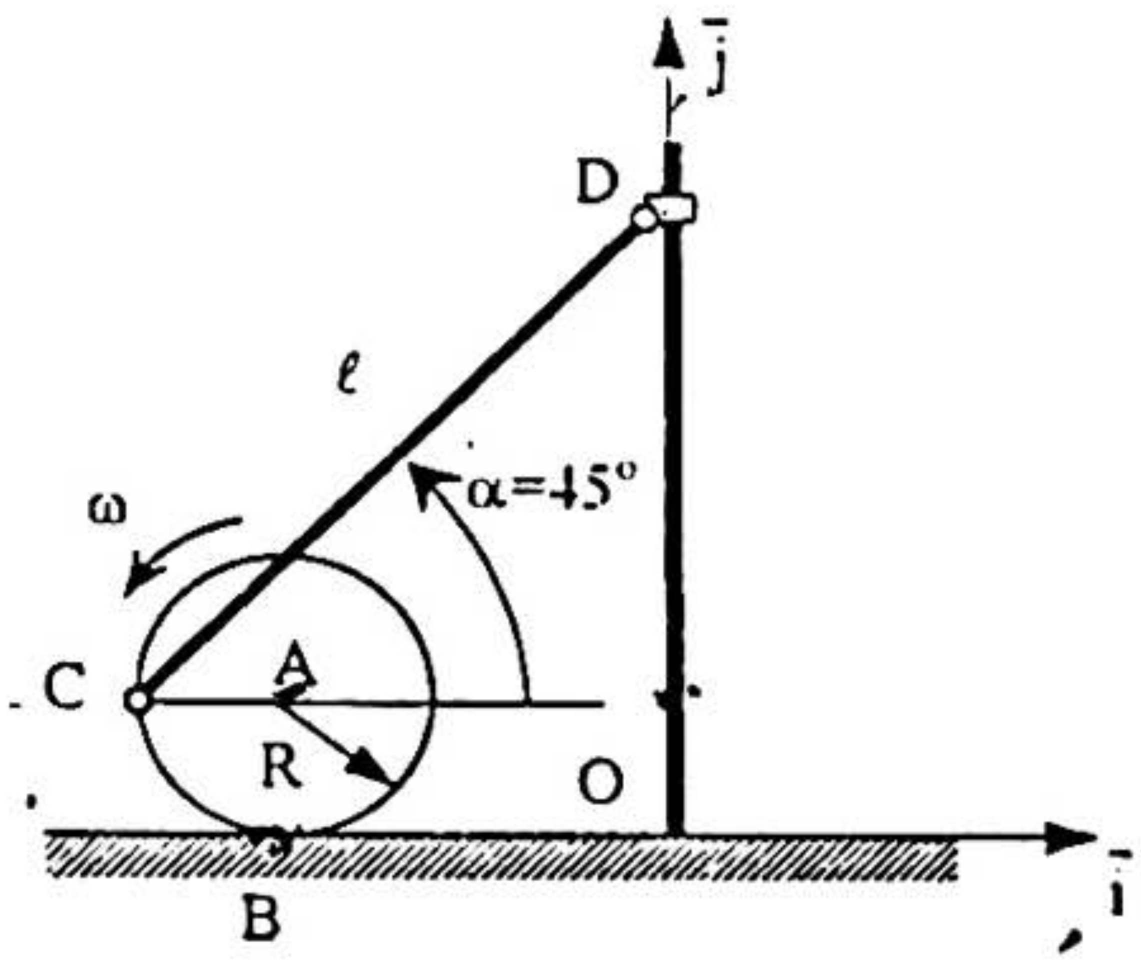
PME 3100 6.10.23 CINEMÁTICA DO CORPO RÍGIDO



Questão 2 (3,5 pontos). O disco de centro A e raio R rola sem escorregar sobre um plano horizontal com velocidade angular constante ω. A barra CD, de comprimento ℓ, é articulada em C e D. A luva em D pode deslizar ao longo da guia vertical. Na situação indicada na figura ($\alpha = 45^\circ$), pede-se:

a) determinar graficamente o centro instantâneo de rotação da barra (CIR_{barra}) e do disco (CIR_{disco});

b) a velocidade do ponto C, $\vec{v}_C$;

