Planejamento de Rotas - Parte II
Regiões Não Convexas

SSC5955

Slides adaptados de Masahiro Ono - MIT

Planejamento de Rotas em Regiões Não-Convexas

Planejamento de Rotas em Regiões Não-Convexas

Planejamento de Rotas em Regiões Não-Convexas

Planejamento de Rotas em Regiões Não-Convexas

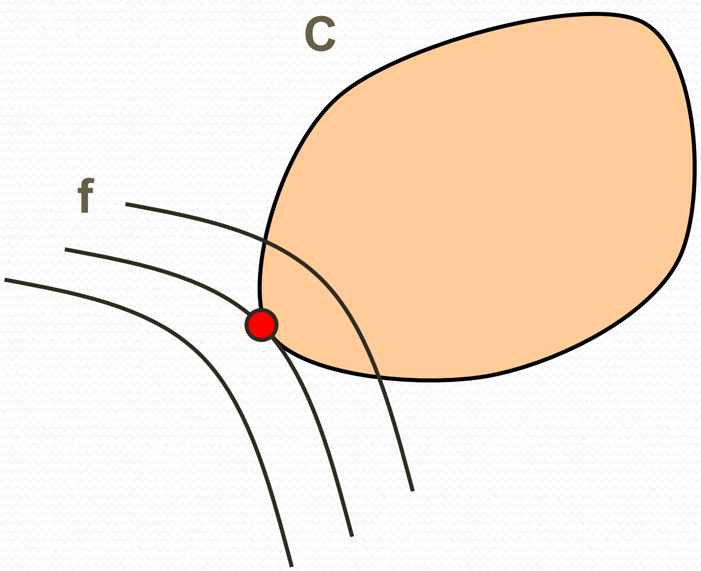
Planejamento de Rotas em Regiões Não-Convexas

