

Instituto de Física
USP

Física V - Aula 36

Professora: Mazé Bechara

Aula 36–Auto estados de energia de potenciais centrais – o átomo de H

1. **Características gerais dos potenciais ligados e não ligados.**
2. **Uma observação do experimento de Young com elétrons (1961).**
3. **A caixa tridimensional de potencial infinito – auto-funções de energia e seus auto-valores. A degenerescência em energia no caso da caixa cúbica.**
4. **A conveniência de se usar as coordenadas esféricas para potenciais centrais. Os operadores energia e momento angular e quadrado de momento angular em coordenadas esféricas. A equação de auto-estados de energia de um potencial central.**

TABELA 6-2. Um Resumo dos Sistemas Estudados no Capítulo 6.

Nome do Sistema	Exemplo Físico	Energias Total e Potencial	Densidade de Probabilidade	Característica Significativa
Potencial nulo	Próton em um feixe de um cíclotron			Resultados usados para outros sistemas
Potencial degrau (energia abaixo do topo)	Elétron de condução próximo à superfície do metal			Penetração na região proibida
Potencial degrau (energia acima do topo)	Nêutron tentando escapar de um núcleo			Reflexão parcial na descontinuidade do potencial
Barreira de potencial (energia abaixo do topo)	Partícula α tentando escapar de barreira coulombiana			Efeito túnel
Barreira de potencial (energia acima do topo)	Espalhamento de elétrons por átomos negativamente ionizados			Nenhuma reflexão em certas energias
Poço de potencial quadrado finito	Nêutron num estado ligado no núcleo			Quantização da energia
Poço de potencial quadrado infinito	Molécula estritamente confinada a uma caixa			Aproximação para um poço de potencial finito
Potencial do oscilador harmônico simples	Átomo de uma molécula diatômica vibrando			Energia de ponto zero

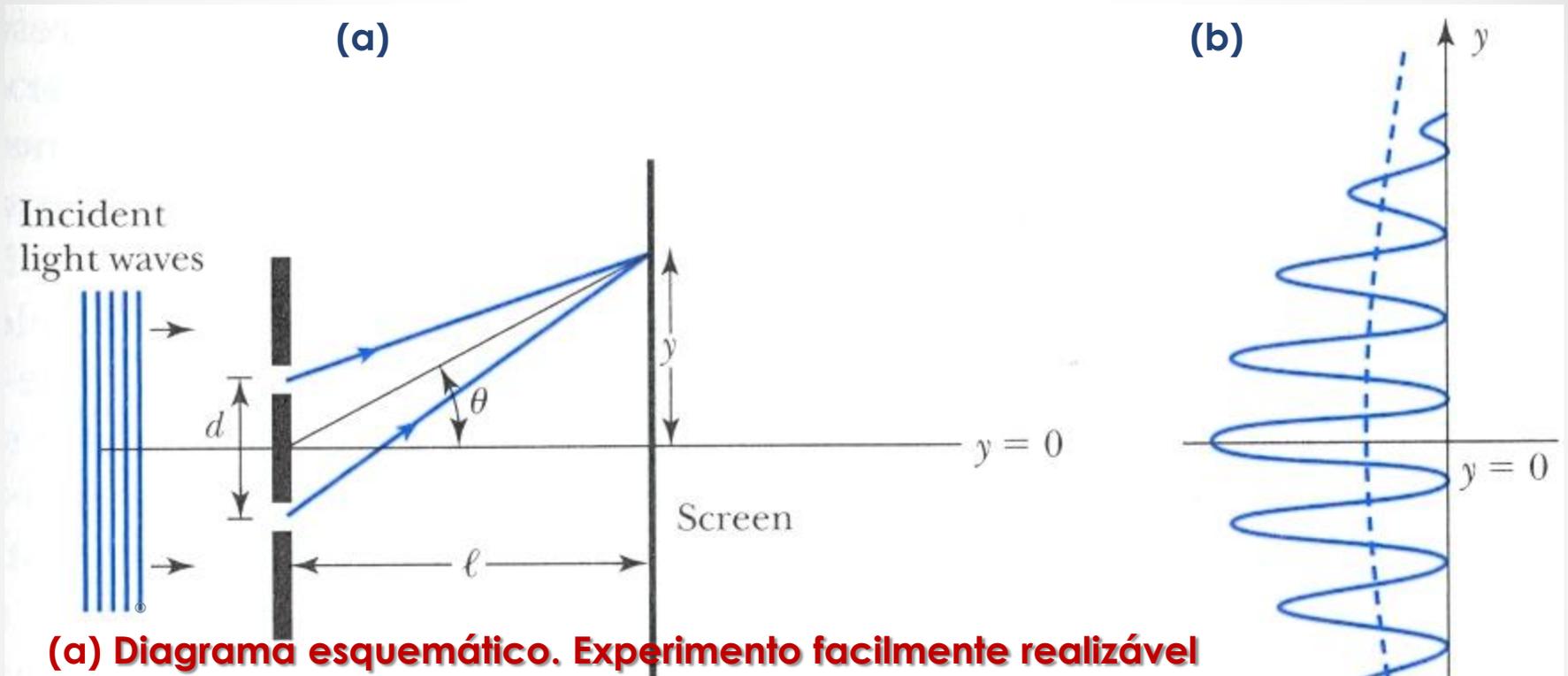
Localize nos potenciais ao lado quais permitem estados NÃO ligados e para que valores de energia.