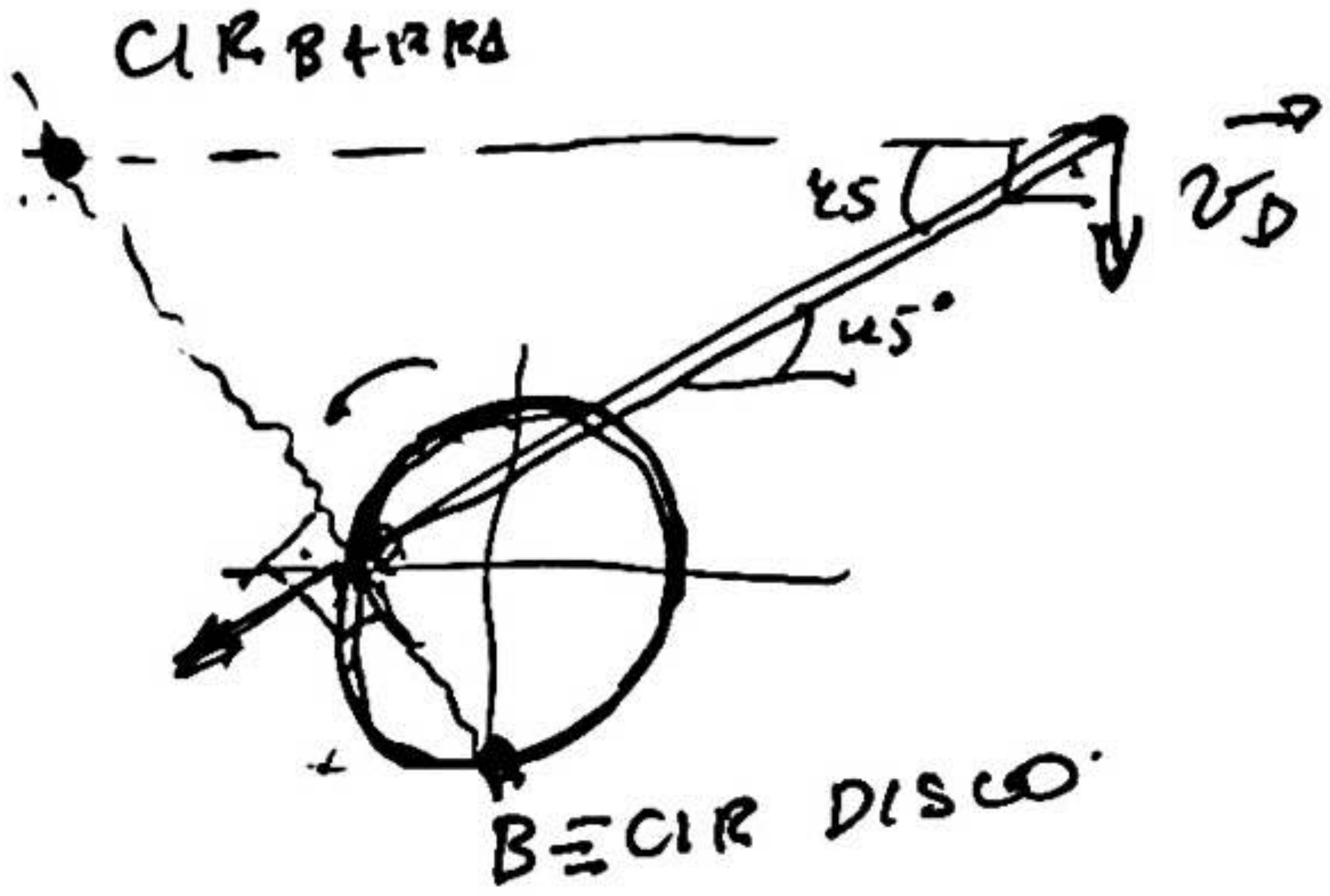
c) o vetor de rotação $\vec{\Omega}$ da barra CD;

d) a velocidade do ponto D, $\vec{v}_D$;

e) a aceleração do ponto C, $\vec{a}_C$.

SOLUÇÃO

a)



b) $\vec{v}_C = \vec{v}_B + \vec{\omega} \wedge (C-B)$ $\quad \vec{v}_B = \vec{0}$; $\vec{\omega} = \omega \vec{k}$; $(C-B) = -R\vec{i} + R\vec{j}$

$\vec{v}_C = \vec{0} + \omega\vec{k} \wedge (-R\vec{i} + R\vec{j})$

$\vec{v}_C = -\omega R\vec{j} - \omega R\vec{i} \Rightarrow \boxed{\vec{v}_C = -\omega R(\vec{i} + \vec{j})}$

c) $\vec{\Omega} = \Omega\vec{k}$

$\vec{v}_D = v_D\vec{j}$

NA BARRA: $\vec{v}_D = \vec{v}_C + \vec{\Omega} \wedge (D-C)$

$v_D\vec{j} = -\omega R\vec{i} - \omega R\vec{j} + \Omega\vec{k} \wedge \left(L\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + L\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}\right)$

