a força perpendicular ao seu eixo e de intensidade de F = 10 kN. Considere que a distância de aplicação de cada F até o centroide da seção junto a B seja L2. Adote L1 = 300 cm, L2 = 20 cm e G = 50 GPa. Obtenha:

a) o sentido e o valor do giro máximo do cilindro AB, em graus;

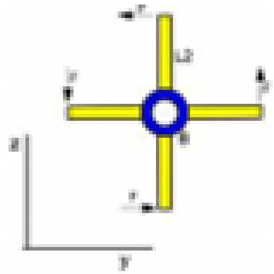
b) distribuição das tensões cisalhantes na seção mais crítica no cilindro AB, indique valores em MPa.

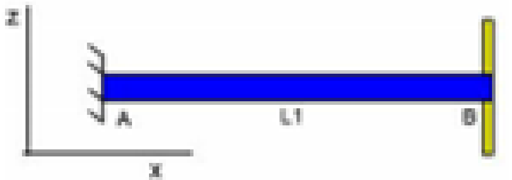




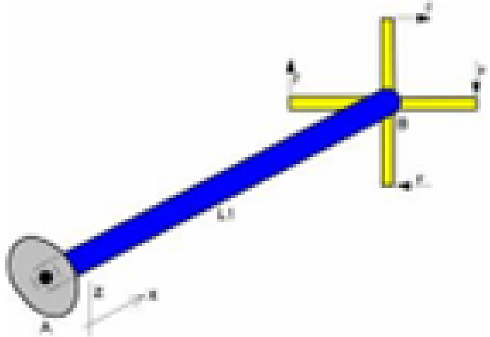


b)



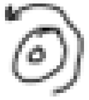


a tensão cisalhante máxima no cilindro AB, em MPa.



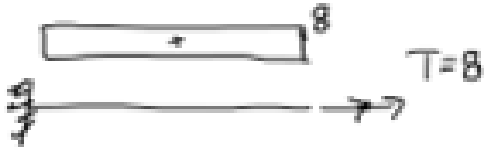
a) Obtendo momento de torsão em B:

$=$



$T = 4F \cdot L2 = 8 \text{ kN m}$

$\left\{ \begin{array}{l} F = 10 \text{ kN} \\ L2 = 0{,}2 \text{ m} \end{array} \right.$



$$J = \frac{\pi}{32}\left(0{,}1^4 - 0{,}02^4\right) = 9{,}8018 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4$$

$$\varphi_B = \frac{T \cdot L1}{G \cdot J} \rightarrow \varphi_B = \frac{8 \cdot 3{,}0}{50 \cdot 10^6 \cdot J} = 4{,}8971 \cdot 10^{-2} \text{ rad}$$