Observe as características das densidades de probabilidade destes potenciais, **em particular na região de incidência e de transmissão.**

Todos os estados NÃO ligados têm funções de onda NÃO normalizáveis e imaginárias nas regiões de reflexão e de transmissão. A conservação da partícula vem da relação: $1=R+T$. As energias NÃO são quantizadas.

Figura do Eisberg

O experimento de duas fendas de Young

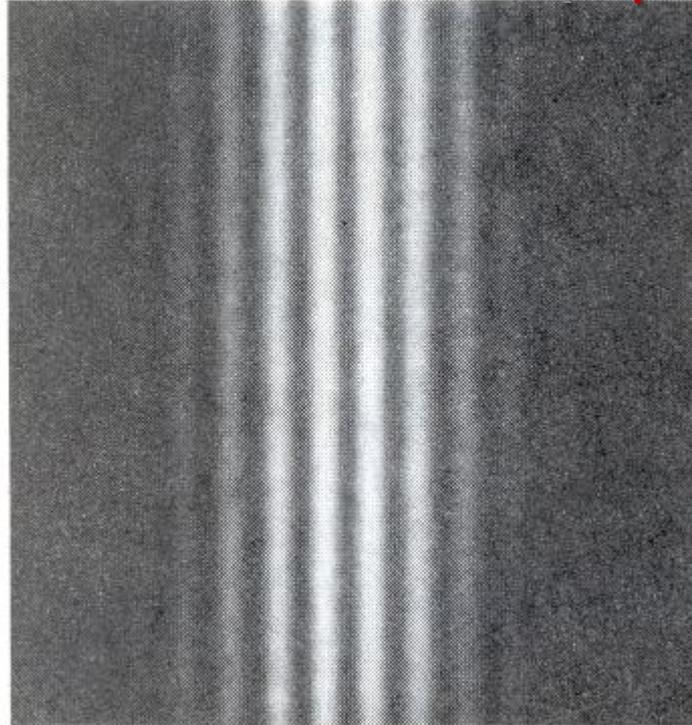


(a) Diagrama esquemático. Experimento facilmente realizável com laser como fonte de luz ($\ell \ll d$). Esperado o mesmo de partículas materiais com o mesmo comprimento de onda.

(b) A linha sólida indica o padrão de Interferência das duas fendas superposta à difração nas fendas. Se uma das fendas for coberta se observará uma intensidade como a da linha tracejada, mas com o máximo em frente à fenda aberta, devido à difração na fenda.

Resultado experimental com elétrons

Feixe de elétrons de 50 keV ($\lambda=0,00536\text{nm}$) foram lançados sobre duas fendas de 500nm de abertura, separadas por uma distância de 2000nm e observadas na tela a 350mm das fendas (experimento de 1961, na Alemanha)



- **Resultado experimental de Claus Jonsson: American Journal of Physics 42, 4 (1974). © American Association of Physics.**
- **O padrão acima foi ampliado por uma série de lentes eletrônicas e finalmente observado em uma tela fluorescente com microscópio óptico. O 1º mínimo ocorre em 469nm.**