Planejamento de Rotas em Regiões Não-Convexas

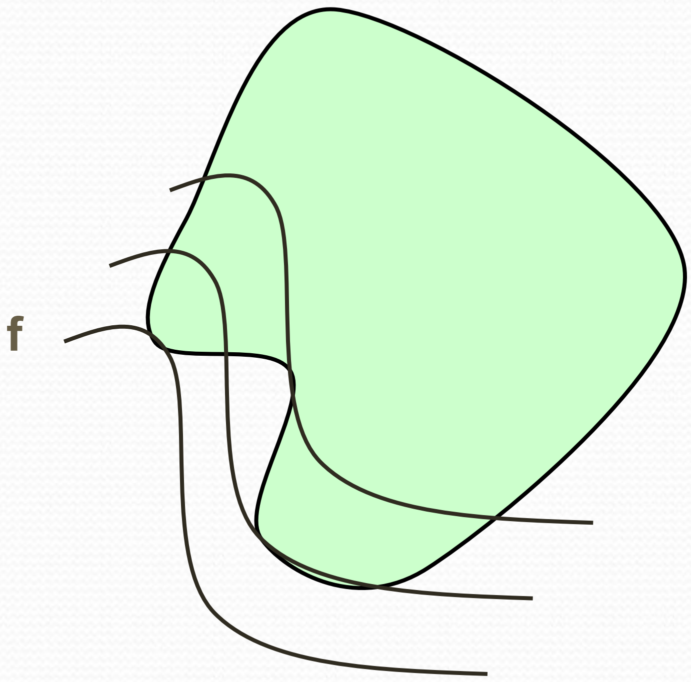
Otimização com restrições

$$\min f(x)$$
$$s.t. \quad x \in C$$

- Otimização convexa
- Otimização não-convexa



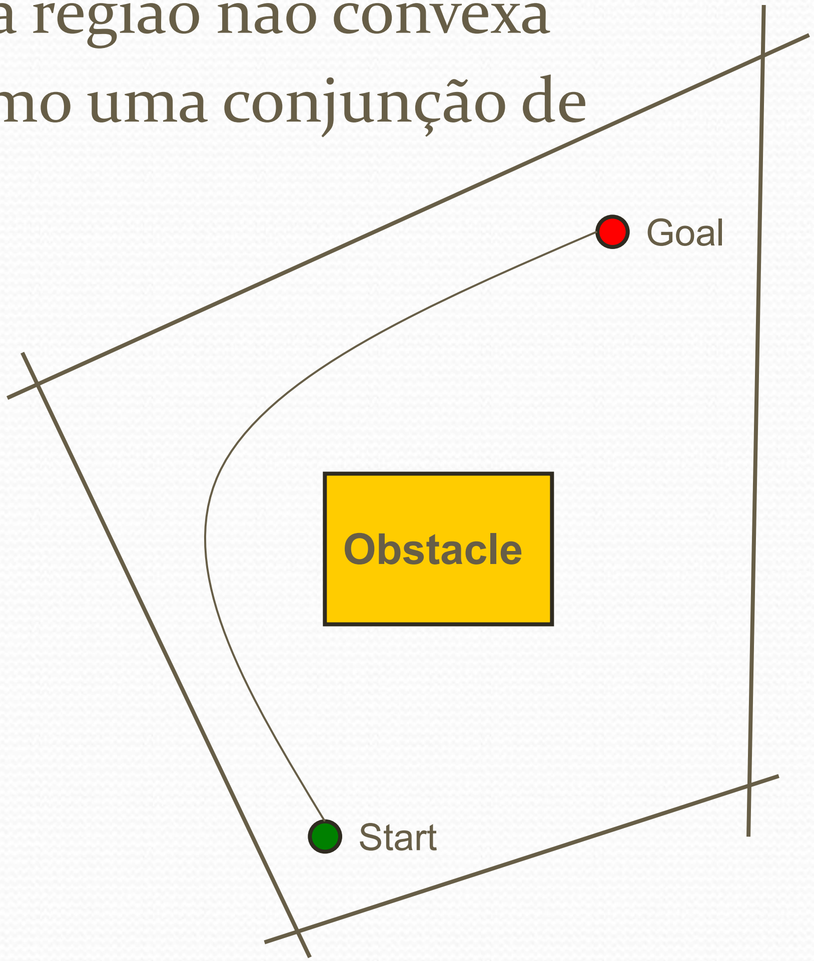
Fácil de solucionar ⇒ LP



Difícil de solucionar ⇒ MILP

Planejamento de Rotas em Regiões Não-Convexas

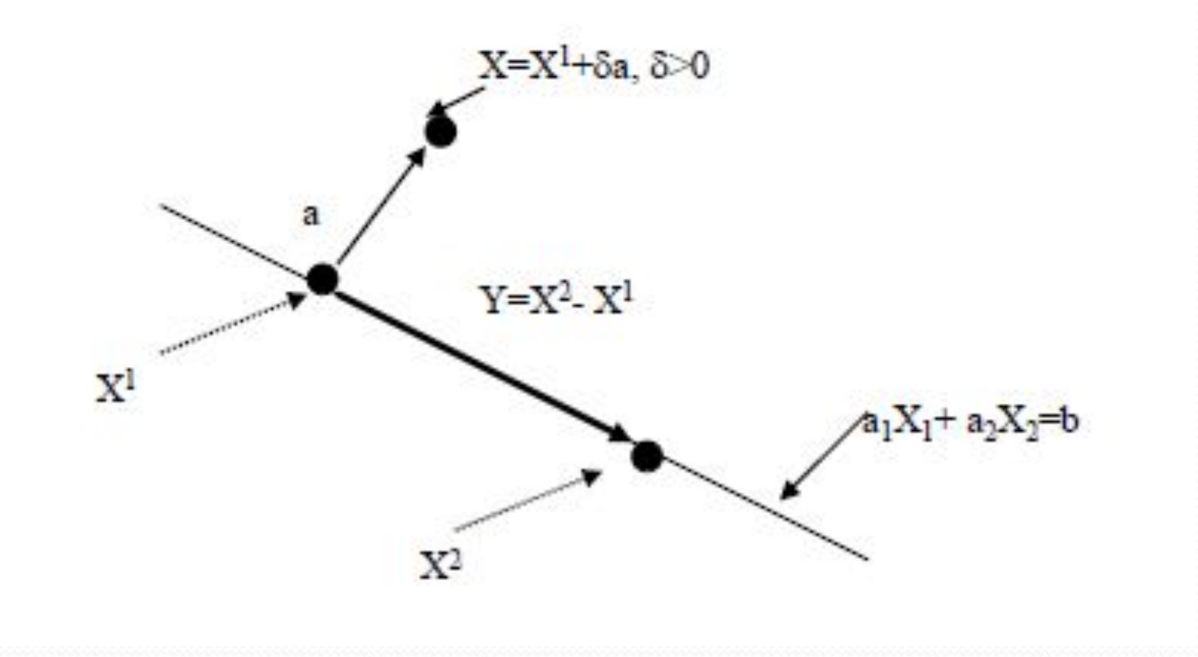
- Obstáculos estabelecem uma região não convexa
- Não podem ser expressos como uma conjunção de restrições lineares



Planejamento de Rotas em Regiões Não-Convexas

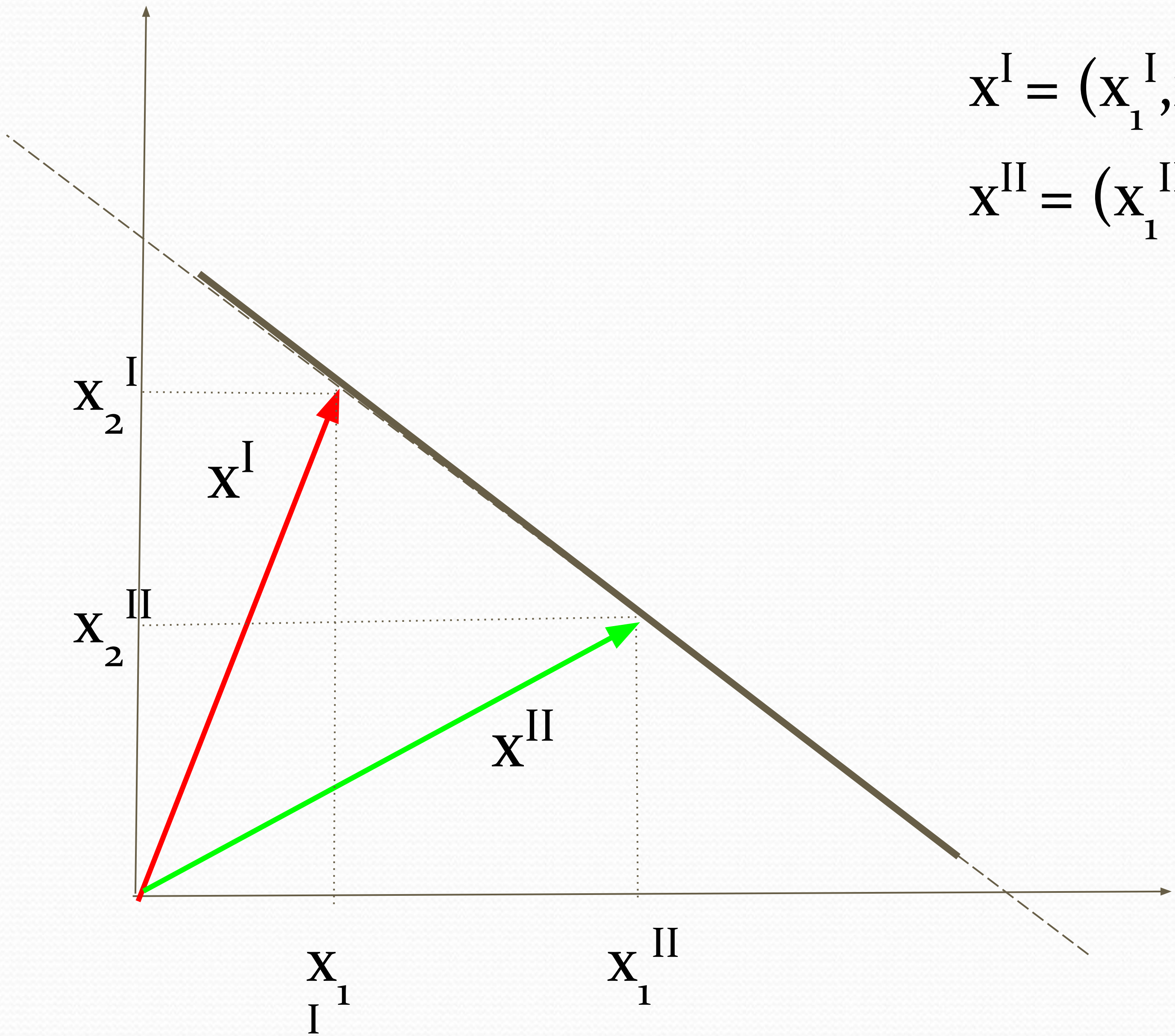
Lema1: O vetor $a^T = (a1,a2)^T$ é perpendicular à reta .

Lema2: O vetor **a** aponta para o lado do plano cujos pontos satisfazem $a^T x > b$.