$v_D\vec{j} = -\omega R\vec{i} - \omega R\vec{j} + \Omega L\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j} - \Omega L\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i}$

$\vec{i})\ 0 = -\omega R - \Omega L\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \Omega = -\frac{\omega R\sqrt{2}}{L}$

$\vec{j})\ v_D = -\omega R + \Omega L\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow v_D = -2\omega R$

$\boxed{\vec{\Omega} = -\frac{\omega R}{L}\sqrt{2}\vec{k}}$ d) $\boxed{\vec{v}_D = -2\omega R\vec{j}}$

e) $\vec{a}_C = ?$

$\vec{v}_A = \omega R(-\vec{i})$ $\qquad \omega = \text{CTE} \Rightarrow \dot{\omega} = 0$

$\vec{a}_A = \dot{\omega} R(-\vec{i})$

$\vec{a}_A = \vec{0}$

$$\vec{a}_C = \cancel{\vec{a}_A}^{\,0} + \cancel{\dot{\vec{\omega}} \wedge (C-A)}^{\,0} + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (C-A)]$$

$$\vec{a}_C = \omega \vec{k} \wedge [\underbrace{\omega \vec{k} \wedge (-R\vec{i})}_{\vec{j}}]$$

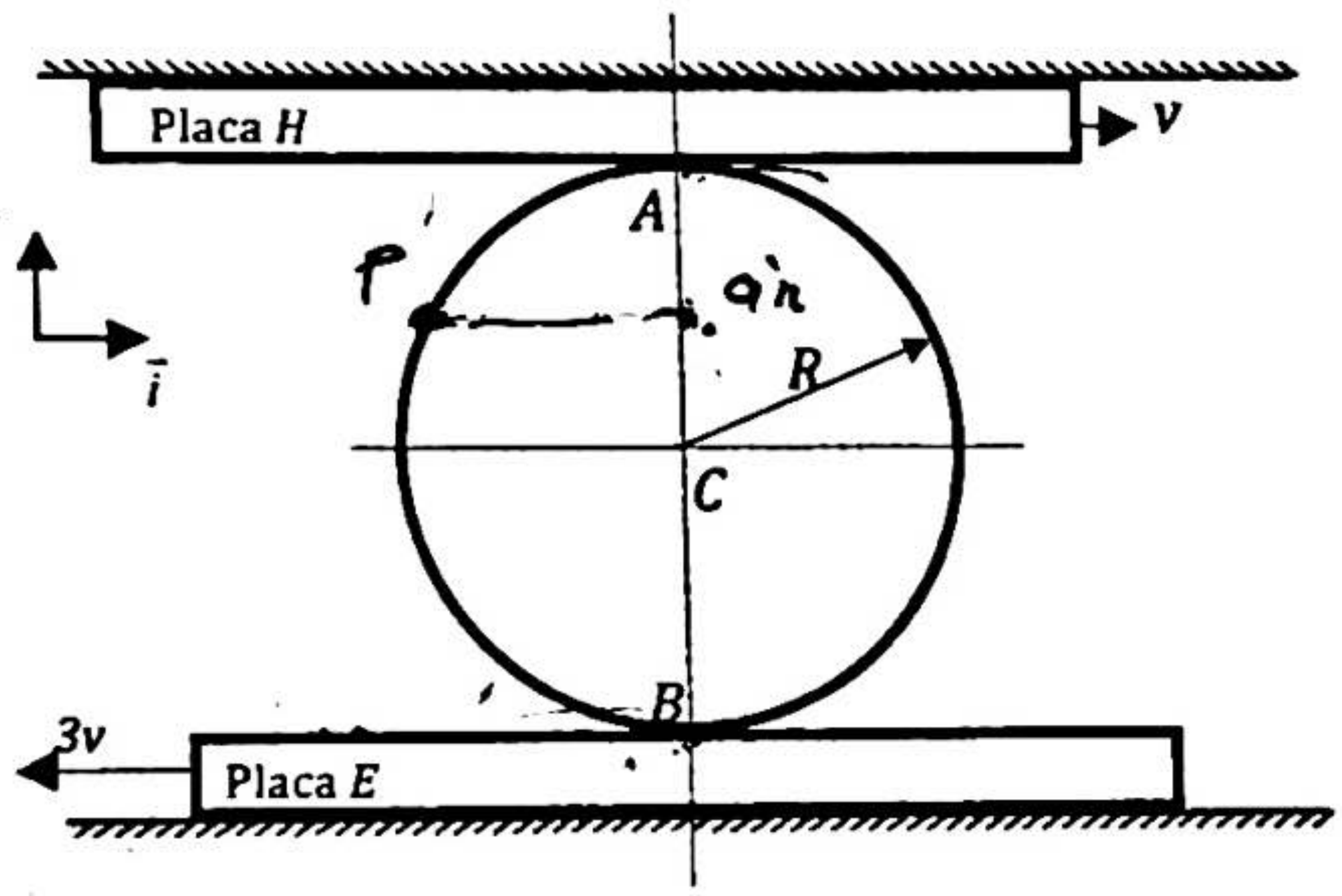
$$\boxed{\vec{a}_C = \omega^2 R \vec{i}}$$

