PNV 5856

METODOLOGIA DE CONTROLE NO ESPAÇO DE ESTADOS

AULA 3

Prof. Helio Mitio Morishita

2023

SOLUÇÃO DAS EQUAÇÔES DE ESTADO

Definição do tema do seminário

O Seminário consiste na aplicação da teoria de controle apresentada na disciplina

Equação de estado linear e invariante com o tempo

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u} \tag{8}$$

$$\mathbf{y} = C\mathbf{x} + D\mathbf{u} \tag{9}$$

Como obter a solução da homogêna

$\dot{\mathbf{x}} = e^{At}$?

Considere a sequinte equação diferencial ordinária com $k = 1$ (escalar) e sem o termo forçante:

$$\dot{x} = ax; \quad x(t_0) = x_0 \tag{10}$$

A solução geral da Eq. 10 é

$$x(t) = e^{at}c \tag{11}$$

A constante c pode ser obtida a partir das condições iniciais e vale:

$c = e^{-at_0}x_0$

Então a solução de Eq. 10 é dada por:

$$x(t) = e^{a(t-t_0)}x_0 \tag{12}$$

Agora, considere uma equação de estado com $k > 1$

$$\dot{x} = Ax; \quad x(t_0) = x_0; \quad x \in \mathbb{R}^{kx1}; \quad A \in \mathbb{R}^{kxk} \tag{13}$$

A solução, de modo similar ao caso escalar, é dada por:

$$x(t) = e^{At}c \tag{14}$$

onde

$$e^{At} = I + At + A^2\frac{t^2}{2} + A^3\frac{t^3}{3!} + ... \tag{15}$$

e $c = e^{-At_0}x_0$

Então, a solução da Eq. 13 é dada por

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0 \tag{16}$$

A matriz $\Phi(t) = e^{A(t-t_0)}$ é chamada de matriz de transição de estado.

Agora vamos considerar o termo forçante. Admite-se neste caso que a solução é do tipo

$$x(t) = e^{At}c(t);$$

Susbtituindo esta solução na Eq. 8 tem-se

$$Ae^{At}c(t) + e^{At}\dot{c}(t) = Ae^{At}c(t) + Bu(t) \tag{17}$$

Ou seja,

$$\dot{c}(t) = e^{-At}Bu(t) \tag{18}$$

Portanto

$$c(t) = \int_T^t e^{-A\lambda}Bu(\lambda)d\lambda \tag{19}$$

O limite inferior T deve ser definido juntamente com a solução particular. Este valor será calculado mais tarde. Então, a solução particular juntamente com a solução da homogênea é dada por:

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_T^t e^{A(t-\lambda)}Bu(\lambda)d\lambda \tag{20}$$

Agora temos condições de calcular o valor de T. Para $t = t_0$ tem-se

$$x(t_0) = x(t_0) + \int_T^{t_0} e^{A(t-\lambda)}Bu(\lambda)d\lambda \tag{21}$$

O termo integral da equação acima tem que ser nula para qualquer $u(t)$. Então, a única alternativa possível é $T = t_0$. Portanto a solução de Eq. 8 é dada por

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\lambda)}Bu(\lambda)d\lambda \tag{22}$$

A equação de saída é dada por:

$$y(t) = Ce^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^{t} Ce^{A(t-\lambda)}Bu(\lambda)d\lambda \tag{23}$$

O termo $Ce^{A(t-\lambda)}B$ é a resposta impulsiva do sistema.

3.1 Relação entre equações no espaço de estados e função de transferência

Nesta secção será apresentada a relação entre o modelo do espaço de estados e função de transferência. Para facilitar o seu entendimento, serão apresentados, inicialmente, de modo breve, alguns resultados envolvendo a transformada de Laplace.

$$\mathscr{L}[e^{at}] = \frac{1}{s-a} = (s-a)^{-1} \tag{24}$$

$$\mathscr{L}[e^{At}] = (sI - A)^{-1} \tag{25}$$

$$\mathscr{L}\Big[\int_0^t f_1(t-\lambda) f_2(\lambda) d\lambda\Big] = F_1(s) F_2(s) \tag{26}$$