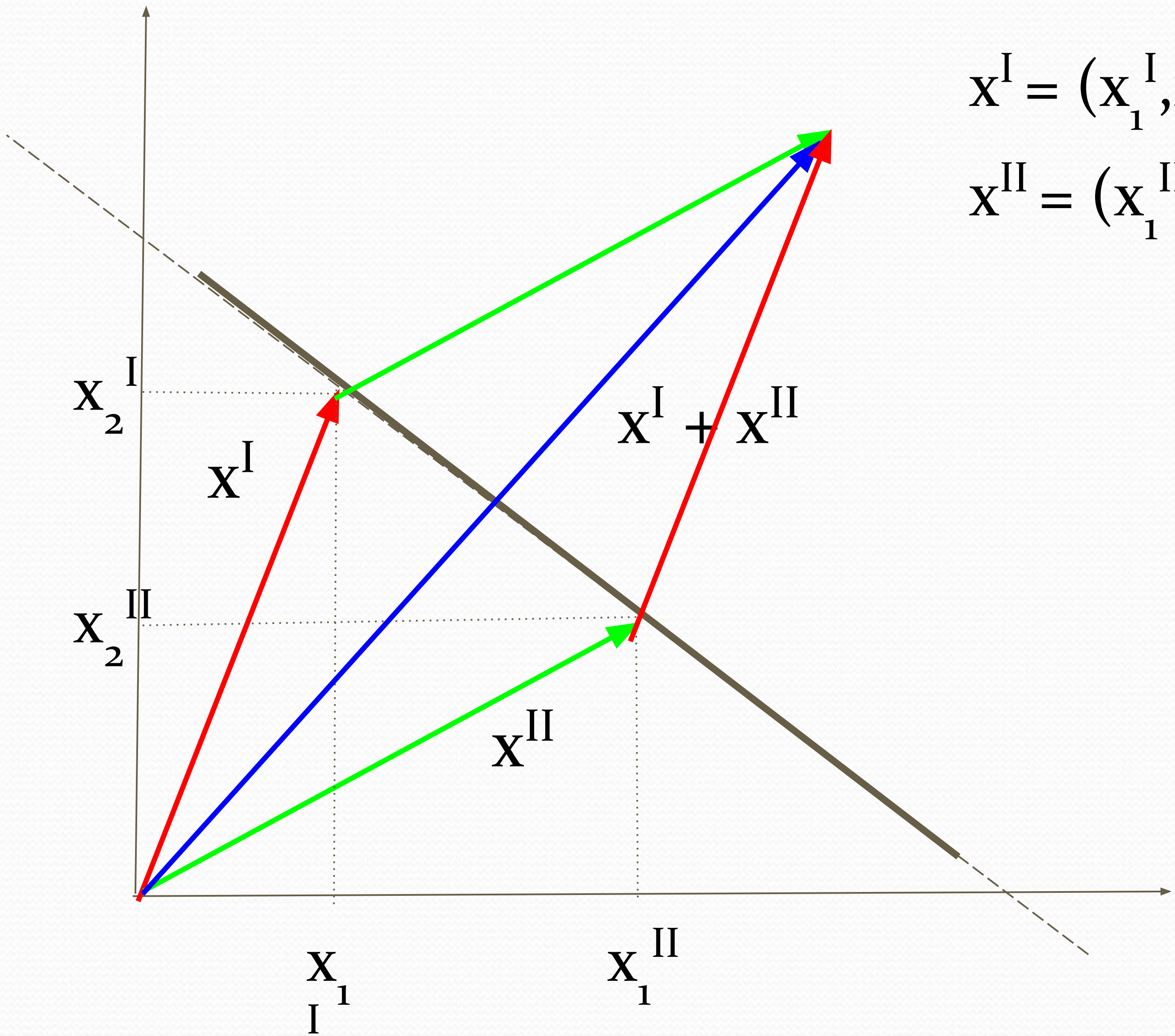
$$x^{I} = (x_1^{I}, x_2^{I})^t$$

$$x^{II} = (x_1^{II}, x_2^{II})^t$$



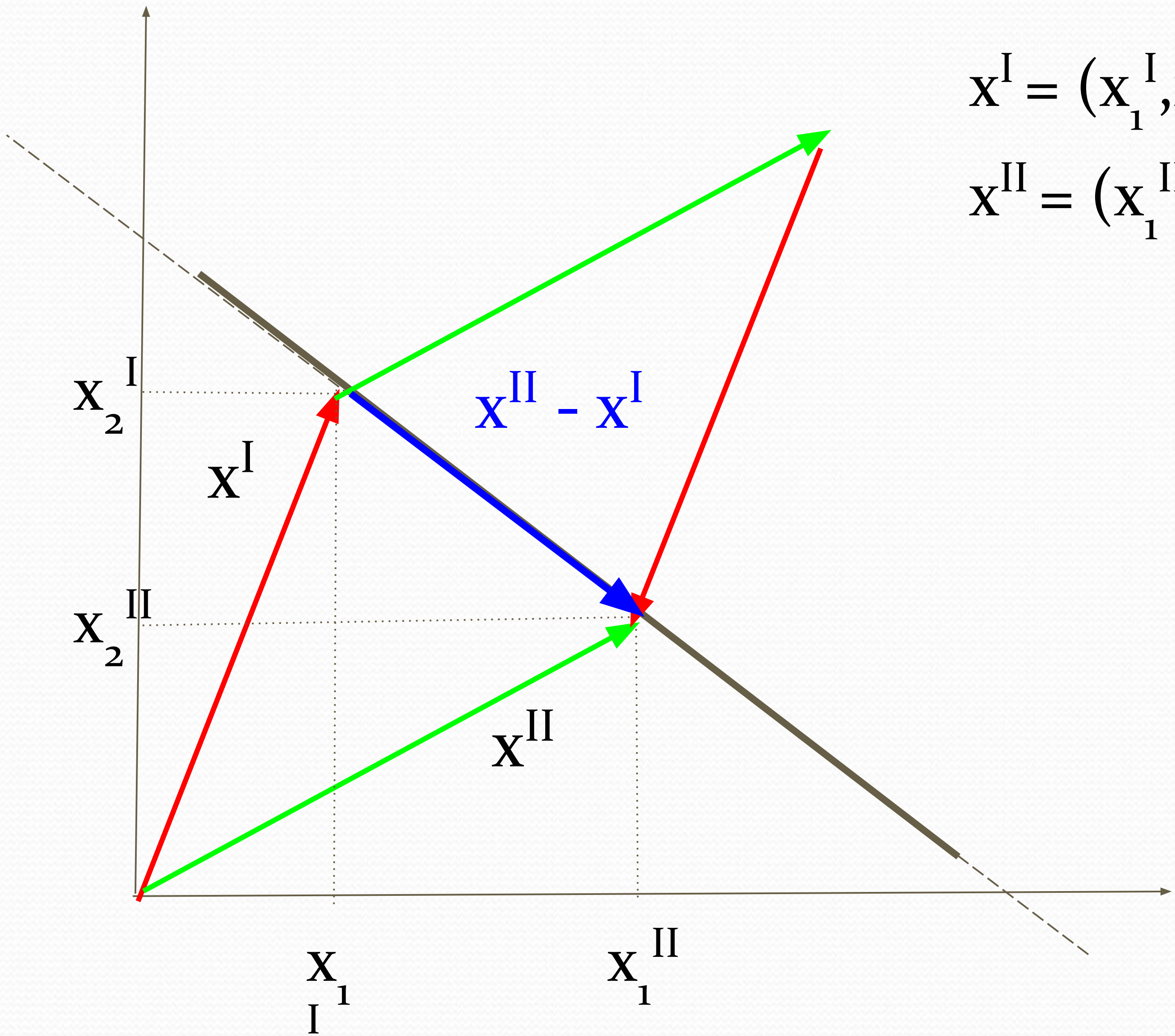
$$x^{I} = (x_1^{\ I}, x_2^{\ I})^t$$

$$x^{II} = (x_1^{\ II}, x_2^{\ II})^t$$



$$x^{I} = (x_1^{I}, x_2^{I})^t$$

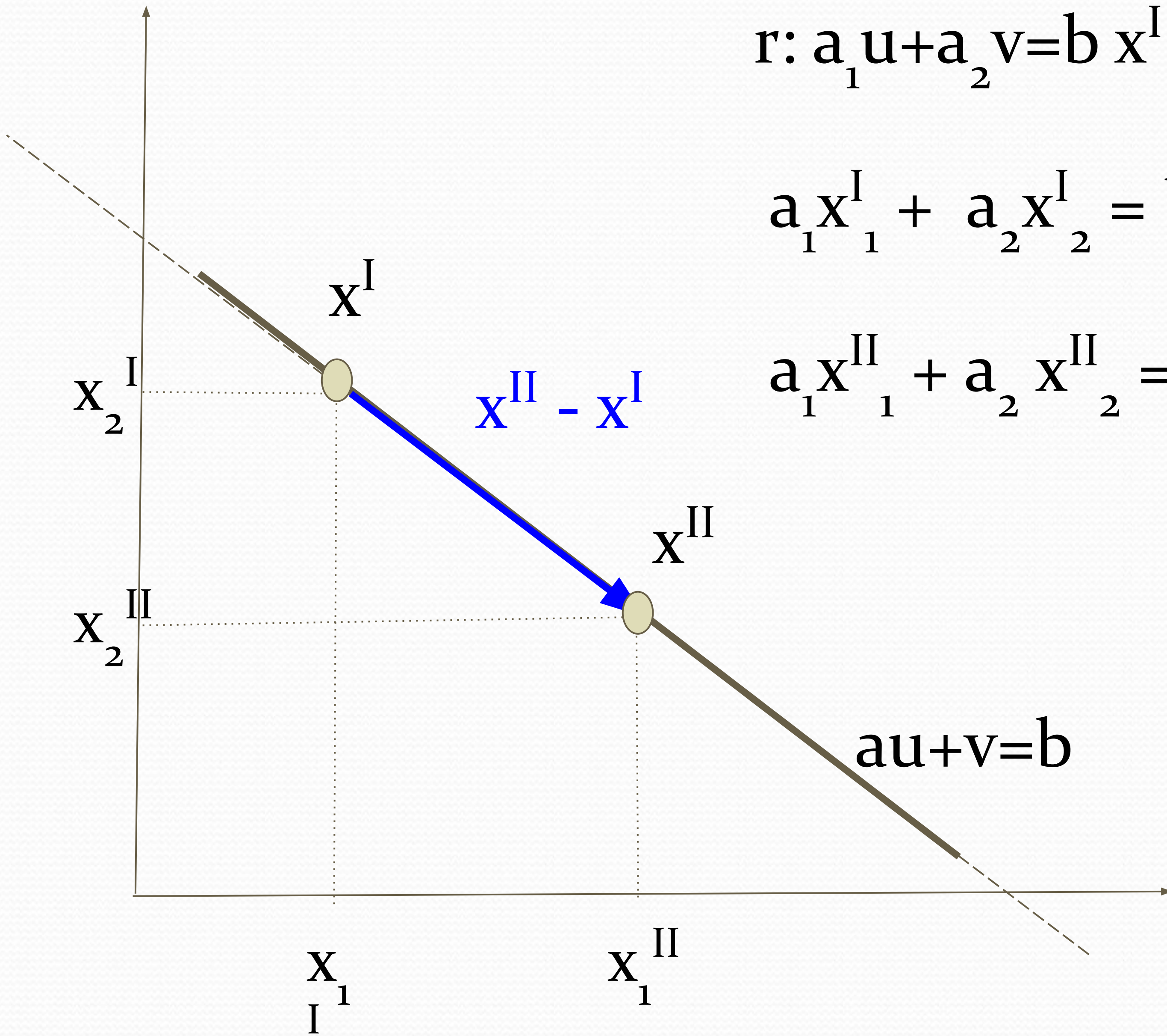
$$x^{II} = (x_1^{II}, x_2^{II})^t$$



$$r: a_1 u + a_2 v = b \quad x^I \text{ e } x^{II} \in r$$

$$a_1 x^I_1 + a_2 x^I_2 = b$$

$$a_1 x^{II}_1 + a_2 x^{II}_2 = b$$



$r: a_1u+a_2v=b \quad x^I \text{ e } x^{II} \in r$

$a_1x^I{}_1+a_2x^I{}_2= b$

