

PNV 5856

METODOLOGIA DE CONTROLE NO ESPAÇO DE ESTADOS

AULA 2

Prof. Helio Mitio Morishita

2023

Definição do tema do seminário

O Seminário consiste na aplicação da teoria de controle apresentada na disciplina

EXEMPLO DE MODELAGEM

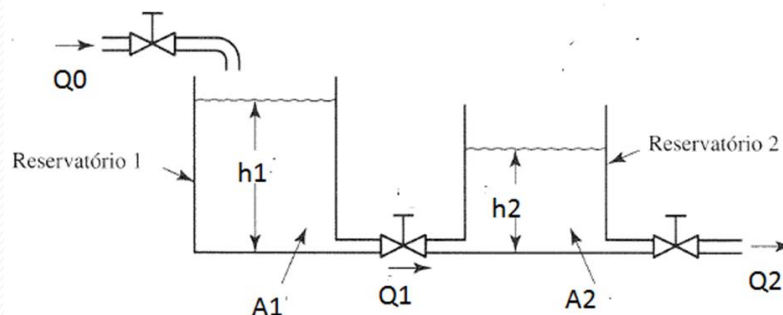
3.4 Exemplos de equação de estado

EXEMPLO 1

Foi mostrado que o modelo matemático linear de dois tanques com interação é dado por:

$$A_1 \frac{d\bar{h}_1}{dt} = \bar{Q}_0 - \frac{\bar{h}_1 - \bar{h}_2}{R_1} \quad (1)$$

$$A_2 \frac{d\bar{h}_2}{dt} = \frac{\bar{h}_1 - \bar{h}_2}{R_1} - \frac{\bar{h}_2}{R_2} \quad (2)$$



Admitindo que a variável de interesse seja o nível $\bar{h}_2$, a equação no espaço de estados da dinâmica do sistema é dada por:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\bar{h}}_1 \\ \dot{\bar{h}}_2 \end{bmatrix}}_{\dot{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{1}{R_1 A_1} & \frac{1}{R_1 A_1} \\ \frac{1}{R_1 A_2} & -\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 A_2} \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} \bar{h}_1 \\ \bar{h}_2 \end{bmatrix}}_x + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{A_1} \\ 0 \end{bmatrix}}_B \underbrace{\bar{Q}_0}_u$$

$$\underbrace{\bar{h}_2}_y = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}}_C \begin{bmatrix} \bar{h}_1 \\ \bar{h}_2 \end{bmatrix}$$

Neste caso as variáveis de estado são os níveis $\bar{h}_1$ e $\bar{h}_2$



EXEMPLO 2

Considere o modelo matemático da dinâmica de um sistema massa-mola-amortecedor:

$$M\ddot{y} + B\dot{y} + Ky = f(t) \quad (3)$$

Pode-se efetuar as seguintes mudanças de variáveis:

$$x_1 = y \quad (4)$$

$$x_2 = \dot{y} \quad (5)$$

Derivando as Eqs 4 e 5 tem-se:

$$\dot{x}_1 = \dot{y} = x_2 \quad (6)$$

$$\dot{x}_2 = \ddot{y} = -\frac{K}{M}x_1 - \frac{B}{M}x_2 + f(t) \quad (7)$$

As Eqs 6 e 7 juntamente com a equação de saída podem ser escritas no espaços de estados como:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}}_{\dot{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K}{M} & -\frac{B}{M} \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_x + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix}}_B \underbrace{f(t)}_u \quad (8)$$

$$\underbrace{x_1}_y = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_C \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (9)$$

As variáveis de estado neste caso são a posição $y = x_1$ e a velocidade $\dot{y} = x_2$.