Voltando ao espaço de estados, aplicando a transformada de Laplace para as Eqs. 8 e 9 para o caso SISO, obtém-se

$$X(s) = [sI - A]^{-1}x(0) + [sI - A]^{-1}BU(s) \tag{27}$$

$$Y(s) = C[sI - A]^{-1}x(0) + \{C[sI - A]^{-1}B + D\}U(s) \tag{28}$$

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u} \tag{8}$$

$$\mathbf{y} = C\mathbf{x} + D\mathbf{u} \tag{9}$$

Admitindo que $D = 0$ e $x(0) = 0$ tem-se que o termo $C[sI - A]^{-1}B$ é exatamente a função de transferência do sistema. Aplicando a transformada de Laplace à Eq. 23 obtem-se:

$$Y(s) = C\Phi(s)BU(s) \tag{29}$$

Desta forma conclui-se que:

$$\Phi(s) = [sI - A]^{-1} \tag{30}$$

Portanto $\Phi(s)$ pode ser obtido como:

$$\Phi(s) = \frac{adj[sI - A]}{|sI - A|} \tag{31}$$

A partir de $\Phi(s)$ a matriz de transição de estado pode ser obtido através de:

$$\Phi(t) = \mathscr{L}^{-1}[\Phi(s)] \tag{32}$$

Exemplo

Determinar a matriz de transição para a seguinte matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

$$[sI - A] = \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s+1 & -1 \\ 0 & 0 & s+5 \end{bmatrix}$$

$$\Phi(s) = [sI - A]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s(s+1)} & \frac{1}{s(s+1)(s+5)} \\ 0 & \frac{1}{(s+1)} & \frac{1}{(s+1)(s+5)} \\ 0 & 0 & \frac{1}{(s+5)} \end{bmatrix}$$

$$\phi(t) = \mathscr{L}^{-1}[\Phi(s)] = \begin{bmatrix} 1 & 1 - e^{-t} & \frac{1}{5} - \frac{1}{4}e^{-t} + \frac{1}{20}e^{-5t} \\ 0 & e^{-t} & \frac{1}{4}e^{-t} - \frac{1}{4}e^{-5t} \\ 0 & 0 & e^{-5t} \end{bmatrix}$$

3.2 Representações canônicas da equação de estado a partir da função de transferência

Considere a seguinte função de transferência

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^n + a_1 s^{n-1} + ... + a_n} \tag{33}$$

A equação diferencial correspondente é: $y^n + a_1 y^{n-1} + a_2 y^{n-2} + ... + a_n y = u$
Desta forma a equação de estado correspondente a Eq. 33 pode ser obtida efetuando-se a seguinte transformação de variáveis:

$$\begin{aligned} x_1 &= y \\ x_2 &= y^1 \\ . &\quad . \\ . &\quad . \\ x_n &= y^{n-1} \end{aligned} \tag{34}$$

onde $y_n = \frac{d^n y}{dt^n}$

Derivando as equações indicadas em 34 resulta:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ . & \quad . \\ . & \quad . \\ \dot{x}_n &= -a_1 x_1 - a_2 x_2 ... - a_n x_n + u \end{aligned} \tag{35}$$

Considerando a Eq. 35 e lembrando que $y = x_1$ obtem-se:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & 0 & 1 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ -a_n & -a_{n-1} & . & . & . & -a_1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & . & . & 0 \end{bmatrix}$$

Modo controlável

Se as variáveis de estado forem numeradas de modo invertida em relação ao caso anterior tem-se:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -a_1 x_1 - a_2 x_2 ... - a_n x_n + u \\ \dot{x}_2 &= x_1 \\ &. \quad\quad . \\ &. \quad\quad . \\ \dot{x}_n &= x_{n-1} \end{aligned} \tag{36}$$

Observando que neste caso a variável de saída é $y = x_n$ tem-se

$$A = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & -a_3 & . & . & -a_n \\ 1 & 0 & 0 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & \\ 0 & 0 & . & . & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ . \\ 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & . & . & 1 \end{bmatrix}$$

Ver exemplos no matlab com ss2tf e tf2ss.

3.2.2 Transformação das variáveis de estado

Se porventura as variáveis de estado e, por conseguinte, as equações de estado não forem convenientes, pode-se transformar as matrizes A, B, C e D da formulação original para um novo conjunto de matrizes $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$ e $\bar{D}$. Para isto, admita que existe uma matriz não singular T tal que permita efetuar a seguinte transformação linear:

$$z = Tx \tag{42}$$

Desta forma, o vetor de estado x pode ser expressa como:

$$x = T^{-1}z \tag{43}$$

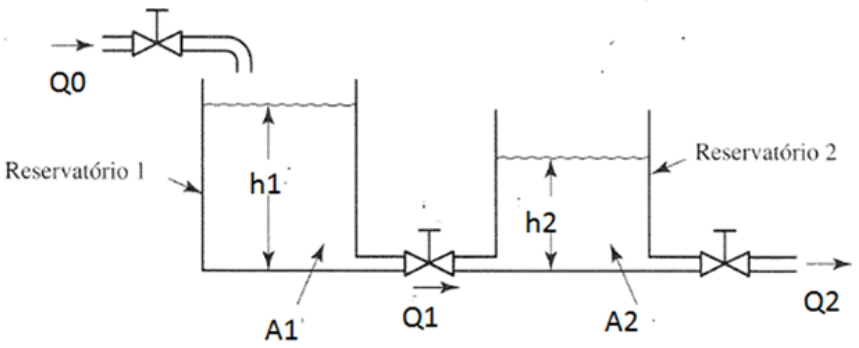
Substituindo a Eq. 43 nas Eqs. 8 e 9 tem-se:

$$\dot{z} = \bar{A}z + \bar{B} \tag{44}$$

$$y = \bar{C}z + \bar{D}u \tag{45}$$

onde $\bar{A} = TAT^{-1}$, $\bar{B} = TB$, $\bar{C} = CT^{-1}$ e $\bar{D} =$D

Exemplo

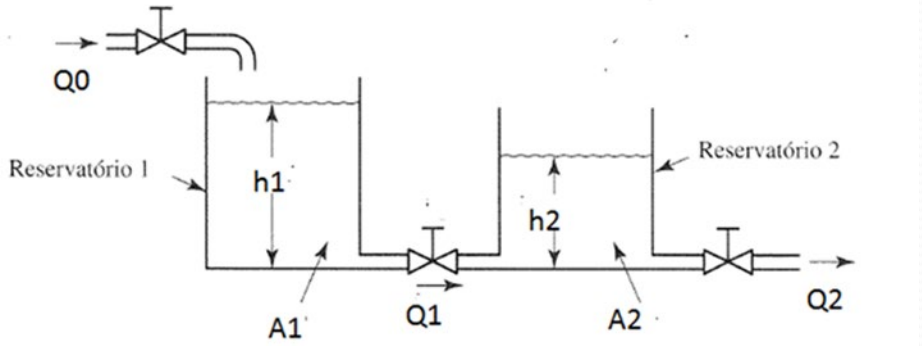


Admitindo que a variável de interesse seja o nível $\bar{h}_2$, a equação no espaço de estados da dinâmica do sistema é dada por:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\bar{h}}_1 \\ \dot{\bar{h}}_2 \end{bmatrix}}_{\dot{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{1}{R_1 A_1} & \frac{1}{R_1 A_1} \\ \frac{1}{R_1 A_2} & -\frac{R_1+R_2}{R_1 R_2 A_2} \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} \bar{h}_1 \\ \bar{h}_2 \end{bmatrix}}_{x} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{A_1} \\ 0 \end{bmatrix}}_{B} \underbrace{\bar{Q}_0}_{u}$$

$$\underbrace{\bar{h}_2}_{y} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}}_{C} \begin{bmatrix} \bar{h}_1 \\ \bar{h}_2 \end{bmatrix}$$