$- \quad a_1x^I{}_1-a_2x^I{}_2= -b$

$a_1x^{II}{}_1+a_2x^{II}{}_2= b$

$a_1x^{II}{}_1+a_2x^{II}{}_2= b$

$a_1(x^{II}{}_1 - x^I{}_1)+a_2(x^{II}{}_2 - x^I{}_2)= 0$

$a_1= - a_2(x^{II}{}_2 - x^I{}_2)/(x^{II}{}_1 - x^I{}_1) \Longrightarrow$

$(a_1\ a_2)^t= (- a_2(x^{II}{}_2 - x^I{}_2)/(x^{II}{}_1 - x^I{}_1)\ ,\ a_2\ )$

$= a_2((- (x^{II}{}_2 - x^I{}_2)/(x^{II}{}_1 - x^I{}_1),\quad 1\ )$

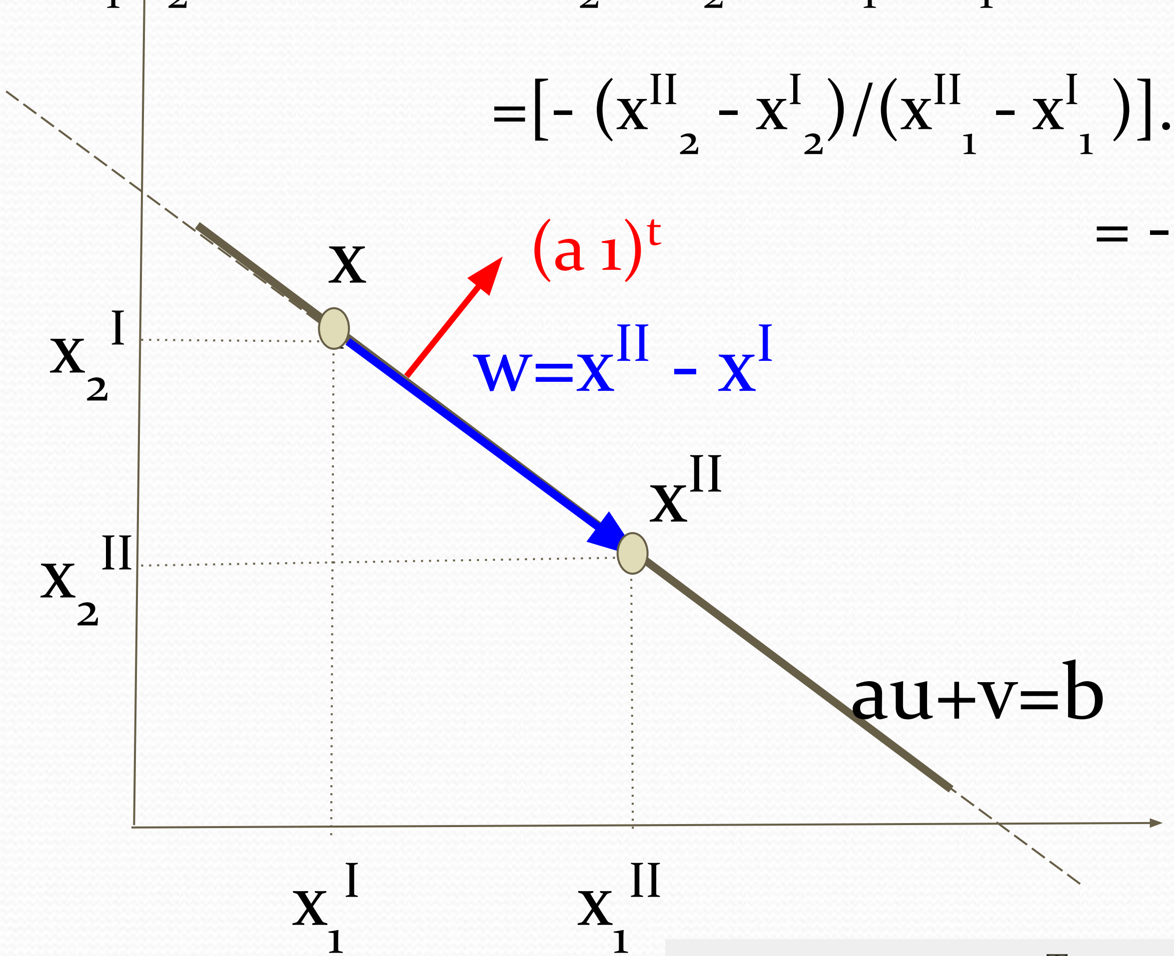
$r: a_1u+a_2v=b \Longrightarrow (a_1\ a_2).(u\ v)^t \Longrightarrow ((- (x^{II}{}_2 - x^I{}_2)/(x^{II}{}_1 - x^I{}_1) \quad 1\ ).\ (u\ v)^t$