Modelagem da dinâmica de uma embarcação

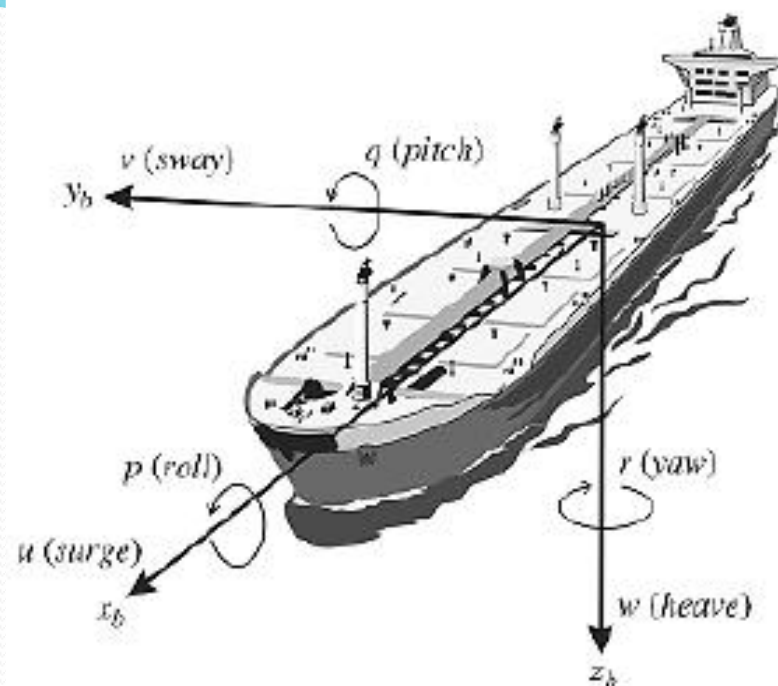


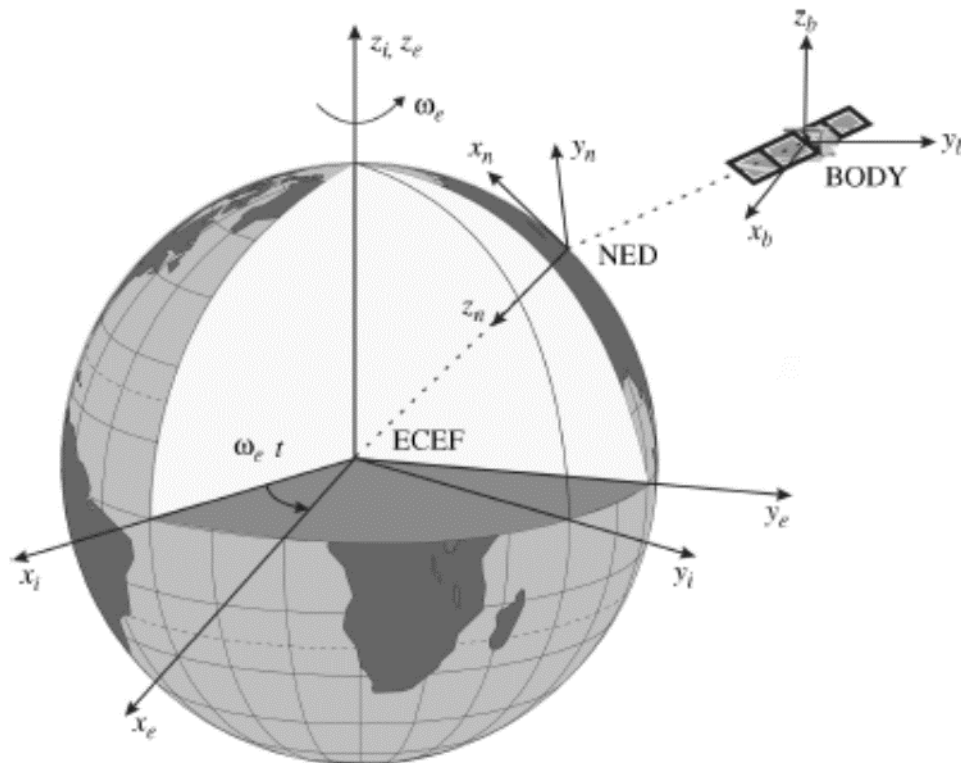
Table 2.1 The notation of SNAME (1950) for marine vessels

DOF		Forces and moments	Linear and angular velocities	Positions and Euler angles
1	motions in the x direction (surge)	X	u	x
2	motions in the y direction (sway)	Y	v	y
3	motions in the z direction (heave)	Z	w	z
4	rotation about the x axis (roll, heel)	K	p	ϕ
5	rotation about the y axis (pitch, trim)	M	q	θ
6	rotation about the z axis (yaw)	N	r	ψ

MODELAGEM DA DINÂMICA DE CORPOS RÍGIDOS NO ESPAÇO

Sistemas de Referência

- Referencial Inercial (NED)
- Referencial Conectado ao Corpo (BODY)



NED position $\mathbf{p}_{b/n}^n = \begin{bmatrix} N \\ E \\ D \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$

Attitude (Euler angles) $\mathbf{\Theta}_{nb} = \begin{bmatrix} \phi \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix} \in \mathcal{S}^3$

Body-fixed linear velocity $\mathbf{v}_{b/n}^b = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$

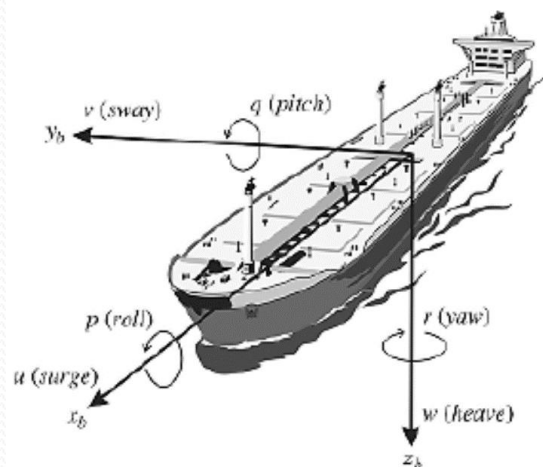
Body-fixed angular velocity $\mathbf{\omega}_{b/n}^b = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$