Neste caso as variáveis de estado são os níveis $\bar{h}_1$ e $\bar{h}_2$



Dados

$A_1 = 1m^2 \quad \text{e} \quad R_1 = 1s/m^2$

$A_2 = 2m^2 \quad \text{e} \quad R_2 = 2s/m^2$

Modelagem inicial

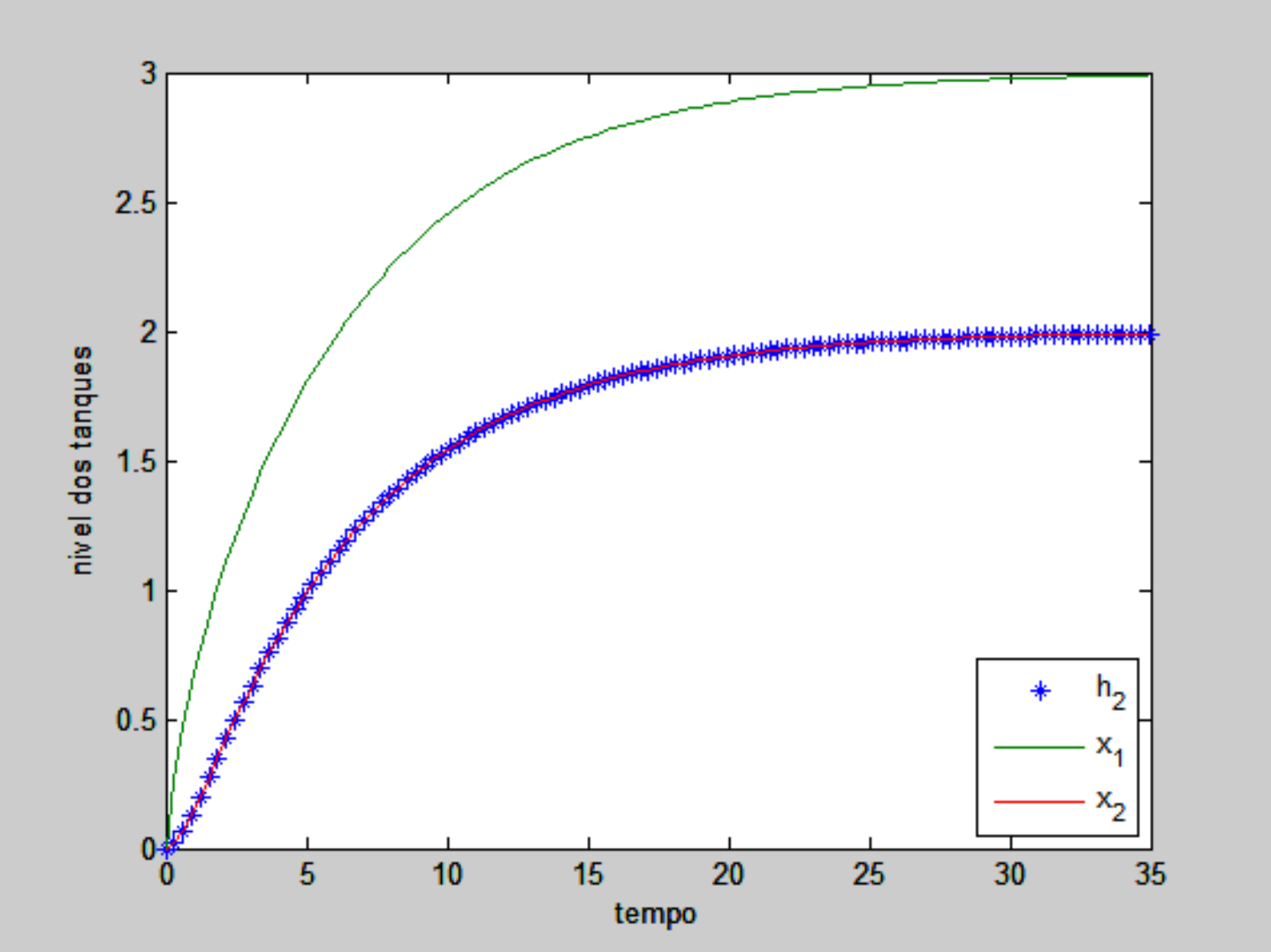
$$A_0 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0.5 & -0.75 \end{bmatrix}$$

$$B_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Função de transferência

$$H(s) = \frac{0.5}{s^2 + 1.75s + 0.25}$$


nivel dos tanques
tempo
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
0
5
10
15
20
25
30
35
h2
x1
x2

