
Desafio II

A Relatividade Restrita (1905) modificou a nossa percepção sobre o mundo como nenhuma teoria até então havia modificado. Segundo Einstein, a nossa noção de simultaneidade entre eventos deve ser alterada, uma vez que a velocidade da luz é a mesma em todo referencial. Agora, dois eventos que são simultâneos em um mesmo referencial não são, necessariamente, simultâneos em outro. Esta observação, totalmente contra intuitiva à primeira vista, pode nos levar a fenômenos que parecem inconsistentes para observadores diferentes, mas no fim do dia eles podem ser entendidos utilizando corretamente a relatividade restrita. Estes tipos de fenômenos são o que chamamos de paradoxos e nesta provinha procuraremos entender um deles.

Nós vamos considerar o movimento de um trem em direção a um túnel num referencial onde o último está em repouso, como apresentado na Figura (1). Em suas extremidades, o túnel possui duas portas que estão totalmente fechadas, somente no instante em que a frente do trem se encontra nas posições dessas portas elas são abertas, e uma vez que o trem passou completamente por uma das portas, a mesma volta a se fechar, ou seja, no instante que a traseira do trem cruza a porta, esta imediatamente se fecha. Imagine que o trem esteja com uma velocidade relativística, isto é, com uma velocidade suficientemente alta para que os efeitos relativísticos estejam presentes. Nessa situação, devido à contração de Lorentz, o trem pode estar com uma velocidade tal que o seu comprimento seja menor que o comprimento do túnel, e portanto haverá um instante de tempo, ou instantes de tempo, em que o trem se encontrará completamente dentro do túnel. Em contrapartida, se estivermos em um referencial que se move com a mesma velocidade do trem, quem sofrerá a contração de Lorentz será o túnel e este encolherá! Agora, o trem é maior que o túnel e nunca estará inteiramente contido dentro dele.

- ① Para entendermos este problema primeiro vamos considerar um referencial S onde o túnel está parado e o trem se move com uma velocidade de módulo v no sentido positivo de x . A origem do referencial coincide com a extremidade esquerda do túnel, ou seja, com a porta à esquerda. O cronômetro de um observador parado em S é iniciado no instante em que a frente do trem coincide com a primeira porta do túnel, i.e. a porta à esquerda se abre no instante $t = 0$. Também vamos considerar

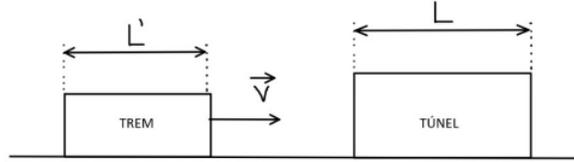


Figura 1: Situação vista do referencial S .

este problema como sendo unidimensional, $y = 0$ e $z = 0$. O comprimento do túnel e do trem, medidos em S , são L e L_0 , respectivamente, mas o comprimento do trem medido em seu próprio referencial, onde ele se encontra em repouso, é igual a $2L$.

- (a) Escreva as coordenadas $x^\mu = (ct, x, y, z)$ que descrevem: a ponta esquerda do trem; a ponta direita do trem; a ponta esquerda do túnel; a ponta direita do túnel em qualquer instante de tempo, ou seja, suas trajetórias.
- (b) Para entendermos melhor o que acontece nesse problema é útil pensarmos em alguns eventos que podem ajudar nossa compreensão. Aqui iremos tomar 4 eventos: (1) o encontro da parte da frente do trem com a parte esquerda do túnel, associado à abertura da primeira porta; (2) o encontro da parte da frente do trem com a parte direita do túnel, associado à abertura da segunda porta; (3) o encontro da parte de trás do trem com a parte esquerda do túnel, associado ao fechamento da primeira porta; (4) o encontro da parte de trás do trem com a parte direita do túnel, associado ao fechamento da segunda porta. Por que é interessante olharmos para esses eventos? Escreva pontos x^μ associados a cada um desses eventos no referencial S .
- (c) Para que seja possível a situação em que as duas portas se fecham com o trem inteiro dentro do túnel nesse referencial, qual deve ser a condição sobre v ? A partir de agora vamos considerar que estamos no caso limite em que a segunda porta se abre imediatamente após o fechamento da primeira ($t_{\text{evento (2)}} = t_{\text{evento (3)}}$). Qual a velocidade do trem nesse caso?
- (d) Desenhe o diagrama de espaço-tempo $ct - x$ associado à passagem do trem pelo túnel, indicando as trajetórias de cada um dos elementos

descritos em (a) e também os eventos de (b). Verifique que de fato $t_{\text{evento (2)}} = t_{\text{evento (3)}}$. Discuta qualitativamente com base no gráfico como muda a relação entre $t_{\text{evento (2)}}$ e $t_{\text{evento (3)}}$ se o trem tiver uma velocidade diferente da que estamos considerando.