Body-fixed force $\mathbf{f}_b^b = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$

Body-fixed moment $\mathbf{m}_b^b = \begin{bmatrix} K \\ M \\ N \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$

$$\boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_{b/n}^n \text{ (or } \mathbf{p}_{b/n}^e) \\ \mathbf{\Theta}_{nb} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{b/n}^b \\ \mathbf{\omega}_{b/n}^b \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_b^b \\ \mathbf{m}_b^b \end{bmatrix}$$

EQUAÇÕES DA DINÂMICA PARA O REFERENCIAL CONECTADO AO CORPO



$$\begin{aligned}
 m [\dot{u} - vr + wq - x_g(q^2 + r^2) + y_g(pq - \dot{r}) + z_g(pr + \dot{q})] &= X \\
 m [\dot{v} - wp + ur - y_g(r^2 + p^2) + z_g(qr - \dot{p}) + x_g(qp + \dot{r})] &= Y \\
 m [\dot{w} - uq + vp - z_g(p^2 + q^2) + x_g(rp - \dot{q}) + y_g(rq + \dot{p})] &= Z \\
 I_x \dot{p} + (I_z - I_y)qr - (\dot{r} + pq)I_{xz} + (r^2 - q^2)I_{yz} + (pr - \dot{q})I_{xy} \\
 + m [y_g(\dot{w} - uq + vp) - z_g(\dot{v} - wp + ur)] &= K \\
 I_y \dot{q} + (I_x - I_z)rp - (\dot{p} + qr)I_{xy} + (p^2 - r^2)I_{zx} + (qp - \dot{r})I_{yz} \\
 + m [z_g(\dot{u} - vr + wq) - x_g(\dot{w} - uq + vp)] &= M \\
 I_z \dot{r} + (I_y - I_x)pq - (\dot{q} + rp)I_{yz} + (q^2 - p^2)I_{xy} + (rq - \dot{p})I_{zx} \\
 + m [x_g(\dot{v} - wp + ur) - y_g(\dot{u} - vr + wq)] &= N
 \end{aligned}$$

$$M_{RB}\dot{\mathbf{v}} + C_{RB}(\mathbf{v})\mathbf{v} = \boldsymbol{\tau}_{RB}$$

$$\boldsymbol{\tau}_{RB} = [X \quad Y \quad Z \quad K \quad M \quad N]^T$$

TRANSFORMAÇÃO DA VELOCIDADE LINEAR

$$\dot{p}_{b/n}^n = R_b^n(\Theta_{nb}) v_{b/n}^b$$

$$R_b^n(\Theta_{nb}) = \begin{bmatrix} c\psi c\theta & -s\psi c\phi + c\psi s\theta s\phi & s\psi s\phi + c\psi c\phi s\theta \\ s\psi c\theta & c\psi c\phi + s\phi s\theta s\psi & -c\psi s\phi + s\theta s\psi c\phi \\ -s\theta & c\theta s\phi & c\theta c\phi \end{bmatrix}$$

NED position $p_{b/n}^n = \begin{bmatrix} N \\ E \\ D \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$

Attitude (Euler angles) $\Theta_{nb} = \begin{bmatrix} \phi \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix} \in \mathcal{S}^3$

Body-fixed linear velocity $v_{b/n}^b = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$

Body-fixed angular velocity $\omega_{b/n}^b = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$

Body-fixed force $f_b^b = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$

Body-fixed moment $m_b^b = \begin{bmatrix} K \\ M \\ N \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$

TRANSFORMAÇÃO DA VELOCIDADE ANGULAR

$$\dot{\Theta}_{nb} = T_{\Theta}(\Theta_{nb})\omega_{b/n}^b$$

$$T_{\Theta}(\Theta_{nb}) = \begin{bmatrix} 1 & s\phi t\theta & c\phi t\theta \\ 0 & c\phi & -s\phi \\ 0 & s\phi/c\theta & c\phi/c\theta \end{bmatrix}$$

NED position	$p_{b/n}^e = \begin{bmatrix} N \\ E \\ D \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$	Attitude (Euler angles)	$\Theta_{nb} = \begin{bmatrix} \phi \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix} \in \mathcal{S}^3$
Body-fixed linear velocity	$v_{b/n}^b = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$	Body-fixed angular velocity	$\omega_{b/n}^b = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$
Body-fixed force	$f_b^b = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$	Body-fixed moment	$m_b^b = \begin{bmatrix} K \\ M \\ N \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$