Transformação de variáveis 1

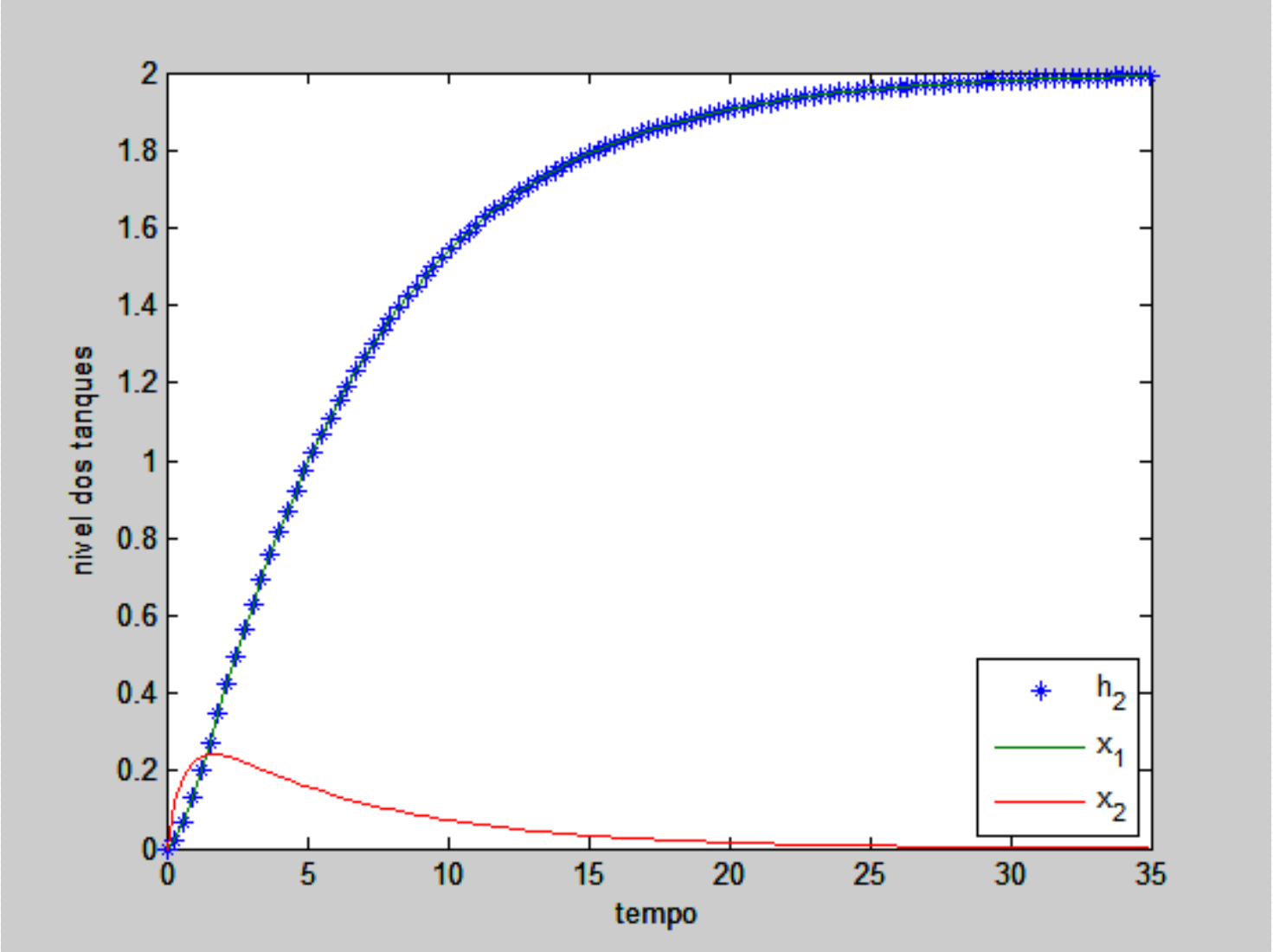
Seja

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0.5 & -0.75 \end{bmatrix}$$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.25 & -1.75 \end{bmatrix} \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.5 \end{bmatrix} \quad \bar{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Função de transferência

$$H(s) = \frac{0.5}{s^2 + 1.75s + 0.25}$$


nivel dos tanques
tempo
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
1.6
1.8
2
0
5
10
15
20
25
30
35
h2
x1
x2

Transformação de variáveis 2 (a partir da transformaçao 1)