$$\varphi_B = 2{,}81^\circ$$

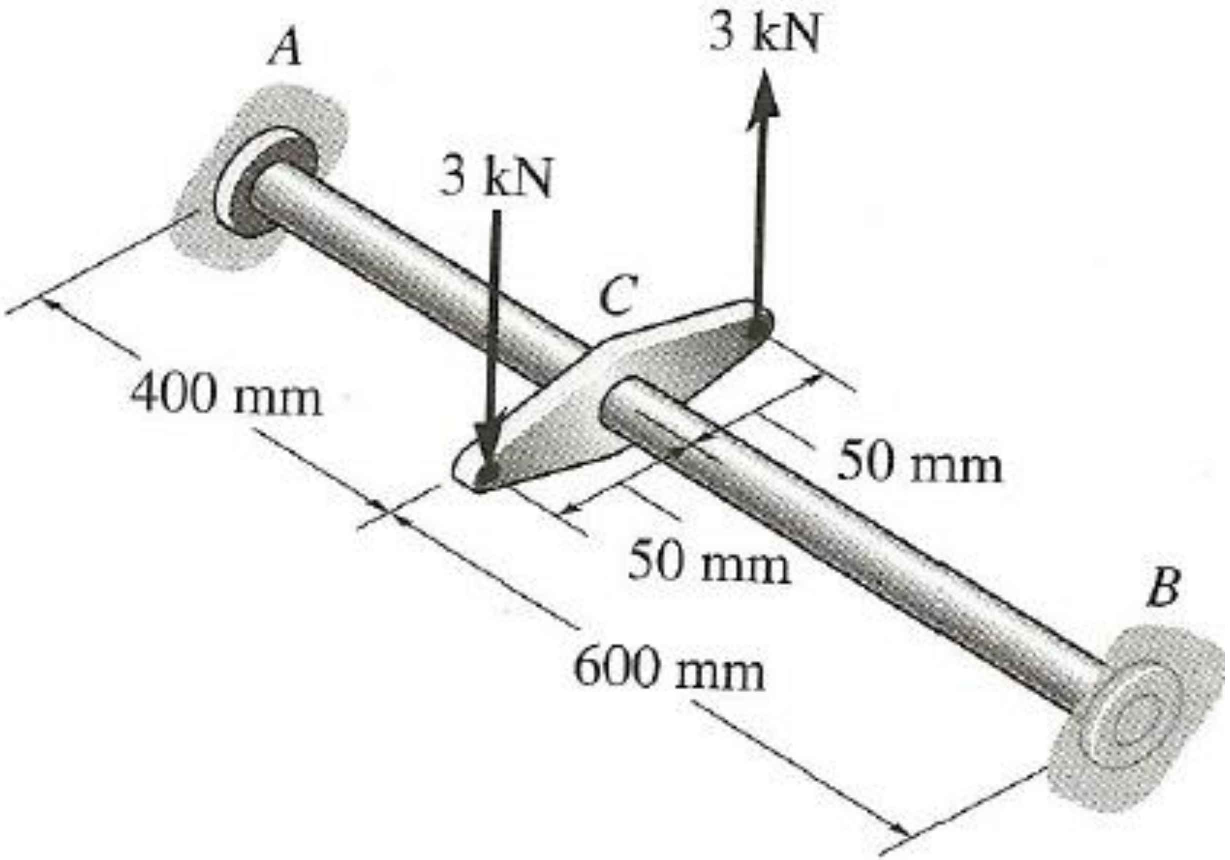
b) $\tau = \dfrac{T\rho}{J}$

$$\tau_{máx} = \frac{8 \cdot 0{,}05}{J} = 40{,}81 \text{ MPa}$$

$\tau = \dfrac{8 \cdot 0{,}01}{J} = 8{,}16$

(MPa)

O eixo de aço tem diâmetro de 40mm e suas extremidades A e B são fixas. Se ele for submetido ao conjugado de forças, conforme desenho, qual será a tensão máxima de cisalhamento para as regiões AC e CB. Com essas tensões e sabendo que $\tau_{adm} = 10\ MPa$, indique o coeficiente de segurança da estrutura.