- ② Vamos agora discutir o que acontece na perspectiva de alguém que está olhando esse processo parado na parte da frente do trem. Para essa pessoa, o túnel se contrai em relação ao trem, então como é possível que as duas portas se fechem com o trem dentro? Para entender com mais clareza essa situação vamos primeiro definir o referencial inercial em que essa pessoa se encontra. Para isso, tomemos novamente o evento (1) como a origem de nosso espaço-tempo. Nosso novo referencial S' se move com velocidade $\vec{v} = v\hat{x}$ em relação a S , e portanto podemos relacionar eventos e trajetórias de pontos em S com trajetórias desses mesmos pontos em S' através das transformações de Lorentz:

$$\begin{pmatrix} ct_0 \\ x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

- (a) Com base no que foi discutido acima, escreva como são as quatro trajetórias descritas em 1-a) no referencial S' .
- (b) Desenhe o diagrama de espaço-tempo $ct_0 - x_0$ associado ao movimento dos corpos nesse referencial. Lembre-se de indicar as trajetórias do item anterior e os eventos descritos em 1-b). Com base no desenho, nesse referencial temos ainda que $t_{0,\text{evento (2)}} = t_{0,\text{evento (3)}}$?

Obs: Fique atento pois nas trajetórias x_0^μ nem sempre $t = 0$ está relacionado a $t_0 = 0$. Isso só acontece na origem do nosso sistema de coordenadas, portanto é necessário tomar cuidado já que de modo geral podemos ter $x_0(t_0 = 0) \neq x_0(t = 0)$.

- (c) Calcule agora a partir das transformações de Lorentz quais as coordenadas dos eventos descritos em 1-b) no referencial S' . Qual o valor

de $t_{0,\text{evento (3)}} - t_{0,\text{evento (2)}}$? Isso é condizente com seu desenho? Quais conclusões podemos tirar sobre o paradoxo?

- ③ Durante as aulas e nas listas de exercícios foi introduzido para vocês uma forma de representar mais de um referencial em um mesmo diagrama de espaço-tempo, como representado na Figura (2). Iremos agora tentar entender esse paradoxo qualitativamente a partir dessa outra perspectiva.

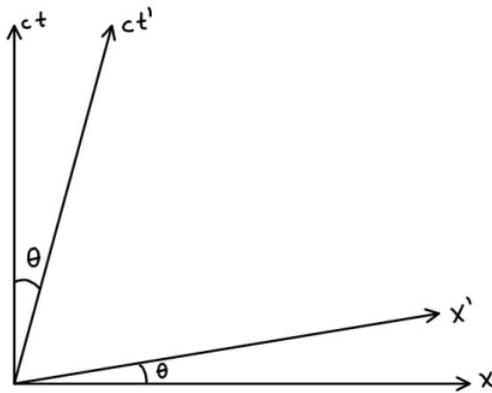


Figura 2: Diagrama contendo o referencial S e S' .

- (a) Desenhe esse diagrama para o caso do problema. Lembre-se de desenhar as trajetórias descritas em 1-a).
- (b) Sabemos que no referencial S o conjunto de todos os pontos possíveis associados a um mesmo instante de tempo é representado por uma linha horizontal nesse gráfico. Como podemos representar o conjunto de todos os pontos associados a um mesmo instante de tempo no referencial S' nesse gráfico? Represente essas linhas associadas a $t_{0,\text{evento (2)}} = t_{0,\text{evento (3)}}$ e a $t_{0,\text{evento (3)}}$. Que conclusões podemos tirar da relação entre $t_{0,\text{evento (2)}}$ e $t_{0,\text{evento (3)}}$ a partir disso?