EQUAÇÕES DA DINÂMICA DE UM CORPO NO ESPAÇO

$$\dot{\eta} = J_{\Theta}(\eta)v$$

$$M_{RB}\dot{v} + C_{RB}(v)v = \tau_{RB}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{p}_{b/n}^n \\ \dot{\Theta}_{nb} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_b^n(\Theta_{nb}) & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & T_{\Theta}(\Theta_{nb}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{b/n}^b \\ \omega_{b/n}^b \end{bmatrix}$$

$$\eta = \begin{bmatrix} p_{b/n}^n \text{ (or } p_{b/n}^e) \\ \Theta_{nb} \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} v_{b/n}^b \\ \omega_{b/n}^b \end{bmatrix}, \quad \tau = \begin{bmatrix} f_b^b \\ m_b^b \end{bmatrix}$$

GRAUS DE LIBERDADE PARA O SISTEMA DE CONTROLE

- 1 DOF** models can be used to design forward speed controllers (*surge*), heading autopilots (*yaw*) and roll damping systems (*roll*).
- 3 DOF** models are usually:
- Horizontal plane models (*surge*, *sway* and *yaw*) for ships, semi-submersibles and underwater vehicles that are used in dynamic positioning systems, trajectory-tracking control systems and path-following systems. For slender bodies such as submarines, it is also common to assume that the motions can be decoupled into *longitudinal* and *lateral* motions.
 - Longitudinal models (*surge*, *heave* and *pitch*) for forward speed, diving and pitch control.
 - Lateral models (*sway*, *roll* and *yaw*) for turning and heading control.
- 4 DOF** models (*surge*, *sway*, *roll* and *yaw*) are usually formed by adding the roll equation to the 3 DOF horizontal plane model. These models are used in maneuvering situations where it is important to include the rolling motion, usually in order to reduce roll by active control of fins, rudders or stabilizing liquid tanks.
- 6 DOF** models (*surge*, *sway*, *heave*, *roll*, *pitch* and *yaw*) are fully coupled equations of motion used for simulation and prediction of coupled vehicle motions. These models can also be used in advanced control systems for underwater vehicles that are actuated in all DOF.

Exemplo de aplicação de espaço de estados na área de saúde

EXAMPLE 3.3 Spread of an epidemic disease

The spread of an epidemic disease can be described by a set of differential equations. The population under study is made up of three groups, x_1 , x_2 , and x_3 , such that the group x_1 is susceptible to the epidemic disease, group x_2 is infected with the disease, and group x_3 has been removed from the initial population. The removal of x_3 will be due to immunization, death, or isolation from x_1 . The feedback system can be represented by the following equations:

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= -\alpha x_1 - \beta x_2 + u_1(t), \\ \frac{dx_2}{dt} &= \beta x_1 - \gamma x_2 + u_2(t), \\ \frac{dx_3}{dt} &= \alpha x_1 + \gamma x_2.\end{aligned}$$

The rate at which new susceptibles are added to the population is equal to $u_1(t)$, and the rate at which new infectives are added to the population is equal to $u_2(t)$. For a closed population, we have $u_1(t) = u_2(t) = 0$. It is interesting to note that these equations could equally well represent the spread of information or a new idea through a population.

The physical state variables for this system are x_1 , x_2 , and x_3 . The model that represents this set of differential equations is shown in Figure 3.20. The vector differential equation is equal to

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha & -\beta & 0 \\ \beta & -\gamma & 0 \\ \alpha & \gamma & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}. \quad (3.63)$$

SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DE ESTADO

Resposta de um sistema a uma entrada $x(t)$

$$y(t) = \int_0^t x(\lambda) h(t - \lambda) d\lambda \quad ?$$

$h(t - \tau)$ Resposta de um sistema a um impulso

Definição de transformada de Laplace

$$\mathcal{L}[x(t)] = X(s) = \int_0^{\infty} x(t) e^{-st} dt \quad ?$$

$$s = \sigma + j\omega$$



Equação de estado linear e invariante com o tempo

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (8)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} \quad (9)$$

Como obter a solução da homogêna

$$\dot{x} = e^{At} ?$$

Considere a seguinte equação diferencial ordinária com $k = 1$ (escalar) e sem o termo forçante:

$$\dot{x} = ax; \quad x(t_0) = x_0 \quad (10)$$

A solução geral da Eq. 10 é

$$x(t) = e^{at}c \quad (11)$$

A constante c pode ser obtida a partir das condições iniciais e vale:

$$c = e^{-at_0}x_0$$

Então a solução de Eq. 10 é dada por:

$$x(t) = e^{a(t-t_0)}x_0 \quad (12)$$

Agora, considere uma equação de estado com $k > 1$

$$\dot{x} = Ax; \quad x(t_0) = x_0; \quad x \in \mathbb{R}^{k \times 1}; \quad A \in \mathbb{R}^{k \times k} \quad (13)$$

A solução, de modo similar ao caso escalar, é dada por:

$$x(t) = e^{At}c \quad (14)$$

onde

$$e^{At} = I + At + A^2 \frac{t^2}{2} + A^3 \frac{t^3}{3!} + \dots \quad (15)$$

$$\text{e } c = e^{-At_0}x_0$$

Então, a solução da Eq. 13 é dada por

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0 \quad (16)$$

A matriz $\Phi(t) = e^{A(t-t_0)}$ é chamada de matriz de transição de estado.

