SUBESPAÇO GERADO POR UM CONJUNTO DE VETORES

Seja $(V, +, \cdot)$ um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

DEF. Sejam $v_1, \ldots, v_m \in V$. Um vetor $v \in V$ é uma COMBINAÇÃO LINEAR de $v_1, \ldots, v_m$ se existirem escalares $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R}$ tais que $\underline{v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_m v_m}$.

Exemplos

(1) Todo vetor $v \in \mathbb{R}^3$ é combinação linear de $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$ e $e_3 = (0,0,1)$ já que, se $v = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, então

$$v = a e_1 + b e_2 + c e_3$$
$$\| $$
$$(a,0,0) + (0,b,0) + (0,0,c)$$

(2) Se $A \in M_2(\mathbb{R})$ e A é matriz simétrica $(A = A^t)$

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} = a \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{E_{11}} + b \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{E_{12}+E_{21}} + c \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{E_{22}}$$

$$A = a E_{11} + b(E_{12} + E_{21}) + c E_{22}.$$

(3) Seja $p(t) \in P_3(\mathbb{R})$ tal que $p(1) = 0$.

Então, se $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$ e $p(1) = 0$, vale que $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0$.

Logo $a_0 = -a_1 - a_2 - a_3$. Substituindo a_0 em $p(t)$ temos:

$$p(t) = \underbrace{-a_1 - a_2 - a_3}_{a_0} + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$$

$$= a_1(t-1) + a_2(t^2-1) + a_3(t^3-1).$$

Assim, $p(t) \in P_3(\mathbb{R})$ tal que $p(1) = 0$, pode ser escrito como combinação linear de $p_1 = t-1$, $p_2 = t^2-1$ e $p_3 = t^3-1$.

SUBESPAÇO GERADO POR UM CONJUNTO de vetores

DEF: Seja $S = \{v_1, \dots, v_m\} \subset V$.

$[S]$ = subespaço gerado por S

$[S] \overset{def}{=} \{$ todas as combinações lineares de $v_1, \dots, v_m \}$

$$= \{a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_m v_m \mid a_i \in \mathbb{R}\ \forall i = 1, \dots, m\}$$

$[S]$ é um subespaço de V

(esse conjunto é um subespaço de V)

(1) $0 \in [S]$ já que $0 = 0v_1 + 0v_2 + \dots + 0v_m$.

(2) Se $u, v \in [S]$, $u = a_1 v_1 + \dots + a_m v_m$, $v = b_1 v_1 + \dots + b_m v_m$.

$$u + v = (a_1 v_1 + \dots + a_m v_m) + (b_1 v_1 + \dots + b_m v_m)$$

$$= (a_1 + b_1) v_1 + \dots + (a_m + b_m) v_m.$$

(3) Se $u \in [S]$ e $a \in \mathbb{R}$, então

$$au = a(a_1v_1 + \cdots + a_mv_m) = (aa_1)v_1 + \cdots + (aa_m)v_m$$

OBSERVAÇÃO:

Suponha que S é INFINITO.

DEF: $[S] = \{ v \in V \mid$ existem $v_1, \ldots, v_m \in S$ e $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R}$ com $v = a_1v_1 + \cdots + a_mv_m \}$

$=$ { TODAS as combinações lineares de um número finito de vetores de S }

$[S]$ é subespaço também nesse caso!

(1) $0 \in [S]$, já que $0 = 0v$, $\forall v \in S$.

(2) Suponha que $u, v \in [S]$. Mostrar que $u + v \in [S]$.

Usando a definição de $[S]$

$u \in [S] \Rightarrow$ existem $u_1, \ldots, u_m \in S$ e $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R}$ tais que

$$u = a_1v_1 + \cdots + a_m u_m.$$

$v \in [S] \Rightarrow$ existem $w_1, \ldots, w_r \in S$ e $b_1, \ldots, b_r \in \mathbb{R}$ tais que

$$v = b_1w_1 + \cdots + b_rw_r.$$

Seja $A = \{u_1, \ldots, u_m\} \cup \{w_1, \ldots, w_r\} \subset S$

A é um subconjunto FINITO de $[S]$.

Suponha que $A = \{v_1, \ldots, v_s\}$

Então $u = c_1 v_1 + \cdots + c_s v_s$

$v = d_1 v_1 + \cdots + d_s v_s$

$u + v = (c_1 + d_1) v_1 + \cdots + (c_s + d_s) v_s \in [S]$.

(Exemplo em $P(\mathbb{R})$

$S = \{1, t, t^2, \ldots, t^n, \ldots\}$

Seja $p(t) = 1 + t + t^2 + t^3$

$q(t) = t^5 + t^3 + t$

$A = \{1, t, t^2, t^3\} \cup \{t, t^3, t^5\} = \underbrace{\{1, t, t^2, t^3, t^5\}}_{A}$

$p(t) = 1.1 + 1.t + 1t^2 + 1.t^3 + 0t^5$

$q(t) = 0.1 + 1t + 0t^2 + 1t^3 + 1.t^5$

$p(t) + q(t) = (1+0).1 + (1+1)t + (1+0)t^2 + (1+1)t^3 + (0+1)t^5$

$\Rightarrow p(t) + q(t) = 1.1 + 2t + 1t^2 + 2.t^3 + 1t^5$

ou seja, $p(t) + q(t)$ é uma combinação linear dos vetores de A e A é finito.