Resposta: τ_{AC} = 14,32 MPa; τ_{CB} = 9,55 MPa; s = 0,7

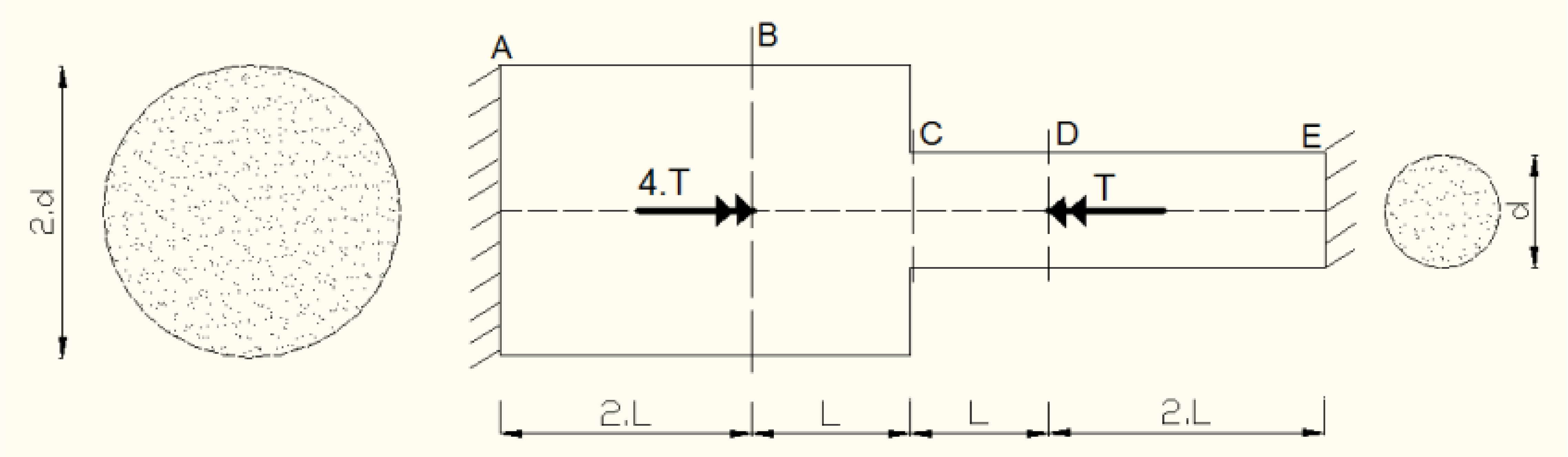
Para a estrutura abaixo, engastada em A e em E, com seções circulares maciças e os momentos torçores atuantes na seção B de **4.T** e na seção D de **T**, conforme indicados na figura a seguir, determinar:

a) diagramas de momento torçor;

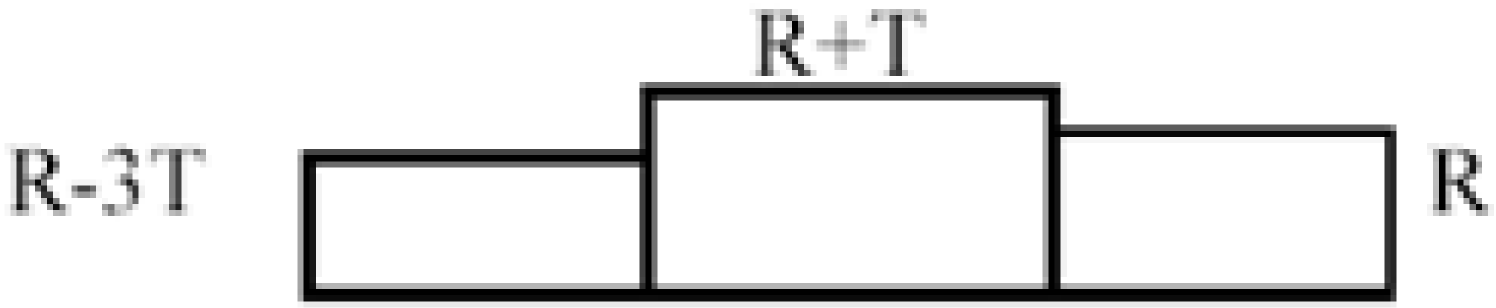
b) as tensões cisalhantes máximas nos trechos BC e CD;

c) os ângulos das rotações nas seções B e C.

Dados: T = 1 kN.cm. Expressar resultados em termos de L, d e G (unidades já compatíveis com T).



Problema hiperestático. Escrever o diagrama em função da reação R em E. Considerada no sentido da direita para esquerda positiva. Assim, o diagrama de momento torçor é:

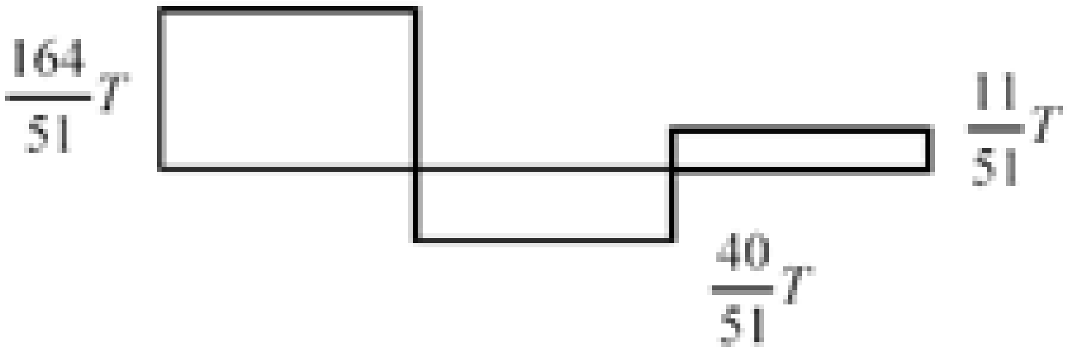


Usar a equação de compatibilidade de deslocamento, sabendo que as rotações em A e E são nulas.

$$\frac{32.(R-3T).2.L}{\pi.G.(2.d)^4}+\frac{32.(R+T).L}{\pi.G.(2.d)^4}+\frac{32.(R).2.L}{\pi.G.(d)^4}=0$$

$$R = \frac{-11}{51}T$$

a) diagramas de momento torçor;



b) As tensões são dadas por:

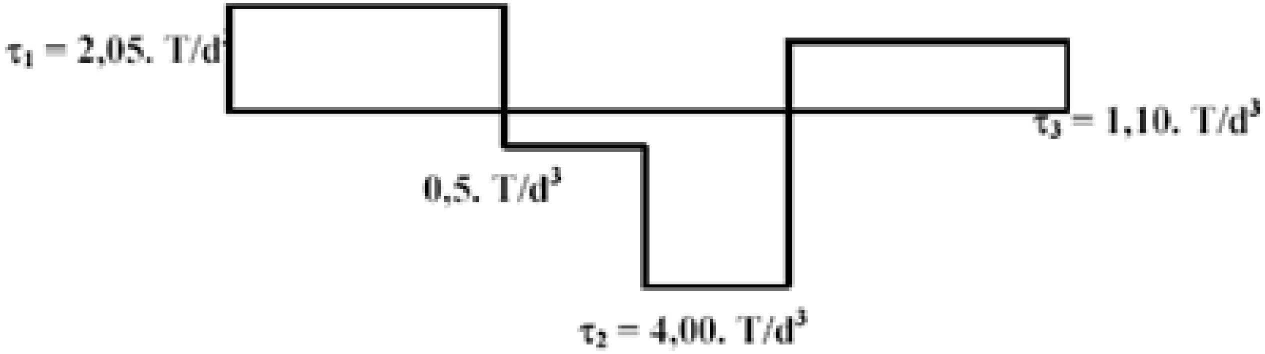
$$J = \frac{\pi . d^4}{32}$$

$$\tau = \frac{M_t r}{J} = \frac{16.M_t}{\pi . d^3}$$

$$\tau_3 = \frac{16.(\frac{11}{51}T)}{\pi . d^3} = 1{,}10\frac{T}{d^3}$$

$$\tau_2 = \frac{16.(\frac{40}{51}T)}{\pi . d^3} = 4{,}00\frac{T}{d^3}$$

$$\tau_1 = \frac{16.(\frac{164}{51}T)}{\pi . d^3} = 2{,}05\frac{T}{d^3}$$



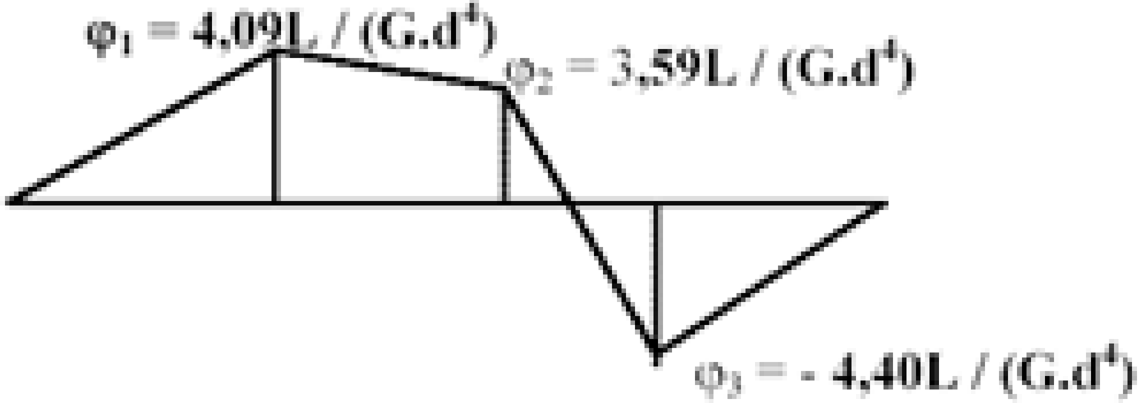
c) As rotações são dadas por:

$$\varphi = \frac{M_t L}{G.J}$$

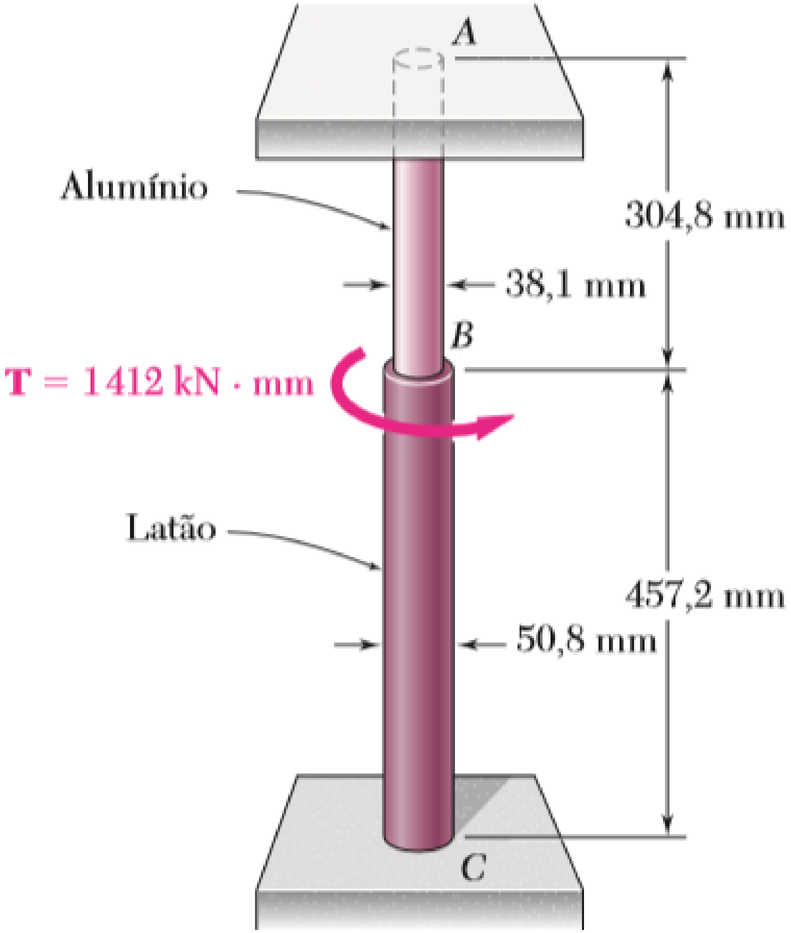
$$\varphi_1 = \frac{32.164.2.L}{51.G\pi..(2d)^4} = \frac{4{,}09.L}{G.d^4}$$

$$\varphi_2 = \varphi_1 + \frac{32.(-40).L}{51.G.\pi.(2d)^4} = \frac{3{,}59.L}{G.d^4}$$