Agora, considere uma equação de estado com $k > 1$

$$\dot{x} = Ax; \quad x(t_0) = x_0; \quad x \in \mathbb{R}^{k \times 1}; \quad A \in \mathbb{R}^{k \times k} \quad (13)$$

A solução, de modo similar ao caso escalar, é dada por:

$$x(t) = e^{At}c \quad (14)$$

onde

$$e^{At} = I + At + A^2 \frac{t^2}{2} + A^3 \frac{t^3}{3!} + \dots \quad (15)$$

$$\text{e } c = e^{-At_0}x_0$$

Então, a solução da Eq. 13 é dada por

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0 \quad (16)$$

A matriz $\Phi(t) = e^{A(t-t_0)}$ é chamada de matriz de transição de estado.

Agora vamos considerar o termo forçante. Admite-se neste caso que a solução é do tipo

$$x(t) = e^{At}c(t);$$

Susbtituindo esta solução na Eq. 8 tem-se

$$Ae^{At}c(t) + e^{At}\dot{c}(t) = Ae^{At}c(t) + Bu(t) \quad (17)$$

Ou seja,

$$\dot{c}(t) = e^{-At}Bu(t) \quad (18)$$

Portanto

$$c(t) = \int_T^t e^{-A\lambda}Bu(\lambda)d\lambda \quad (19)$$



O limite inferior T deve ser definido juntamente com a solução particular. Este valor será calculado mais tarde. Então, a solução particular juntamente com a solução da homogênea é dada por:

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_T^t e^{A(t-\lambda)}Bu(\lambda)d\lambda \quad (20)$$

Agora temos condições de calcular o valor de T . Para $t = t_0$ tem-se

$$x(t_0) = x(t_0) + \int_T^{t_0} e^{A(t-\lambda)}Bu(\lambda)d\lambda \quad (21)$$

O termo integral da equação acima tem que ser nula para qualquer $u(t)$. Então, a única alternativa possível é $T = t_0$. Portanto a solução de Eq. 8 é dada por

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\lambda)}Bu(\lambda)d\lambda \quad (22)$$

A equação de saída é dada por:

$$y(t) = Ce^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^t Ce^{A(t-\lambda)}Bu(\lambda)d\lambda \quad (23)$$

O termo $Ce^{A(t-\lambda)}B$ é a resposta impulsiva do sistema.

Recordação

- Soluções de equações diferenciais
Resposta impulsiva de um sistema
- Transformada de Fourier
- Transformada de Laplace

Os modelos de sistemas dinâmicos recaem em equações diferenciais. Como resolvê-las?

- a) resolver diretamente a equação diferencial. Este procedimento nem sempre é possível pois muitas vezes é difícil obter a solução particular;
- b) Dividir a entrada em conjunto de funções elementares, todas similares em forma. Obtém-se então a resposta do sistema para a função elementar e a resposta será então a composição da entrada de todas as funções elementares.

3.1 RESPOSTA DE UM SISTEMA CONTÍNUO NO DOMÍNIO DO TEMPO

3.1.1 DECOMPOSIÇÃO DE SINAIS CONTÍNUOS NO TEMPO EM IMPULSOS UNIDADE

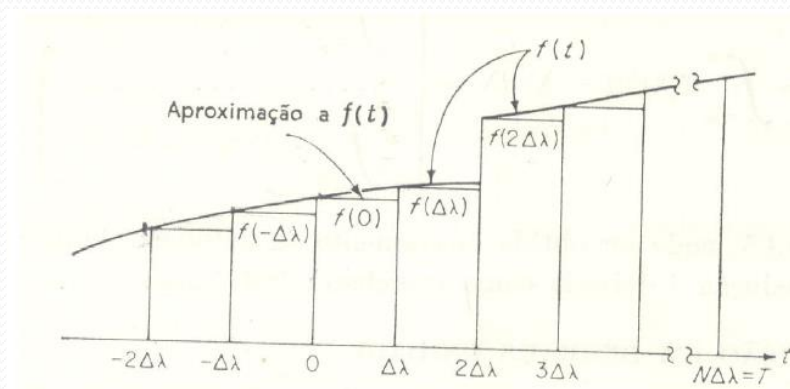
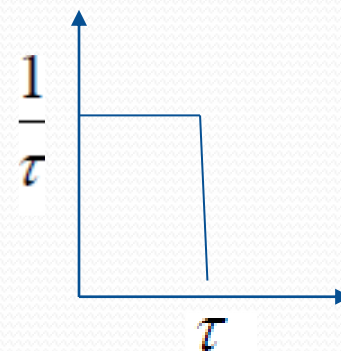


