# PLANTÃO DE DÚVIDAS DO DIA 9 DE OUTUBRO

## LISTA 4

14) Seja $V$ um espaço vetorial, e sejam $X$, $Y$ e $Z$ subespaços de $V$ tais que

$$X \cap (Y+Z) = Y \cap Z = \{0_V\}.$$

Mostre que, se $u$ em $X$, $v$ em $Y$ e $w$ em $Z$ são tais que $u+v+w = 0_V$, então $u = v = w = 0_V$.

RESOLUÇÃO.

Suponhamos que $u$ em $X$, $v$ em $Y$ e $w$ em $Z$ sejam tais que

$$u+v+w = 0_V.$$

Como, por hipótese, $u+v+w = 0_V$, $u = -(v+w)$. Logo, como $v+w \in Y+Z$ (pois $v \in Y$, e $w \in Z$), e como $Y+Z$ é um subespaço de $V$, $u$ pertence a $Y+Z$ e, portanto, também a $X \cap (Y+Z)$. Por sua vez, como $X \cap (Y+Z) = \{0_V\}$, disso resulta que $u = 0_V$. Consequentemente, $v+w = -u = 0$, e, portanto, $v = -w$. Sendo assim, como $v \in Y$, $w \in Z$, e $Z$ é um subespaço de $V$, podemos concluir que $v \in Y \cap Z$. E, como $Y \cap Z = \{0_V\}$, disso decorre, por sua vez, que $v = 0_V$, e, por conseguinte, também que $w = -v = 0_V$.

13) Sejam $U_1, U_2$, $W_1$ e $W_2$ subespaços de um espaço vetorial $V$ tais que $U_1 \oplus W_1 = U_2 \oplus W_2$. Mostre que, se $U_1 \subseteq U_2$, e $W_1 \subseteq W_2$, então $U_1 = U_2$, e $W_1 = W_2$.

RESOLUÇÃO.

Suponhamos que $U_1 \subseteq U_2$, e que $W_1 \subseteq W_2$. Como $U_1 \subseteq U_2$, para concluirmos que $U_1 = U_2$, basta mostrarmos que $U_2 \subseteq U_1$. Para isso, fixemos, inicialmente, $u_2$ em $U_2$ de modo arbitrário. Como $u_2 \in U_2$, e $U_2 \subseteq U_2 \oplus W_2 = U_1 \oplus W_1$, $u_2 \in U_1 \oplus W_1$. Logo, podemos, também, fixar $u_1$ em $U_1$ e $w_1$ em $W_1$ de modo que $u_2 = u_1 + w_1$. Feito isso, notemos que, como $u_2 = u_1 + w_1$, $w_1 = u_2 - u_1$, e, portanto, $w_1 \in U_2$ (pois $u_2 \in U_2$,

$u_1 \in U_1 \subseteq U_2$, e $U_2$ é um subespaço de $V$). Por sua vez, como $w_1 \in W_1$, e $W_1 \subseteq W_2$, $w_1 \in W_2$. Consequentemente, $w_1 \in U_2 \cap W_2 = \{0_V\}$, e, por conseguinte, $w_1 = 0_V$. E, como $u_2 = u_1 + w_1$, disso resulta que $u_2$ é igual a $u_1$ e, portanto, pertence a $U_1$ — a partir do que concluímos, em vista da arbitrariedade de $u_2$ em $U_2$ que, de fato, $U_2 \subseteq U_1$. Logo, $U_1 = U_2$. Analogamente, mostra-se que $W_1 = W_2$.