Seja

$$T = \begin{bmatrix} 0.5266 & 0.3306 \\ 0.3306 & 2.1064 \end{bmatrix}$$

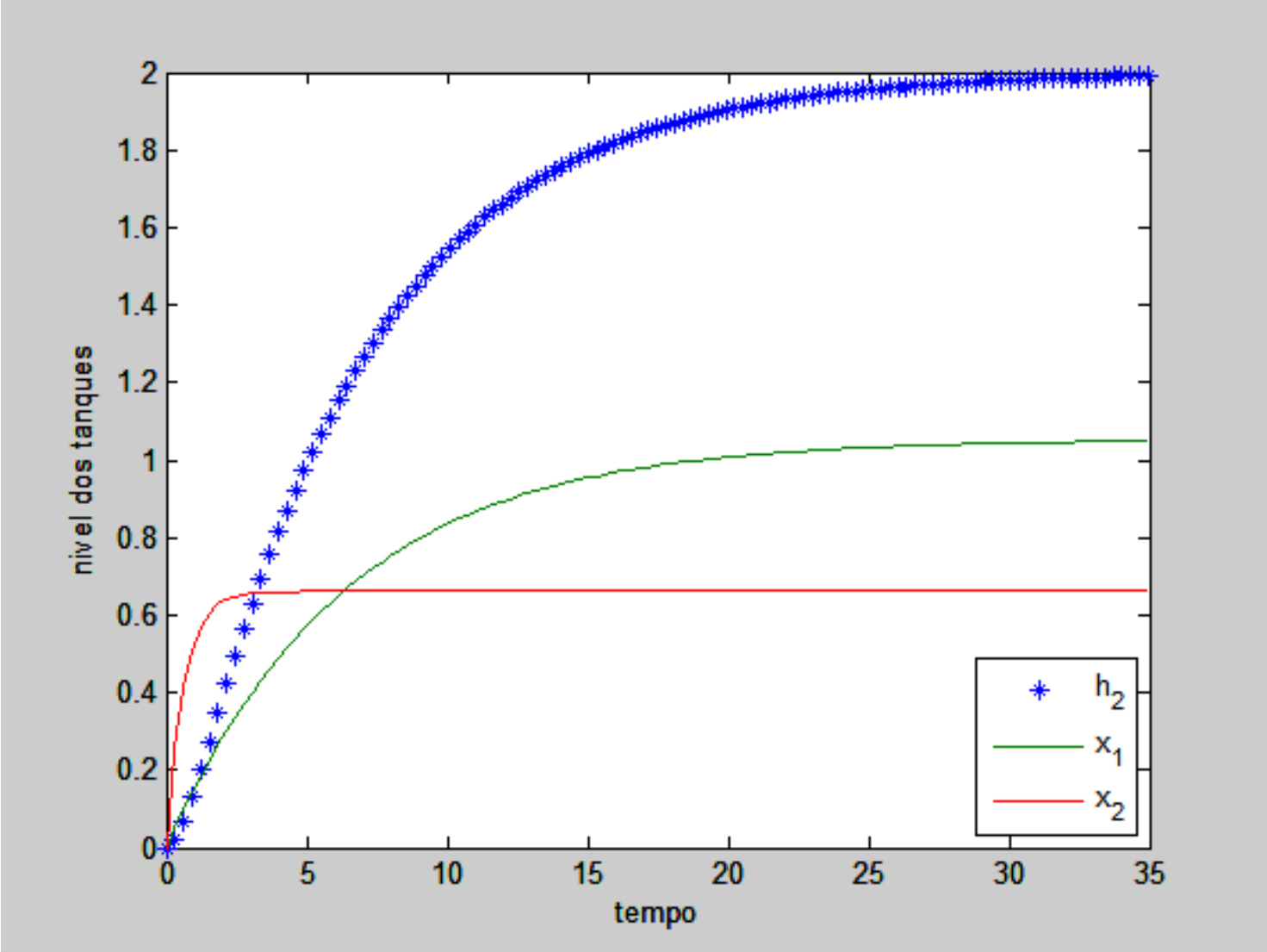
$$\bar{A} = \begin{bmatrix} -0.1569 & 0 \\ 0.0 & -1.5931 \end{bmatrix}$$

$$\bar{B} = \begin{bmatrix} 0.1653 \\ 1.0532 \end{bmatrix}$$

$$\bar{C} = \begin{bmatrix} 2.1064 & -0.3306 \end{bmatrix}$$

Função de transferência

$$H(s) = \frac{0.5}{s^2 + 1.75s + 0.25}$$


nivel dos tanques
tempo
h2
x1
x2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
1.6
1.8
2
0
5
10
15
20
25
30
35

3.2.3 Linearização em torno de um ponto de equilíbrio

Considere um sistema caracterizado pelas seguintes equações:

$$\dot{x} = f(x,u) \tag{46}$$

$$y = h(x,u) \tag{47}$$

onde $x \in \mathbb{R}^k$, $u \in \mathbb{R}^l$ e $y \in \mathbb{R}^m$

$$f(x,u) = \begin{bmatrix} f_1(x_1,x_2,..,x_k,u_1...,u_l) \\ f_2(x_1,x_2,..,x_k,u_1...,u_l) \\ . \\ . \\ f_k(x_1,x_2,..,x_k,u_1...,u_l) \end{bmatrix} \quad h(x,u) = \begin{bmatrix} g_1(x_1,x_2,..,x_k,u_1...,u_l) \\ g_2(x_1,x_2,..,x_k,u_1...,u_l) \\ . \\ . \\ g_m(x_1,x_2,..,x_k,u_1...,u_l) \end{bmatrix}$$