Fig. 3.1 Decomposição de um sinal em pulso unidade

$$p_{\tau}(t) = \begin{cases} \frac{1}{\tau} & \text{para } 0 \leq t < \tau \\ 0 & \text{para } t < 0 \text{ e } t \geq \tau \end{cases}$$

Função pulso



$$f(t) \cong \sum_{k=-N}^N f(k\Delta\lambda) p_{\Delta\lambda}(t - k\Delta\lambda) \Delta\lambda \quad \text{para } -T \leq t \leq T$$

$$f(t) = \int_{-T}^T f(\lambda) \delta(t - \lambda) d\lambda$$

$$\Delta\lambda \rightarrow 0 \text{ e } N \rightarrow \infty;$$

δ é o impulso unidade ou delta de Dirac.

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) \delta(t - \lambda) d\lambda$$

$$T \rightarrow \infty$$

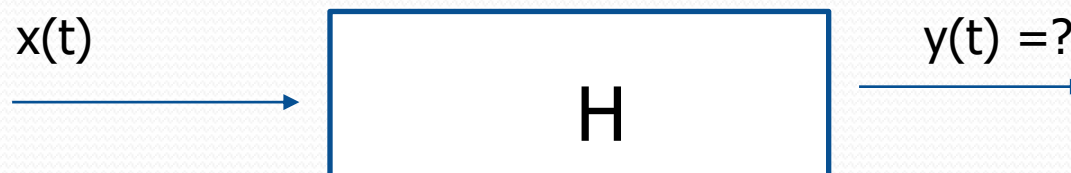
Delta de Dirac é o sinal elementar

3.1.2 RESPOSTA A IMPULSO EM SISTEMAS CONTÍNUOS NO TEMPO

A resposta a impulso de um sistema linear é função do tempo que, em geral, depende também do instante de aplicação do impulso. Assim, definimos

$h(t, \tau) = H\delta(t - \tau)$ = resposta de H no instante t ao impulso unidade δ aplicado no instante τ .

H deve ser entendida como sendo um operado matemático.



$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda) \delta(t - \lambda) d\lambda$$

$$y(t) = Hx(t) = H \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda) \delta(t - \lambda) d\lambda \quad (3.6)$$

Se o sistema é *linear* a equação (3.6) pode ser reescrita como:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda) H \delta(t - \lambda) d\lambda$$

Como $h(t, \tau) = H \delta(t - \tau)$ a resposta do sistema é dada por:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda) h(t, \lambda) d\lambda$$

Casos particulares

Sistema causal

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\lambda) h(t, \lambda) d\lambda$$

$$h(t, \lambda) = 0 \text{ para } \lambda > t$$

Sistema causal e invariante no tempo

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\lambda) h(t - \lambda) d\lambda$$

$$h(t, \tau) = H\delta(t - \tau) = h(t - \tau)$$

Sistema causal e invariante

Em controle admite-se que $x(t)=0$ para $t<0$.

$$y(t) = \int_0^t x(\lambda) h(t - \lambda) d\lambda$$

Integral de convolução



$$y(t) = \int_0^t x(\lambda)h(t - \lambda)d\lambda$$

Mas, fugimos de uma equação diferencial e temos que resolver uma integral. Resolvemos o nosso problema?

Aparentemente não, mas esta equação é fundamental para se chegar a outros resultados.

Uma outra desvantagem da integral é que ela não permite prever de imediato o formato do sinal de saída.

Outro sinal elementar

$$e^{st}$$

$$s = \sigma + \omega j$$

$$\frac{de^{st}}{dt} = se^{st}$$

$$\int_{-\infty}^t e^{st} dt = \frac{1}{s} e^{st} \text{ se } \operatorname{Re} s > 0$$

Este sinal mantém a sua estrutura quando ele é derivado ou integrado

3.2.1 TRANSFORMADA DE FOURIER

Série de Fourier

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{jn\omega_0 t} \quad -T/2 < t < T/2$$

onde $\omega_0 = 2\pi/T$

$$X_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

Transformada de Fourier de $x(t)$

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt \quad (T \rightarrow \infty) \quad (3.14)$$

Para que exista a integral definida pela equação (3.14) é necessário que:

a) $x(t)$ seja muito lisa por partes; (3.16.a)

$$b) \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty \quad (3.16.b)$$

3.2.2 TRANSFORMADA DE LAPLACE

Para garantir a condição 3.16b pode-se multiplicar a função $x(t)$ por $e^{-\sigma t}$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)e^{-\sigma t}| dt = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| e^{-\sigma t} dt < \infty$$

$$X(\sigma + j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-\sigma t} e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-(\sigma + j\omega)t} dt$$

$$s = \sigma + j\omega$$

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-st} dt$$

Em controle, normalmente, admite-se que a entrada $x(t)$ é nula para $t < 0$.