$$(a_1\ a_2) = ((-(x^{II}_2 - x^{I}_2)/(x^{II}_1 - x^{I}_1)\ ,\ 1\ )$$

$$(a_1\ a_2).\ w^t \Longrightarrow (-(x^{II}_2 - x^{I}_2)/(x^{II}_1 - x^{I}_1)\ ,\ 1)^t.((x^{II}_1 - x^{I}_1), (x^{II}_2 - x^{I}_2))^t =$$

$$=[-(x^{II}_2 - x^{I}_2)/(x^{II}_1 - x^{I}_1)].\ (x^{II}_1 - x^{I}_1) + 1.(x^{II}_2 - x^{I}_2)$$

$$= -(x^{II}_2 - x^{I}_2) + (x^{II}_2 - x^{I}_2) = 0$$

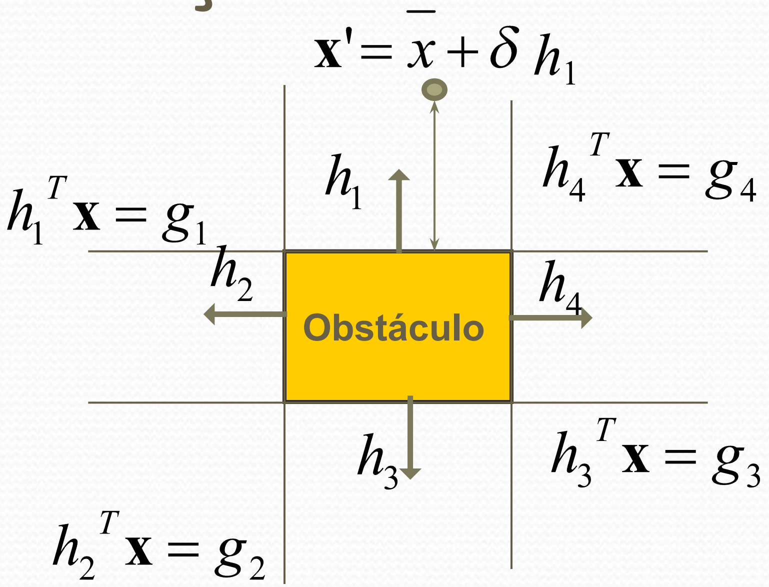


Logo,

$$(a_1\ a_2).w^t = 0$$

Lema1: O vetor $a^T = (a_1, a_2)^T$ é perpendicular à reta .

Modelando Obstáculos como Disjunção de Restrições



$$\mathbf{x}' = \bar{x} + \delta\, h_1$$

$$h_1 \bar{x} = b$$

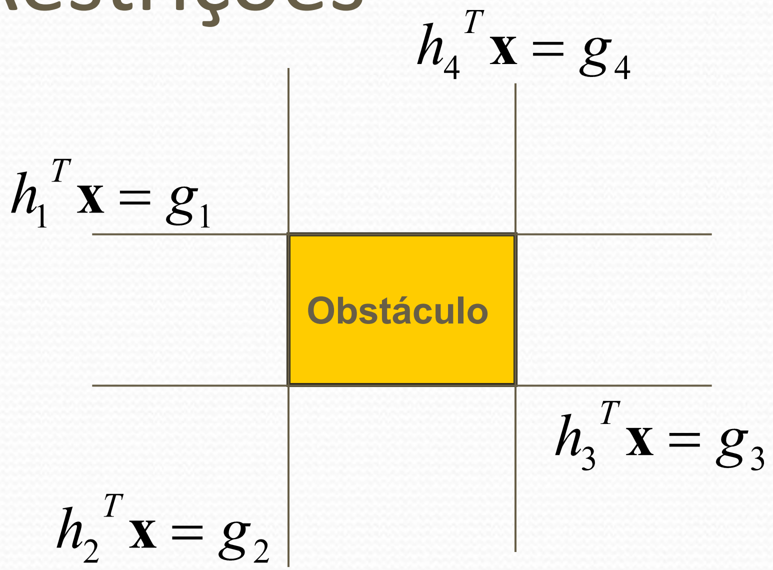
$$h_1^T x' = h_1(\bar{x} + \delta\, h_1) = h_1^T \bar{x} + \delta\, h_1^T h_1 = b + \delta \|h_1\|$$

$$h_1^T x' - b = \delta \|h_1\| \geq 0$$

$$h_1^T x' - b \geq 0$$

$$h_1^T x' \geq b$$

Modelando Obstáculos como Disjunção de Restrições



OU

$$h_1^T \mathbf{x} \geq g_1$$
$$\vee\, h_2^T \mathbf{x} \geq g_2$$
$$\vee\, h_3^T \mathbf{x} \geq g_3$$
$$\vee\, h_4^T \mathbf{x} \geq g_4$$

Introduzir Variáveis Binárias

Pelo menos uma restrição ativa

E

$$h_1^T \mathbf{x} \geq g_1 - M(1 - z_1)$$
$$\wedge\, h_2^T \mathbf{x} \geq g_2 - M(1 - z_2)$$
$$\wedge\, h_3^T \mathbf{x} \geq g_3 - M(1 - z_3)$$
$$\wedge\, h_4^T \mathbf{x} \geq g_4 - M(1 - z_4)$$
$$z_1 + z_2 + z_3 + z_4 \geq 1$$
$$z_1, z_2, z_3, z_4 \in \{0,1\}$$

M : “Big M” (constante positiva)
z_n = 0 : Restrição inativa
z_n = 1 : Restrição ativa

Modelando Obstáculos como Disjunção de Restrições

$$h_1^T\mathbf{x} \geq g_1 - M(1 - z_1)$$

$$\wedge\, h_2^T\mathbf{x} \geq g_2 - M(1 - z_2)$$

$$\wedge\, h_3^T\mathbf{x} \geq g_3 - M(1 - z_3)$$

$$\wedge\, h_4^T\mathbf{x} \geq g_4 - M(1 - z_4)$$

$$z_1 + z_2 + z_3 + z_4 \geq 1$$

$$z_1, z_2, z_3, z_4 \in \{0,1\}$$

$$h_1^T\mathbf{x} - g_1 \geq - M(1 - z_1) \Leftrightarrow g_1 - h_1^T\mathbf{x} \leq M(1 - z_1)$$

$$z_1 = \mathbf{0} \Leftrightarrow g_1 - h_1^T\mathbf{x} \leq M(1 - 0) \Leftrightarrow g_1 - h_1^T\mathbf{x} \leq M$$

$$\Leftrightarrow g_1 - M \leq h_1^T\mathbf{x} \Leftrightarrow h_1^T\mathbf{x} \geq g_1 - M$$

