Propriedade 1: Seja a variável aleatória $Z \sim \text{Normal}(0, 1)$. Então, tomando o quadrado de Z, tem-se que $Z^2 \sim \chi^2_1$. Isto é, o quadrado de uma variável aleatória normal padrão tem distribuição qui-quadrado com 1 grau de liberdade.

O resultado anterior é demonstrado via transformação de variável, utilizando o método do Jacobiano no caso unidimensional (apenas uma variável). Também é possível utilizar funções geradora de momentos e outros métodos.

Seja $(X_1, \ldots, X_n)$ uma amostra aleatória de $X \sim \text{Normal}(\theta, \sigma^2)$. Então, a distribuição da média amostral é dada por

$$\overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \text{Normal}\left(\theta, \frac{\sigma^2}{n}\right).$$

Assim, padronizando a variável $\overline{X}$, tem-se

$$\frac{\overline{X} - \theta}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}\left(\overline{X} - \theta\right)}{\sigma} \sim \text{Normal}(0, 1).$$

Consequentemente, pela propriedade 1, segue que

$$\left(\frac{\sqrt{n}\left(\overline{X} - \theta\right)}{\sigma}\right)^2 = \frac{n\left(\overline{X} - \theta\right)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_1.$$

Portanto, caso $(X_1, \ldots, X_n)$ seja uma amostra aleatória de $X \sim \text{Normal}(\theta, 1)$ e seja de interesse testar a hipótese $\mathcal{H}_0 : \theta = 0$, a estatística de teste sob a hipótese $\mathcal{H}_0$ será tal que

$$T_{\mathcal{H}_0} = n\overline{X}^2 \sim \chi^2_1.$$

A estatística de teste $T_{\mathcal{H}_0} = n\overline{X}^2$ é uma possível estatística de teste para testar a hipótese $\mathcal{H}_0 : \theta = 0$.