Transformada de Laplace

$$\mathcal{L}[x(t)] = X(s) = \int_0^{\infty} x(t) e^{-st} dt$$

Transformada de Laplace

$$\mathcal{L}\{x(t)\} = X(s) = \int_0^{\infty} x(t)e^{-st} dt$$

Em $X(s)$ o tempo desaparece

Transformada de Laplace inversa

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s)e^{st} ds$$

Tabela 4.1 Exemplos da Transformada de Laplace

		$f(t)$	$F(s)$
1	Impulso	$\delta(t)$	1
2	Degrau unitário	$\mu_{-1}(t)$	$\frac{1}{s}$
3	Rampa	t	$\frac{1}{s^2}$
4	Exponencial	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
5	"seno"	$\text{sen } \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
6	"cosseno"	$\text{cos } \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$

Obs. a) $f(t) = 0$ para $t < 0$

$$\text{b) } \mu_{-1}(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } t < 0 \\ 1 & \text{para } t \geq 0 \end{cases}$$



4.1.2 TEOREMAS DE TRANSFORMADA DE LAPLACE

A seguir será admitida que $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$

a) Homogeneidade

$$\mathcal{L}[af(t)] = a\mathcal{L}[f(t)] = aF(s)$$

onde a é uma constante

b) Aditividade

$$\mathcal{L}[f_1(t) \pm f_2(t)] = F_1(s) \pm F_2(s)$$

c) Translação no tempo

$$\mathcal{L}[f(t-a)\mu_{-1}(t-a)] = e^{-as}F(s) \text{ (ver Fig. 3.1)}$$

onde a é um número real positivo.

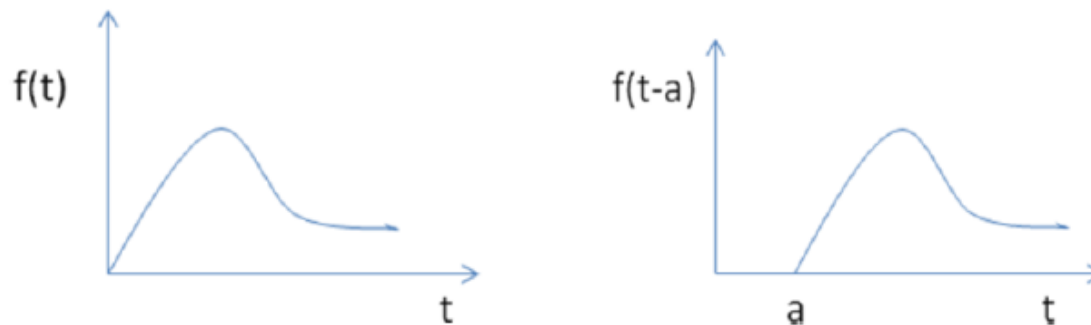
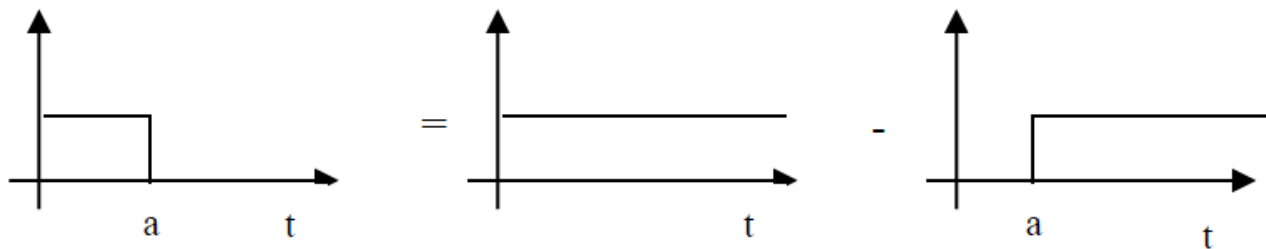


Fig. 4.1 Funções $f(t)\mu_{-1}(t)$ e $f(t-a)\mu_{-1}(t-a)$

EXEMPLOS ?

FUNÇÃO PULSO



Esta função pode ser definida como:

$$f(t) = \mu_{-1}(t) - \mu_{-1}(t - a)$$

A Transformada de Laplace desta função, usando o teorema de translação no tempo, é:

$$F(s) = \frac{1}{s} - e^{-as} \frac{1}{s} = \frac{1}{s} (1 - e^{-as})$$

a) Derivada Complexa

$$\mathcal{L}[tf(t)] = -\frac{dF(s)}{ds}$$

b) Translação no domínio de s

$$\mathcal{L}[e^{at} f(t)] = F(s - a)$$

onde a é real ou complexa.