Logo $p(t) + q(t) \in [S]$.)

(3) Se $v \in [S]$ e $a \in \mathbb{R}$, então $av \in [S]$

Existem $v_1, \ldots, v_m \in S$ tais que

$v = a_1 v_1 + \cdots + a_m v_m$.

$a v = (a a_1) v_1 + \cdots + (a a_m) v_m$

Logo, existem $v_1, \ldots, v_m \in S$ e $a a_i, i = 1, \ldots, m \in \mathbb{R}$

tais que $av = (a a_1) v_1 + \cdots + (a a_m) v_m$.

PROPRIEDADES DE $[S]$

(1) $S \subset [S]$

(De fato, se $v \in S \Rightarrow v = 1v \in [S]$).

(2) Se $S_1 \subset S_2$ então $[S_1] \subset [S_2]$.

De fato, seja $v \in [S_1]$. Então existem $v_1, \ldots, v_m \in S_1$ e $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R}$ tais que $v = a_1 v_1 + \ldots + a_m v_m$.

Como $S_1 \subset S_2$, $\{v_1, \ldots, v_m\} \subset S_2$ e $v \in [S_2]$.

(3) $[S] = [\,[S]\,]$

Seja $[S] = A$

Por (1) $A \subset [A]$ e $\underbrace{[S]}_{A} \subset [\underbrace{[S]}_{A}]$

Logo $[S] \subset [\,[S]\,]$.

Temos agora que provar que $[\,[S]\,] \subset [S]$.

Seja $v \in [\,[S]\,]$. Então existem $v_1, \ldots, v_m \in [S]$ e $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R}$ tais que

$$\boxed{v = a_1 v_1 + \ldots + a_m v_m} \quad (*)$$

Cada $v_i \in [S]$,

Logo $v_i = a_{i1} v_{i1} + a_{i2} v_{i2} + \ldots + a_{im_i} v_{im_i}$.

$v_{ij} \in S \quad \forall\, i = 1, \ldots, m_i$.

Substituindo cada v_i em (*) temos que

$v \in [S]$ ■

(pois v fica escrito como uma CL de vetores de S.) ■

(4) $[S] = [T] \iff S \subset [T]$ e $T \subset [S]$

($\Rightarrow$) Se $[S] = [T]$ então, por (2)

$S \subset [S] = [T]$ e $T \subset [T] = [S]$.

($\Leftarrow$) Suponha agora que

$S \subset [T]$ e $T \subset [S]$.

Por (2) e (3) temos

$$[S] \subset [[T]] \underset{(3)}{=} [T] \quad \text{e}$$

$$[T] \underset{(2)}{\overset{(2)}{\subset}} [[S]] \underset{(3)}{=} [S],$$

(5) $S, T \subset V$

$[S \cup T] = [S] + [T]$.

(Prove!).

Exercícios da Lista 4

4 (a) $V = \mathbb{R}^4$

$W = \{(x, y, z, t) \in V$ tais que x, y, z, t formam uma PA$\}$.

Dizer que x, y, z e t formam uma PA, é dizer que existe $r \in \mathbb{R}$ tal que

$y = x + r \quad z = x + 2r \quad t = x + 3r$.

Logo $(x, y, z, t) \in W$ pode ser escrito como

$(x, x+r, x+2r, x+3r) =$

$x(1, 1, 1, 1) + r(0, 1, 2, 3)$, para algum $r \in \mathbb{R}$.

Assim, todo vetor em W pode ser escrito como CL de

$(1, 1, 1, 1)$ e $(0, 1, 2, 3)$.

Logo $W = [(1, 1, 1, 1), (0, 1, 2, 3)]$.

(b) $V = \mathbb{R}^4$

$W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ tais que x, y, z, t formam uma PG de razão fixa $q\}$

$$x = x$$
$$y = xq$$
$$z = xq^2$$
$$t = xq^3$$

Logo $(x, y, z, t) = (x, xq, xq^2, xq^3)$
$= x(1, q, q^2, q^3)$.

$W = [(1, q, q^2, q^3)]$..

Faremos os outros exercícios de subespaços gerados também.

MAS TENTEM FAZER ATÉ O EXERCÍCIO 9.

Exercício 5.

Verificar se $u = (1, 1, 2, 3) \in [(1, 0, 1, 0), (1, 1, 1, 0), (0, 1, 1, 1)] = U$

$(1, 1, 2, 3) \in U \Leftrightarrow \exists\, x, y, z \in \mathbb{R}$ tais que

$(1, 1, 2, 3) = x(1, 1, 1, 0) + y(1, 1, 1, 0) + z(0, 1, 1, 1)$

Caímos no sistema.

$$\left.\begin{array}{l} 1 = x + y \\ 1 = x + y + z \\ 2 = x + y + z \\ 3 = z \end{array}\right.$$

É claro que o sistema é inconsistente!

Logo $(1,1,2,3) \notin U$.