A figura mostra um disco de centro C e raio R entre duas placas paralelas entre si. A placa H translada com velocidade $\vec{v}_H = v\vec{i}$, constante, e a placa E translada com velocidade $\vec{v}_E = -3v\vec{i}$, constante. Não há escorregamento entre o disco e as placas nos pontos de contato A e B.

a) Determine a posição do Centro Instantâneo de Rotação (CIR) do disco, e calcule o vetor de rotação $\vec{\omega}$ do disco. (5 pontos)

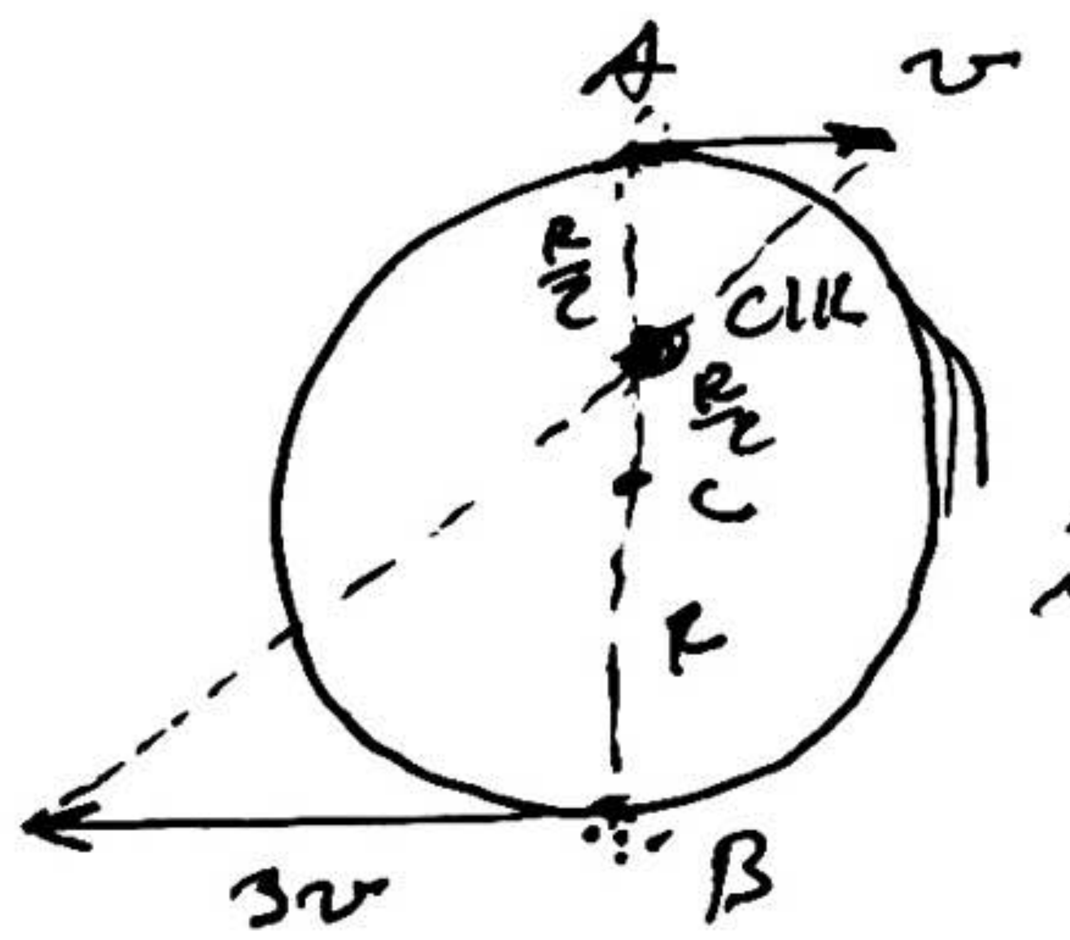
b) Localize um ponto P da periferia do disco, à esquerda do segmento AB, cuja velocidade $\vec{v}_P$ é na direção $\vec{j}$. Calcule a velocidade $\vec{v}_P$. (5 pontos)

c) Calcule as acelerações $\vec{a}_C$ do ponto C e $\vec{a}_P$ do ponto P. (10 pontos)