As linearizações são efetuadas em torno de um ponto de equilíbrio do modelo dinâmico do sistema. O par (x_{eq}, y_{eq}) é denominado de ponto de equilíbrio se $f(x_{eq}, u_{eq}) = 0$. O vetor das variáveis de saída é dado por $y_{eq} = h(x_{eq}, u_{eq})$. Ao efetuar a linearização das Eqs. 46 e 47 em torno do seu ponto de equilíbrio tem-se:

$$\dot{\bar{x}} = A\bar{x} + B\bar{u} \tag{48}$$

$$\bar{y} = C\bar{x} + D\bar{u} \tag{49}$$

onde $\bar{x} = x - x_{eq}$, $\bar{u} = u - u_{eq}$, $\bar{y} = y - y_{eq}$ e as matrizes A, B, C e D são matrizes Jacobianas, isto é:

$$A = \frac{\partial f(x_{eq},u_{eq})}{\partial x}, \quad B = \frac{\partial f(x_{eq},u_{eq})}{\partial u}, \quad C = \frac{\partial g(x_{eq},u_{eq})}{\partial x}, \quad D = \frac{\partial g(x_{eq},u_{eq})}{\partial u}$$

4 Estabilidade

Uma questão vital nos sistemas de controle é a sua estabilidade, isto é, a sua habilidade de "não se auto-destruir". Coexistem duas abordagens de estabilidade na literatura. A primeira delas se refere à capacidade do sistema de voltar ao seu ponto de equilíbrio após o seu afastamento do ponto de equilíbrio. Na segunda abordangem verifica-se a capacidade do sistema de produzir uma saída limitada pra uma entrada também limitada.

Para analisar a estabilidade do primeiro caso considere o seguinte sistema autônomo:

$$\dot{x} = f(x) \tag{50}$$

Definição de ponto de equilíbrio (Alternativa 1):

Um ponto $x = x_e$ no espaço de estado é um ponto de equilíbrio do sistema 50 se, sempre que for inicializado no ponto x_e ele permanece neste ponto para todos os instantes futuros.

O ponto de equilíbrio $x = x_e$ do sistema 50 é:

- a) estável se, para cada $\epsilon > 0$ existe δ tal que $\|x(0) - x_e\| < \delta \implies \|x(t) - x_e\| < \epsilon$;
- b) instável se não for estável;
- estável assintoticamente se for estável e δ puder ser escolhido tal que $\|x(0) - x_e\| < \delta \implies \lim_{t\to\infty} x(t) = x_e$

$$\dot{x} = f(x) \qquad (50)$$

Considere agora o sistema linear autônomo $\dot{x} = Ax$. Neste caso a resposta do sistema, para uma dada condiçao inicial $x(0) = x_0$, é dada por:
$x(t) = e^{At}x_0 = \Phi(t)x_0$

$\Phi(t)$ pode ser obtido através da Eq. 32 que requer $\Phi(s)$ que pode ser calculada pela Eq. 31. Esta última equação impõe o cálculo de $|sI - A| = 0$ que define exatamente os auto-valores da matriz A. Em termos de estabilidade pode-se concluir que:

- a) se a parte real de todos os auto-valores da matriz A forem negativos o sistema é assintoticamente estável;
- b) se a parte real de um auto-valor da matriz A for positivo o sistema é instável;
- c) se houver auto-valores com parte real nula simples e sem nenhum com parte real positiva, o sistema é estável (mas não assintoticamente);
- d) se houver raizes múltiplas com parte real nula o sistema é instável.

Definição de estabilidade (Alternativa 2):

Um sistema é estável se, para uma entrada limitada, a sua saída for também limitada.
Este tipo de estabilidade é denominado na literatura inglesa de bounded-input bounded-output (BIBO). Para analisar a estabilidade segundo este conceito pode-se utilizar a integral de convolução que estabelece a saída de um sistema linear, causal e invariante com o tempo:

$$y(t) = \int_0^t h(t-)u(\tau)d\tau \tag{51}$$

É possível mostrar que

$$\|y(t)\| \leq \int_0^t \|h(t-)\|\|u(\tau)\|d\tau \tag{52}$$

Como a entrada é limitada tem-se:

$$\|u(t)\| \leq M \quad para \quad qualquer \quad t \tag{53}$$

Substituindo Eq. 53 em 52 tem-se:

$$\|y(t)\| \leq M \int_0^t \|h(t-\tau)\|d\tau \tag{54}$$

$$\|y(t)\| \leq M \int_0^t \|h(t-\tau)\| d\tau \tag{54}$$

Analisando a resposta de um sistema a um impulso pode-se concluir que:

- se todos os pólos tiverem parte real negativa o sistema é estável;
- se tiver ao menos um pólo que parte real positiva o sistema é instável;
- se tiver pólos múltiplos com parte real nula o sistema é instável.