Exemplo:

$$\mathcal{L}[e^{-\alpha t} \cos(\omega t)] = \frac{s + \alpha}{(s + \alpha)^2 + \omega^2}$$

6	"cosseno"	$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
---	-----------	-----------------	----------------------------

f) Derivada real

$$\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = sF(s) - f(0^+)$$

$$\text{onde } f(0^+) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t)$$

Neste teorema é admitido que existe a Transformada de Laplace de $\frac{df(t)}{dt}$:

A Transformada de Laplace da segunda derivada é dada por:

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2 f(t)}{dt^2}\right] = s^2 F(s) - sf(0) - f'(0)$$

Para a Transformada de Laplace de derivada de ordem n de uma função $f(t)$ tem-se:

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}\dot{f}(0) - \dots - sf^{n-2}(0) - f^{n-1}$$

a) Derivada Complexa

$$\mathcal{L}[tf(t)] = -\frac{dF(s)}{ds}$$

b) Translação no domínio de s

$$\mathcal{L}[e^{at} f(t)] = F(s - a)$$

onde a é real ou complexa.

Exemplo:

$$\mathcal{L}[e^{-\alpha t} \cos(\omega t)] = \frac{s + \alpha}{(s + \alpha)^2 + \omega^2}$$

6	"cosseno"	$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
---	-----------	-----------------	----------------------------

Tabela 4.1 Exemplos da Transformada de Laplace

		$f(t)$	$F(s)$
1	Impulso	$\delta(t)$	1
2	Degrau unitário	$\mu_{-1}(t)$	$\frac{1}{s}$
3	Rampa	t	$\frac{1}{s^2}$
4	Exponencial	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
5	"seno"	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
6	"cosseno"	$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$

Obs. a) $f(t) = 0$ para $t < 0$

b) $\mu_{-1}(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } t < 0 \\ 1 & \text{para } t \geq 0 \end{cases}$

g) Integração Real

$$\mathcal{L}\left[\int f(t)dt\right] = \frac{F(s)}{s} + \frac{\int f(t)dt}{s} \Big|_{t=0}$$

h) Teorema do valor final

$$\lim_{s \rightarrow 0} sF(s) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$$

se existir $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$

Lembrar que para funções como $f(t) = \sin(\omega t)$ ou $f(t) = e^{\alpha t}$, $\alpha > 0$ não existe limite para $t \rightarrow \infty$.

j) Integral de convolução

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)d\tau\right]=F_1(s)F_2(s)$$

Foi visto que a resposta de um sistema linear, causal e invariante no tempo para uma entrada $x(t)$ é dada por:

$$y(t) = \int_0^t x(\lambda)h(t-\lambda)d\lambda$$

onde $h(t)$ é a resposta do sistema a um impulso. Aplicando a Transforma de Laplace para esta equação tem-se:

$$Y(s) = H(s)X(s) \tag{4.1}$$

e $H(s)$ é a função de transferência do sistema. Ou seja, ela é a Transformada de Laplace da resposta do sistema a um impulso.

$$Y(s)=H(s)X(s)$$

Observe que se a entrada for impulso tem-se $X(s) = 1$ e, conseqüentemente, $Y(s) = H(s)$.

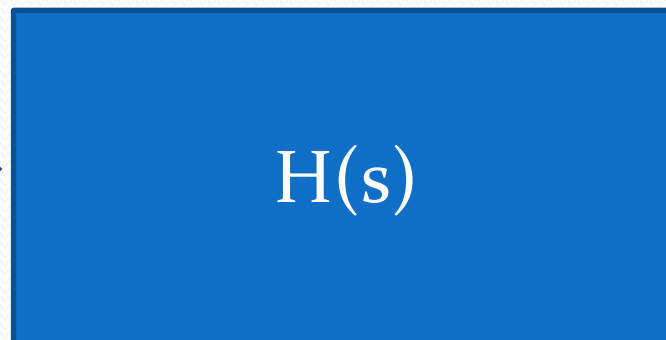
No caso do sistema massa-mola-amortecedor tem-se para entrada impulso:

$$Y(s) = H(s) = \frac{1}{Ms^2 + Bs + K}$$

Portanto, se calcularmos $y(t) = h(t)$ a partir de $Y(s)$ teremos a resposta do sistema a um impulso.

CORRELAÇÃO ENTRE OS SINAIS DE ENTRADA E DE SAÍDA

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s)e^{st} ds$$



$$y(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} Y(s)e^{st} ds$$



$$Y(s) = H(s)X(s)$$

$$y(t) = \int_0^t x(\lambda)h(t-\lambda)d\lambda$$



Transf. de Laplace