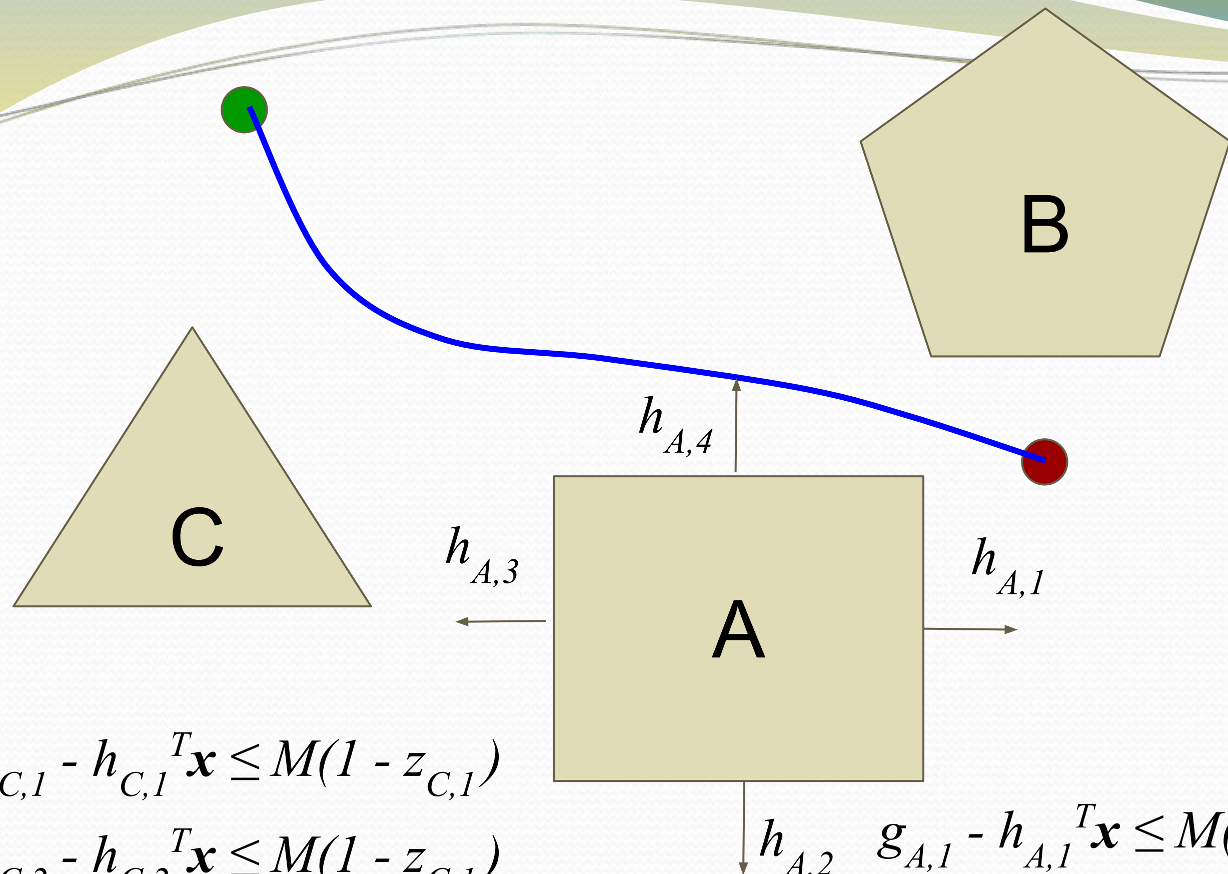
$$\Leftrightarrow h_1^T\mathbf{x} \geq - M \quad \textbf{(Restrição Inativa)}$$

$$z_1 = \mathbf{1} \Leftrightarrow g_1 - h_1^T\mathbf{x} \leq M(1 - 1) \Leftrightarrow g_1 - h_1^T\mathbf{x} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow g_1 \leq h_1^T\mathbf{x} \Leftrightarrow h_1^T\mathbf{x} \geq g_1 \quad \textbf{(Restrição Ativa)}$$

Modelando Obstáculos como Disjunção de Restrições

$h_1^T\mathbf{x} \geq g_1 - M(1 - z_1)$		$g_1 - h_1^T\mathbf{x} \leq M(1 - z_1)$
$\wedge h_2^T\mathbf{x} \geq g_2 - M(1 - z_2)$		$g_2 - h_2^T\mathbf{x} \leq M(1 - z_2)$
$\wedge h_3^T\mathbf{x} \geq g_3 - M(1 - z_3)$	$\Leftrightarrow$	$g_1 - h_3^T\mathbf{x} \leq M(1 - z_3)$
$\wedge h_4^T\mathbf{x} \geq g_4 - M(1 - z_4)$		$g_1 - h_4^T\mathbf{x} \leq M(1 - z_4)$
$z_1 + z_2 + z_3 + z_4 \geq 1$		$z_1 + z_2 + z_3 + z_4 \geq 1$
$z_1, z_2, z_3, z_4 \in \{0,1\}$		$z_1, z_2, z_3, z_4 \in \{0,1\}$



$$g_{B,1} - h_{B,1}{}^T\boldsymbol{x} \leq M(1 - z_{B,1})$$
$$g_{B,2} - h_{B,2}{}^T\boldsymbol{x} \leq M(1 - z_{B,2})$$
$$g_{B,3} - h_{B,3}{}^T\boldsymbol{x} \leq M(1 - z_{B,3})$$
$$g_{B,4} - h_{B,4}{}^T\boldsymbol{x} \leq M(1 - z_{B,4})$$
$$g_{B,5} - h_{B,5}{}^T\boldsymbol{x} \leq M(1 - z_{B,5})$$
$$z_{B,1}+z_{B,2}+z_{B,3}+z_{B,4}+z_{B,5} \geq 1$$
$$z_{B,1}, z_{B,2}, z_{B,3}, z_{B,4}, z_{B,5} \in \{0,1\}$$

$$g_{C,1} - h_{C,1}{}^T\boldsymbol{x} \leq M(1 - z_{C,1})$$
$$g_{C,2} - h_{C,2}{}^T\boldsymbol{x} \leq M(1 - z_{C,1})$$
$$g_{C,3} - h_{C,3}{}^T\boldsymbol{x} \leq M(1 - z_{C,1})$$
$$z_{A,1}+z_{A,2}+z_{A,3} \geq 1$$
$$z_{C,1}, z_{C,2}, z_{C,3} \in \{0,1\}$$

$$g_{A,1} - h_{A,1}{}^T\boldsymbol{x} \leq M(1 - z_{A,1})$$
$$g_{A,2} - h_{A,2}{}^T\boldsymbol{x} \leq M(1 - z_{A,2})$$
$$g_{A,3} - h_{A,3}{}^T\boldsymbol{x} \leq M(1 - z_{A,3})$$
$$g_{A,4} - h_{A,4}{}^T\boldsymbol{x} \leq M(1 - z_{A,4})$$
$$z_{A,1}+z_{A,2}+z_{A,3}+z_{A,4} \geq 1$$
$$z_{A,1}, z_{A,2}, z_{A,3}, z_{A,4} \in \{0,1\}$$

Modelando Obstáculos como Disjunção de Restrições

$$\min_{\mathbf{x}_{1:T},\mathbf{u}_{1:T}} C(\mathbf{x}_1 \cdots \mathbf{x}_N, \mathbf{u}_1 \cdots \mathbf{u}_{N-1})$$

$s.t.$

$$\mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_t + \mathbf{B}\mathbf{u}_t \quad t = 0,1,\ldots,T\text{-}1$$

$$\mathbf{g}_{ri} - h_{ri}\mathbf{x}_t \leq M(1 - z_{rit}) \quad t = \quad)(r = 1,\ldots,R)(i \in r)$$