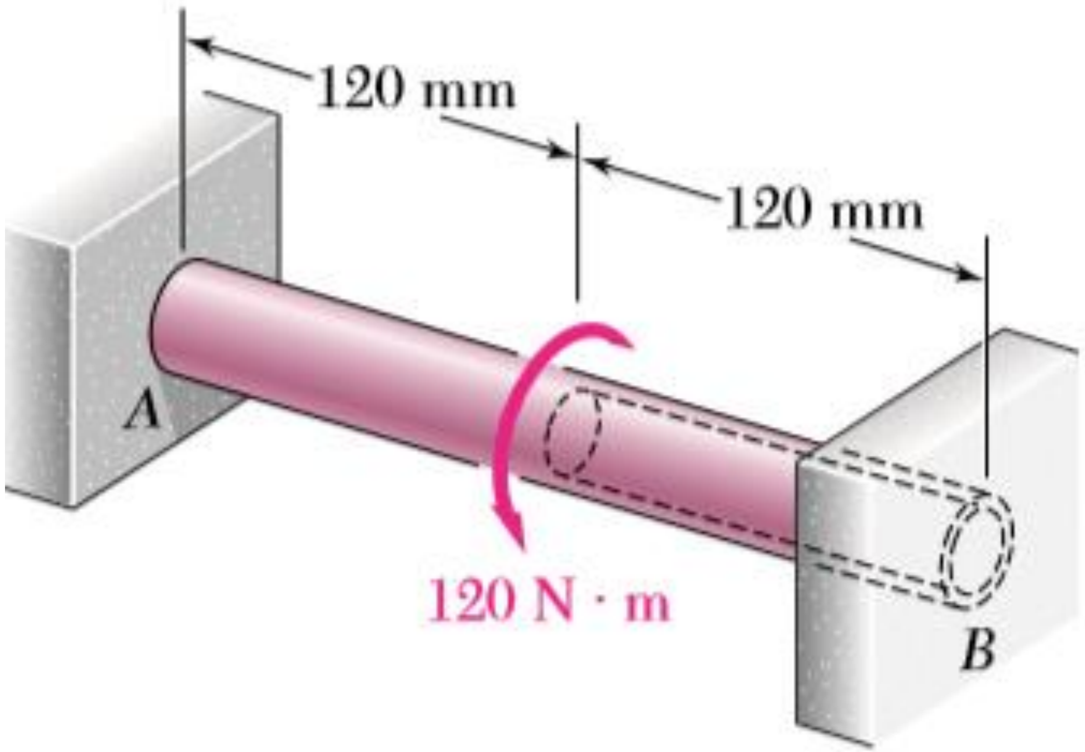
$$\varphi_3 = \varphi_1 + \varphi_2 + \frac{32.(-40).L}{51.\pi.G.(d)^4} = -4{,}40\frac{L}{G.d^4}$$



Os cilindros sólidos *AB* e *BC* estão conectados em *B* e estão engastados em suportes fixos em *A* e em *C*. Sabendo que os módulos de rigidez são 25,5 GPa para o alumínio e 38,6 GPa para o latão, determine a máxima tensão de cisalhamento (*a*) no cilindro *AB* e (*b*) no cilindro *BC*.