SOLUÇÃO

a)



$\vec{\omega} = \omega\vec{k}$

$\vec{v}_A = \vec{v}_{CIR} + \vec{\omega} \wedge (A - CIR)$

$\vec{v}_A = v\vec{i} \quad (A - CIR) = \frac{R}{2}\vec{j}$

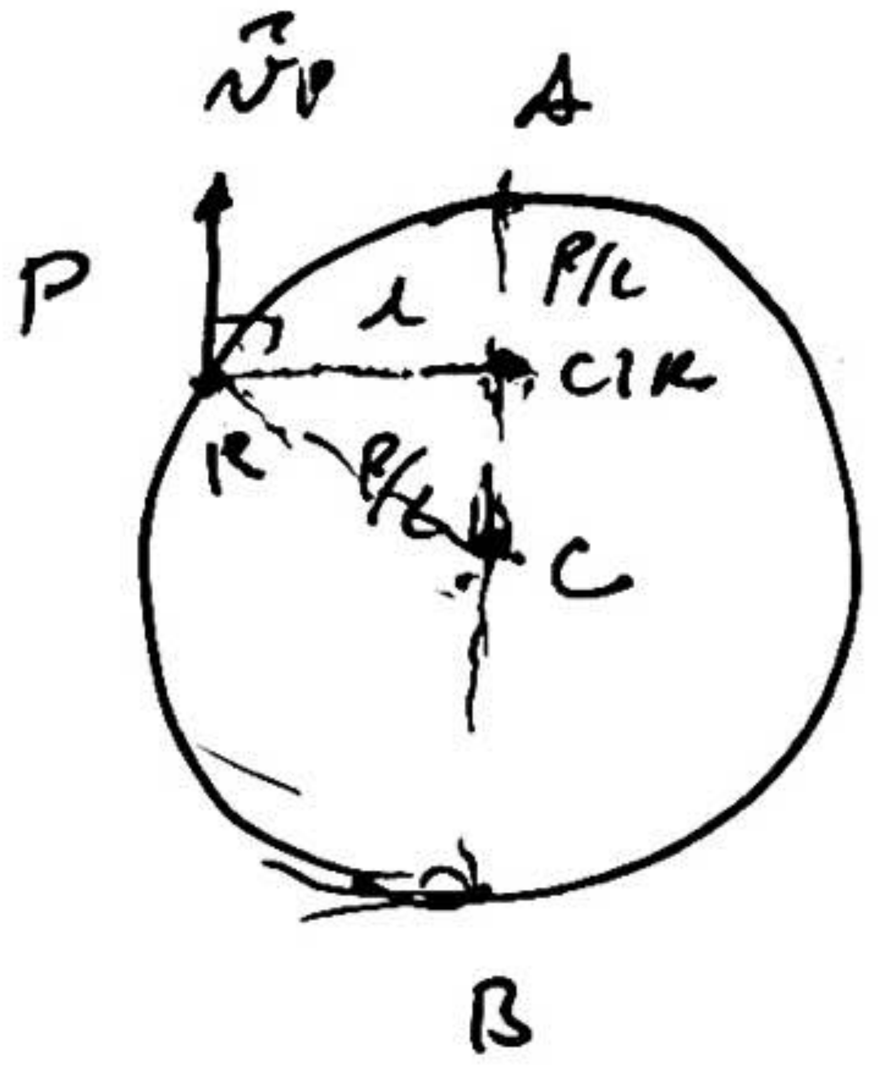
$\vec{v}_A = \vec{0} + \omega\vec{k} \wedge \frac{R}{2}\vec{j}$

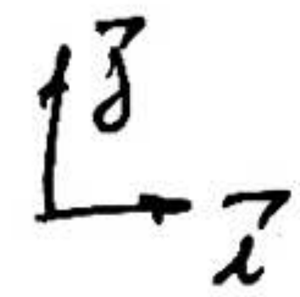
$\vec{v}_A = -\omega\frac{R}{2}\vec{i}$ ②