4.1 Estabilidade segundo o método de Lyapunov

4.1.1 Definições

- Função positiva semidefinida
  Uma função $V : D \to \mathbb{R}$ é chamada de positiva semidefinida em D se ela satisfaz as seguintes condições:
  1)$0 \in D \quad e \quad V(0) = 0$
  2) $V(x) \geq 0, \quad \forall x \quad em \quad D - \{0\}$

- Função positiva definida
  Uma função $V : D \to R$ é chamada de positiva definida em D se ela satisfaz as seguintes condições
  1) $0 \in D \quad e \quad V(0) = 0$
  2) $V(x) > 0, \quad \forall x \quad em \quad D - \{0\}$

- Função negativa semidefinida (definida)
  Uma função $V : D \to \mathbb{R}$ é denominada de negativa semidefinida (definida) em D se $-V$ é positiva semidefinida (definida).

Exemplo

Uma função positiva definida muito utilizada em controle é

$$V(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} = x^T Q x; \quad Q \in \mathbb{R}^{nxn}, \quad Q = Q^T \tag{55}$$

Seja λ_i os autovalores da matriz Q. Então, pode-se mostrar que:

- $V(x)$ é positiva definida $\Leftrightarrow$ $x^T Q x > 0, \quad \forall x \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_i > 0, \quad \forall i = 1, 2, ..., n$
- $V(x)$ é positiva semidefinida $\Leftrightarrow$ $x^T Q x \geq 0, \quad \forall x \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_i \geq 0, \quad \forall i = 1, 2, ..., n$
- $V(x)$ é negativa definida $\Leftrightarrow$ $x^T Q x < 0, \quad \forall x \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_i < 0, \quad \forall i = 1, 2, ..., n$
- $V(x)$ é negativa semidefinida $\Leftrightarrow$ $x^T Q x \leq 0, \quad \forall x \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_i \leq 0, \quad \forall i = 1, 2, ..., n$

$$V(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} = x^T Q x; \quad Q \in \mathbb{R}^{nxn}, \quad Q = Q^T \tag{55}$$

Obs.

- Se $V(x)$ definida pela Eq. 55 for positiva definida a matriz Q é denominada positiva definida.
- Também pode-se utilizar o conceito de menores principais de uma matriz em vez de autovalores para verificar se a função $V(x)$ é definida positiva (definida negativa) ou semidefinida positiva (semidefinida negativa)

Exemplos:

Verificar se as funções abaixo são positiva (negativa) definida (semidefinida) admitindo que $x \in \mathbb{R}^{3x1}$

1. $V(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^4$

2. $V(x) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2 + x_3^2$

3. $V(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_3^3$

4. $V(s) = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + x_3^2$

5. $V(x) = x_1^2 + x_2^2$

4.2 Método de Lyapunov

Sejam $x = 0$ um ponto de equilíbrio de $\dot{x} = f(x)$, $f : D \to \mathbb{R}^n$ e $V : D \to \mathbb{R}$ uma função continuamente diferenciável tal que:

- $1) V(0) = 0$
- $V(x) > 0 \quad$ em $D - \{0\}$
- $\dot{V}(x) \leq$ em $D - \{0\}$

Então, $x = 0$ é um ponto de equilíbrio estável. Se ocorrer

- $1) V(0) = 0$
- $V(x) > 0 \quad$ em $D - \{0\}$
- $\dot{V}(x) <$ em $D - \{0\}$

Então, $x = 0$ é um ponto assintoticamente estável.

4.3 Análise de estabilidade para sistemas lineares invariantes no tempo

Considere o seguinte sistema autônomo:

$$\dot{x} = Ax \quad A \in \mathbb{R}^{nxn} \tag{56}$$

e seja $V(x)$ definida como:

$$V(x) = x^T P x$$

onde $P \in \mathbb{R}^{nxn}$ é simétrica e positiva definida. Com estas definições $V(x)$ é positiva definida e a sua derivada em relação ao tempo é dada por:

$$\dot{V} = \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x}$$

$$\dot{x} = Ax \quad A \in \mathbb{R}^{nxn} \tag{56}$$

Da Eq. 56 obtem-se

$$\dot{x}^T = x^T A^T$$

Assim

$$\dot{V} = x^T A^T x + x^T P \dot{x} = x^T (A^T P + PA) x \tag{57}$$

Ou,

$$\dot{V} = -x^T Q x \tag{58}$$

onde

$$PA + A^T P = -Q \tag{59}$$

A matriz Q é simétrica. Se Q é positiva definida então $\dot{V}$ é negativa definida e a origem é assintoticamente estável.