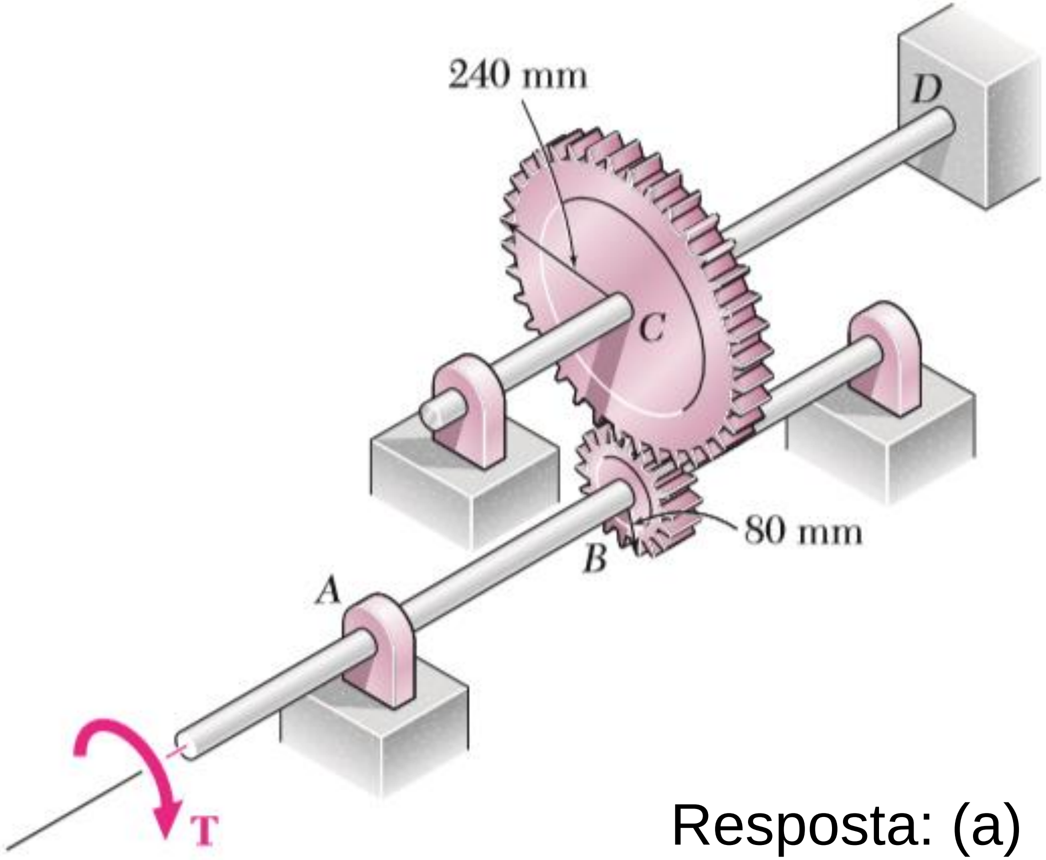
Um eixo circular *AB* consiste em um cilindro de aço de 240 mm de comprimento e 22 mm de diâmetro, no qual foi feito um furo de 120 mm de profundidade e 16 mm de diâmetro na extremidade *B*. O eixo está engastado a suportes fixos em ambas as extremidades, e é aplicado um torque de 120 N · m na sua seção média (Fig. 3.28). Determine o torque aplicado no eixo por cada um dos suportes.