① $v\vec{i} = -\omega\frac{R}{2}\vec{i} \Rightarrow v = -\omega\frac{R}{2}$

$\omega = -\frac{2v}{R}$

$$\boxed{\vec{\omega} = -\frac{2v}{R}\vec{k}}$$





$$R^2 = \left(\frac{R}{2}\right)^2 + l^2$$

$$R^2 = \frac{R^2}{4} + l^2 \Rightarrow l = \frac{R\sqrt{3}}{2}$$

$$\vec{v}_P = \vec{v}_{CIR} + \vec{\omega} \wedge (P - CIR)$$

$$\vec{v}_P = \vec{0} + \left(-\frac{2v}{R}\vec{k}\right) \wedge \left(-\frac{R\sqrt{3}}{2}\vec{i}\right)$$

$$\boxed{\vec{v}_P = v\sqrt{3}\,\vec{j}}$$

c) OBS. $\vec{v}_C = \vec{v}_{CIR} + \vec{\omega} \wedge (C - CIR)$

$$\vec{v}_C = \vec{0} + \left(-\frac{2v}{R}\vec{k}\right) \wedge \left(-\frac{R}{2}\vec{j}\right)$$

$$\boxed{\vec{v}_C = -v\vec{i}} = CTE \Rightarrow \boxed{\vec{a}_C = \vec{0}}$$

$$\vec{a}_P = \cancel{\vec{a}_C}^{\,0} + \cancel{\dot{\vec{\omega}} \wedge (P - C)}^{\,0} + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (P - C)]$$

$$\vec{a}_P = \vec{0} + \vec{0} + \left(-\frac{2v}{R}\vec{k}\right) \wedge \left[\left(-\frac{2v}{R}\vec{k}\right) \wedge \left(-\frac{R\sqrt{3}}{2}\vec{i} + \frac{R}{2}\vec{j}\right)\right]$$

$$\boxed{\vec{a}_P = \frac{2v^2\sqrt{3}}{R}\vec{i} - \frac{2v^2}{R}\vec{j}}$$

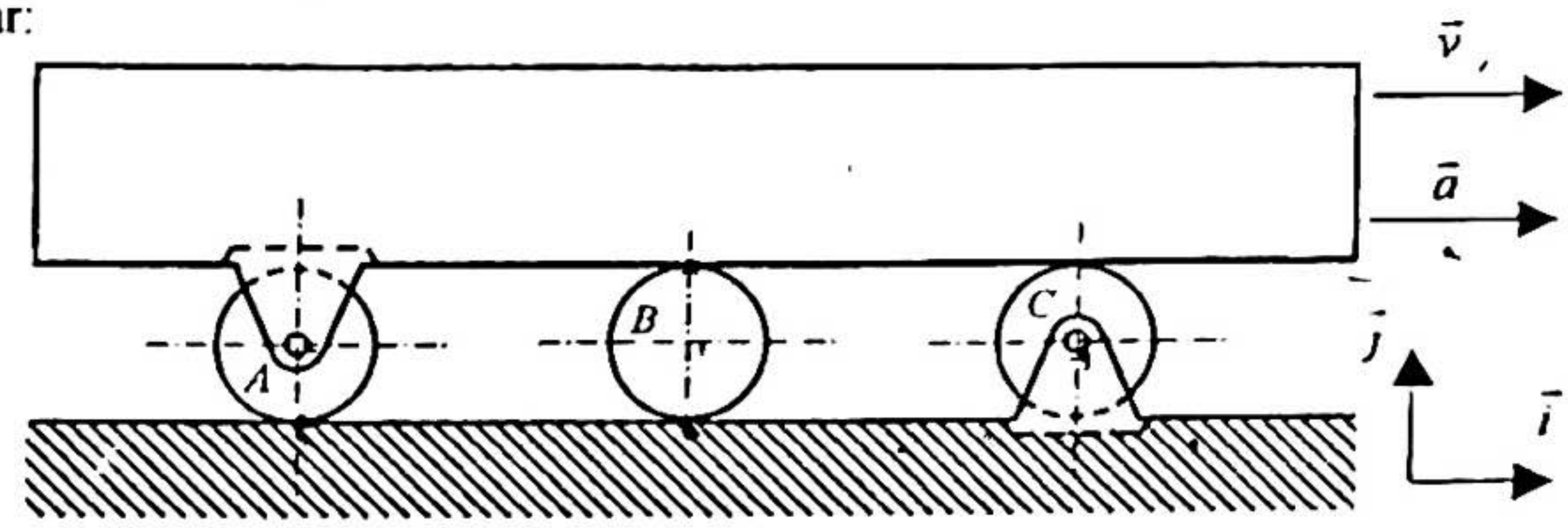
(3,0 pontos) Questão 1 - O vagonete da figura tem velocidade $v\vec{i}$ e aceleração $a\vec{i}$, e é sustentado por três discos de raio r. O disco B está em contato com o chão e o vagonete. Todos os discos rodam sem escorregar sobre as respectivas superfícies de contato. Determinar:

a) O CIR dos discos A, B e C.

b) Os vetores de rotação dos discos A, B e C.

c) Os vetores acelerações angulares dos discos A, B e C.