As energias da partícula na caixa tridimensional de potencial infinito

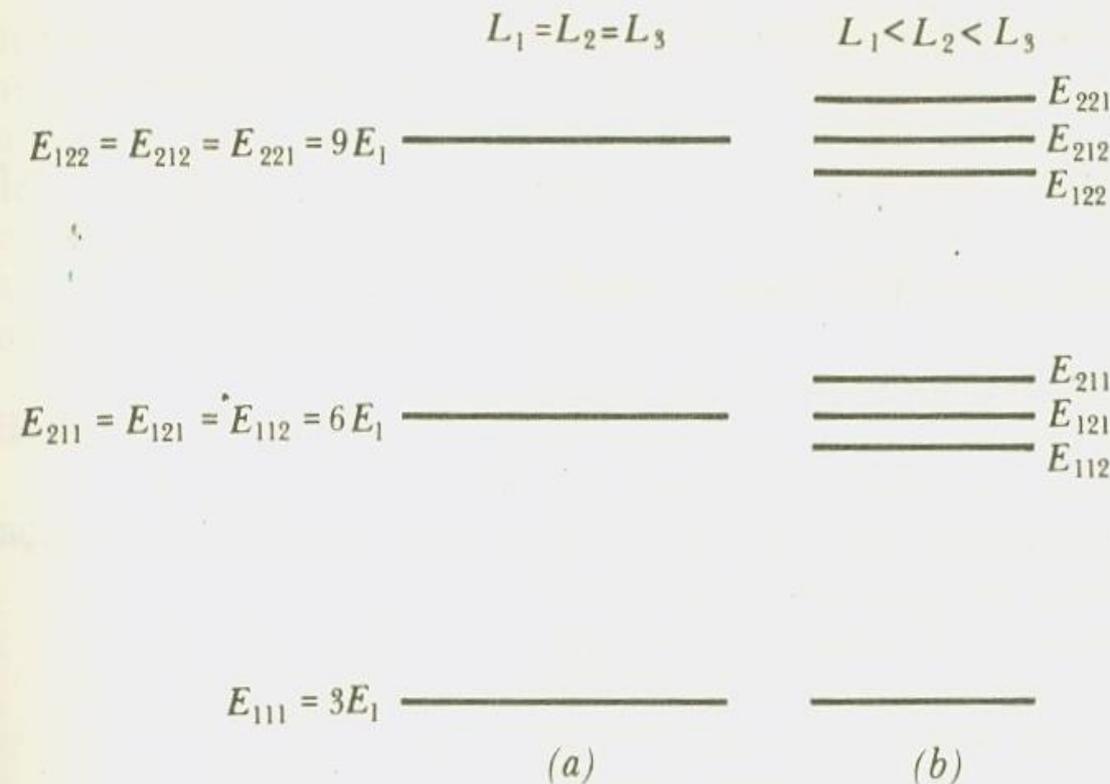
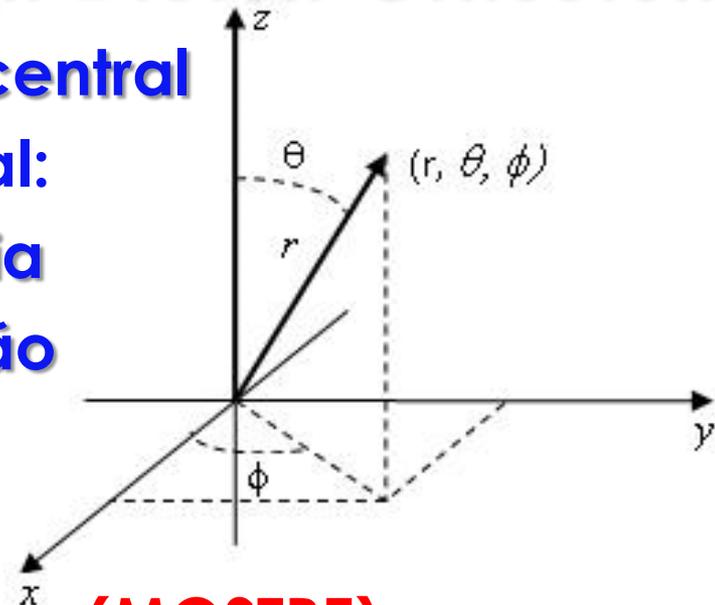


Fig. 6.24 Diagrama de nível de energia para (a) potencial de poço cúbico infinito e (b) poço infinito não-cúbico. No poço cúbico, os níveis de energia são degenerados, isto é, há duas ou mais funções de onda tendo a mesma energia. A degenerescência será removida quando a simetria do potencial for removida, como em (b).

Observe que a caixa NÃO cúbica NÃO tem degenerescência em energia.

Potencial Central na Física Clássica

- **Conceituação: potencial central** é o associado à força central: depende apenas da distância à uma origem e tem a direção do vetor posição.