Resposta: Ta = 69,77 N.m; Tb = 50,23 N.m

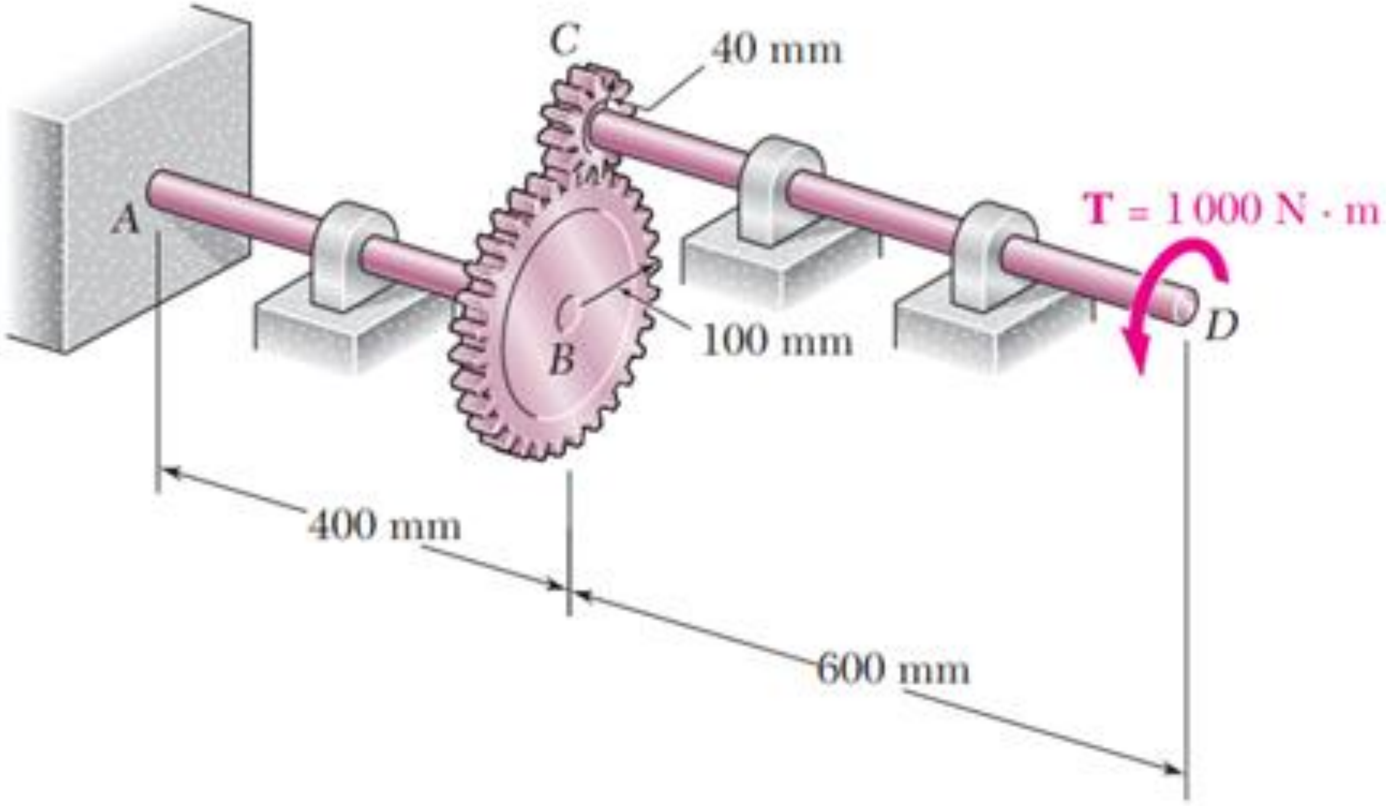
Dois eixos de aço com seção transversal cheia são conectados por engrenagens conforme mostra a figura. É aplicado um torque de intensidade $T = 900$ N · m no eixo AB. Sabendo que a tensão de cisalhamento admissível é de 50 MPa e considerando somente tensões causadas por torção, determine o diâmetro necessário para (*a*) o eixo AB e (*b*) o eixo CD.

Dica. Considere a seção em D fixa e as demais mancais livres de giro.



Resposta: (a) 45,1 mm; (b) 65 mm

O projeto do sistema de engrenagem e eixo mostrado na figura requer que sejam utilizados eixos de aço de mesmo diâmetro para AB e CD. É necessário também que $\tau_{adm} \leq 60$ MPa e que o ângulo ϕ_D pelo qual a extremidade D do eixo CD gira não exceda 1,5°. Sabendo que $G = 77$ GPa, determine o diâmetro necessário para os eixos.



a) Verificar rotação máxima

$$s = \varphi_C . 40$$

$$\varphi_B . 100 = \varphi_C . 40 \rightarrow \varphi_C = 2{,}5 . \varphi_B$$

$$s = \varphi_B . 100$$

$$\varphi_D = (ML/GJ)_{CD} + \varphi_C \rightarrow (ML/GJ)_{CD} + 2{,}5 . \varphi_B$$

$$\varphi_B = (ML/GJ)_{AB}$$

$$d > 62{,}9\ mm$$

b) Verificar tensão em cada trecho

$$\tau_{AB} = \frac{2500}{\frac{\pi}{32} d^4} 0{,}5d \leq \tau_{\text{adm}}$$

$$d > 59{,}6\ mm$$

$$\tau_{CD} = \frac{1000}{\frac{\pi}{32} d^4} 0{,}5d \leq \tau_{\text{adm}}$$

$$d > 43{,}9\ mm$$

Resposta: 62,9 mm