$$\sum_i z_{rit} \geq 1 (r = 1,\ldots,R)(\; t = 0,1,\ldots,T\text{-}1$$

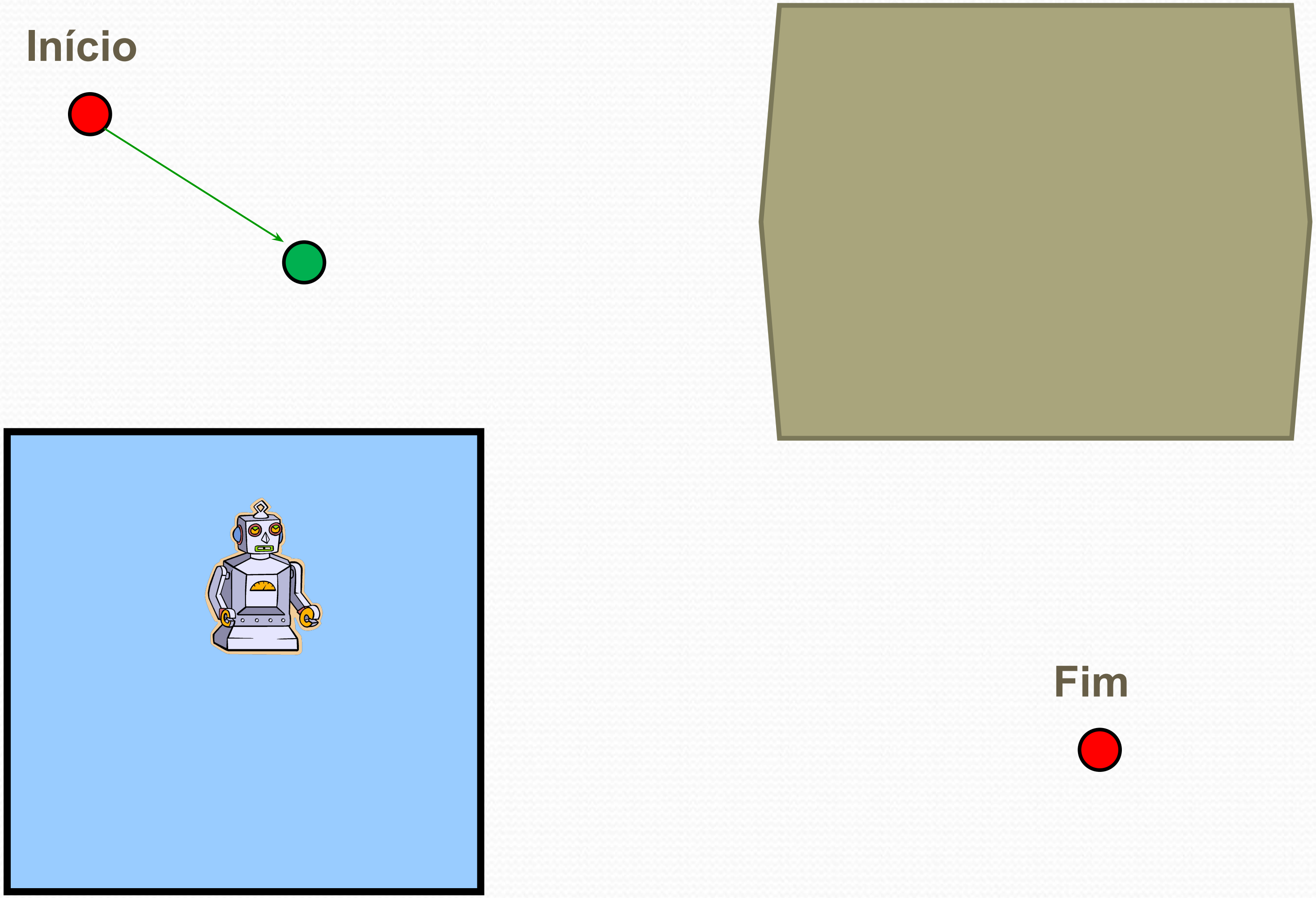
$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_{\text{start}}$$

$$\mathbf{x}_N = \mathbf{x}_{\text{goal}}$$

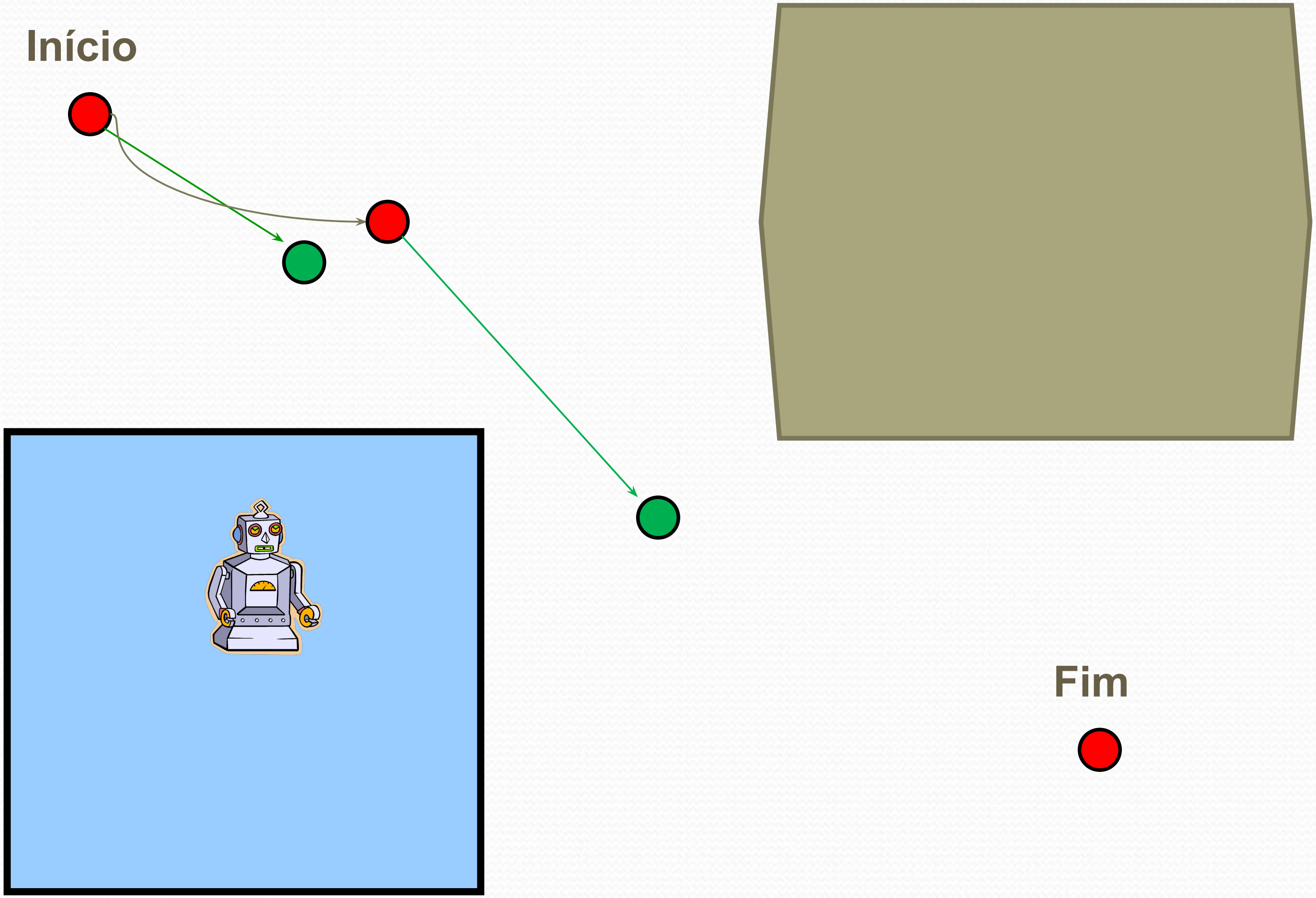
$$-\mathbf{u}_{\max} \leq \mathbf{u}_t \leq \mathbf{u}_{\max} \quad t = 0,1,\ldots,T\text{-}1$$