- O **potencial é conservativo (MOSTRE)**: conserva a energia mecânica.
- O **vetor momento angular é uma constante** de movimento **(MOSTRE!)**, consequentemente o movimento é no plano.
- No **caso de interação de duas partículas** por potencial central, a energia do movimento relativo depende da massa reduzida e da distância entre elas; **e a origem é uma das partículas.**

Grandezas dinâmicas do *movimento*

relativo de duas partículas – Física Clássica

A **energia mecânica (constante): cinética + potencial.**

$$E = \frac{p^2}{2\mu} + V(r)$$

○ **momento angular do movimento relativo (constante - variação no tempo igual ao torque):**

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

○ **momento linear do movimento relativo (variação no tempo igual à força):**

$$\vec{p} = \mu \frac{d\vec{r}}{dt}$$

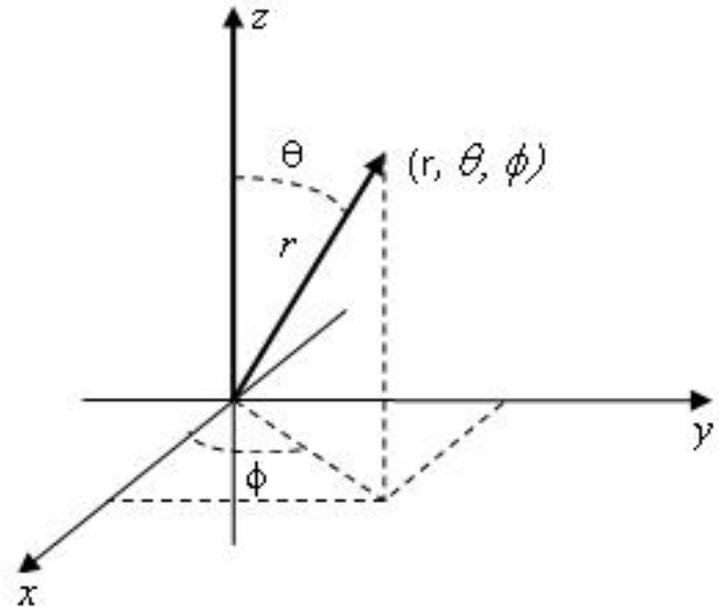
A origem de r ($r=0$) está em uma das duas partículas. μ é a massa reduzida.

As coordenadas esféricas e as cartesianas

$$0 \leq r < \infty$$

$$0 \leq \theta \leq \pi$$

$$0 \leq \phi \leq 2\pi$$



$$x = r \sin \theta \cos \phi$$

$$y = r \sin \theta \sin \phi$$

$$z = r \cos \theta$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} =$$

MOSTRE

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right)$$

Operadores componentes e módulo ao quadrado do momento angular em coordenadas esféricas

(Mostre formalmente!)

$$L_x = i\hbar \left(\sin \phi \frac{\partial}{\partial \theta} + \cot \theta \cos \phi \frac{\partial}{\partial \phi} \right),$$

$$L_y = i\hbar \left(-\cos \phi \frac{\partial}{\partial \theta} + \cot \theta \sin \phi \frac{\partial}{\partial \phi} \right),$$

$$L_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \phi},$$

$$L^2 = -\hbar^2 \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right).$$

A equação de Schroedinger para auto-estados de energia de um potencial central $V(r)$ no movimento relativo de duas partículas

1. Uma escolha de sistema de coordenadas conveniente é de coordenadas esféricas, dada a simetria do potencial. Assim os auto-estados de energia são:

$$\psi(\vec{r}, t) = \psi(r, \theta, \phi, t) = \varphi(r, \theta, \phi) e^{-i\frac{E}{\hbar}t}$$

2. No caso do movimento relativo **a origem do potencial é uma das duas partículas que interagem**. Assim a equação dos auto-estados pode ser escrita na forma:

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \left[\frac{\partial}{r^2 \partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right] \varphi(r, \theta, \phi) + V(r) \varphi(r, \theta, \phi) = E \varphi(r, \theta, \phi)$$

3. Há **um conjunto particular de soluções** nas quais se separa as variáveis angulares da radial:

$$\{ \varphi(r, \theta, \phi) = R(r) Y(\theta, \phi) \}$$

- **Multiplicando a equação de Schroedinger por $2\mu r^2$ e dividindo à direita por $R(r) Y(\theta, \phi)$ se pode deixar todos os termos com dependência angular em um lado da equação e todos com dependência radial do outro, o que exige que sejam iguais a uma constante C (resultado nas transparências seguintes).**