$$z_{rit} \in \{0,1\}$$

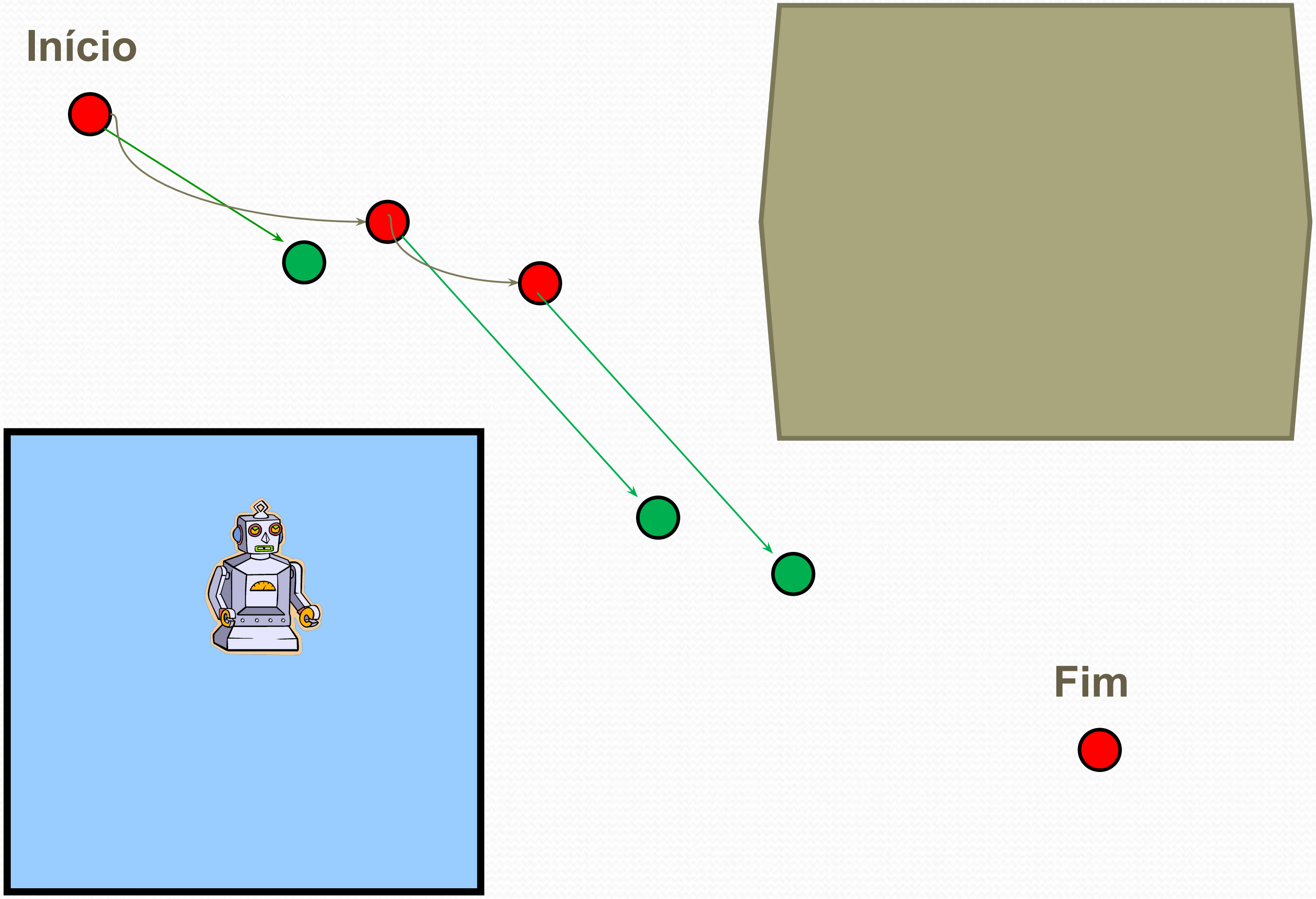
Desafio 3



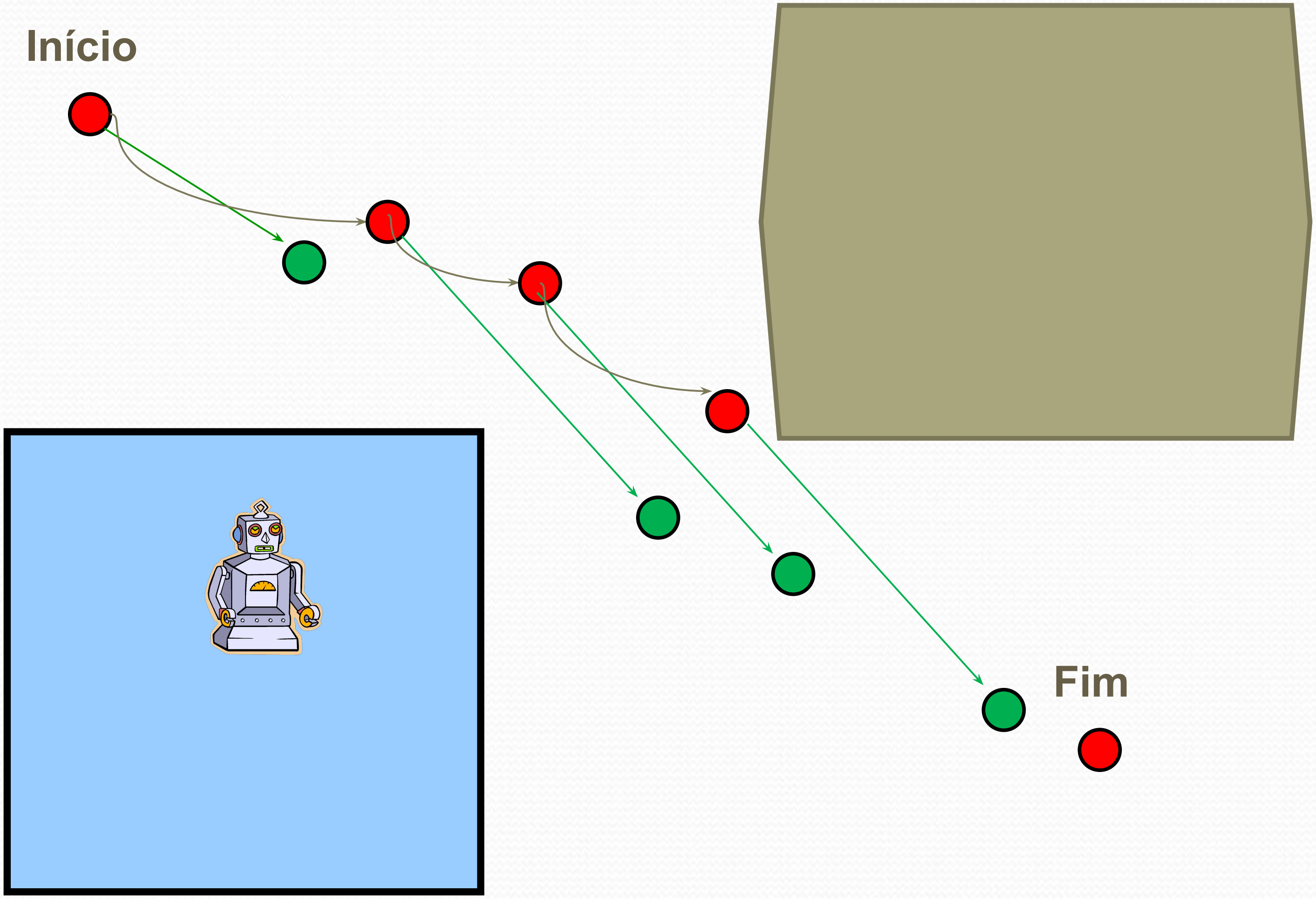
Desafio 3



Desafio 3



Desafio 3



Desafio 4