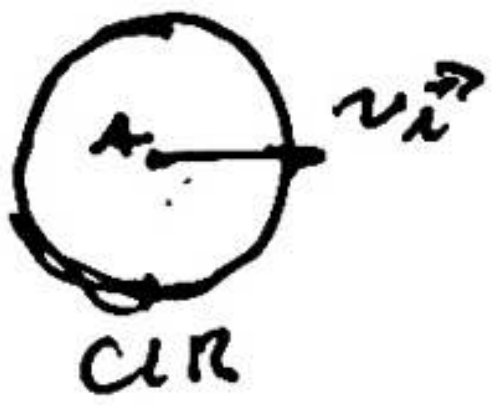
d) As acelerações dos pontos A, B e C, que são os centros geométricos dos discos A, B e C.



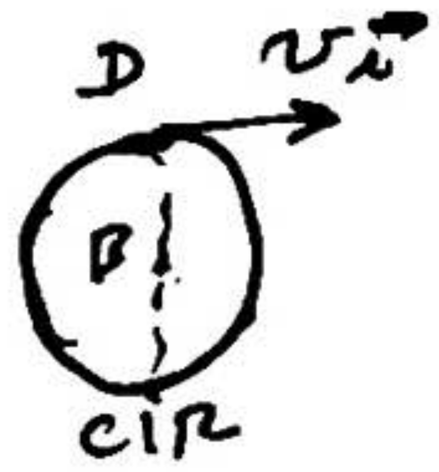
DISCO A	DISCO B	DISCO C

a)

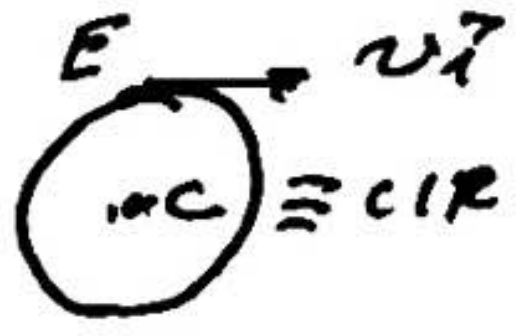
DISCO A:



DISCO B:



DISCO C:



b)

DISCO A:

$\vec{v}_A = v\vec{i}$

$\vec{v}_A = \vec{v}_{CIR} + \vec{\omega}_A \wedge (A - CIR)$

$v\vec{i} = \vec{0} + \omega_A \vec{k} \wedge r\vec{j}$

$v\vec{i} = -\omega_A r \vec{i}$

$\omega_A = -\frac{v}{r} \Rightarrow \boxed{\vec{\omega}_A = -\frac{v}{r}\vec{k}}$

DISCO B:

$v_D = v\vec{i}$

$\vec{v}_D = \vec{v}_{CIR} + \vec{\omega}_B \wedge (D - CIR)$

$v\vec{i} = \vec{0} + \omega_B \vec{k} \wedge 2r\vec{j}$

$v\vec{i} = -\omega_B \cdot 2r \vec{i}$

$\omega_B = -\frac{v}{2r} \Rightarrow \boxed{\vec{\omega}_B = -\frac{v}{2r}\vec{k}}$

DISCO C:

$\vec{v}_E = v\vec{i}$

$\vec{v}_E = \vec{v}_{CIR} + \vec{\omega}_C \wedge (E - CIR)$

$v\vec{i} = \vec{0} + \omega_C \vec{k} \wedge r\vec{j}$

$v\vec{i} = -\omega_C r \vec{i}$

$\omega_C = -\frac{v}{r} \Rightarrow \boxed{\vec{\omega}_C = -\frac{v}{r}\vec{k}}$

c)

DISCO A:

$\dot{\vec{\omega}}_A = -\frac{\dot{v}}{r}\vec{k}$

$\boxed{\dot{\vec{\omega}}_A = -\frac{a}{r}\vec{k}}$

DISCO B:

$\dot{\vec{\omega}}_B = -\frac{\dot{v}}{2r}\vec{k} = -\frac{a}{2r}\vec{k}$

DISCO C:

$\dot{\vec{\omega}}_C = -\frac{\dot{v}}{r}\vec{k}$

$\boxed{\dot{\vec{\omega}}_C = -\frac{a}{r}\vec{k}}$

d)

DISCO A:

$\vec{v}_A = v\vec{i}$

$\vec{a}_A = \dot{v}\vec{i} = a\vec{i}$

DISCO B:

$\vec{v}_B = \vec{v}_{CIR} + \vec{\omega}_B \wedge (B - CIR)$

$\vec{v}_B = \vec{0} - \frac{v}{2r}\vec{k} \wedge r\vec{j}$

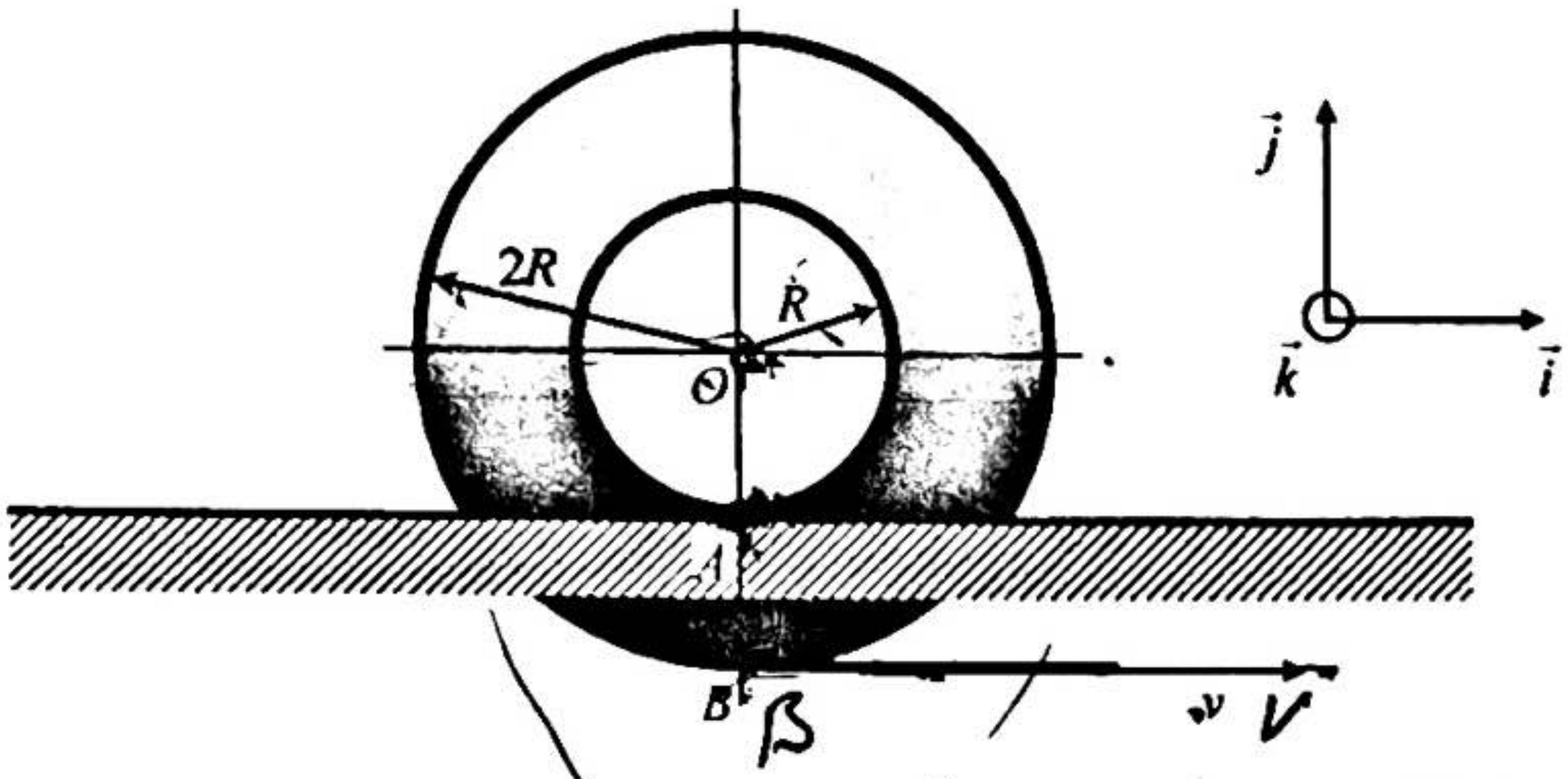
$\vec{v}_B = \frac{v}{2}\vec{i}$

$\vec{a}_B = \dot{\vec{v}}_B = \frac{\dot{v}}{2}\vec{i} = \frac{a}{2}\vec{i}$

DISCO C:

$\boxed{\vec{v}_C = \vec{0}} \Rightarrow \boxed{a_C = 0}$

QUESTÃO 2 (3,5 pontos): Considere uma bobina com um cabo enrolado conforme mostrado na figura. O raio de enrolamento é $2R$ e o raio de rolamento é R. Sabendo que não há escorregamento entre a bobina e o suporte fixo e que o cabo é tracionado horizontalmente com velocidade constante v, pede-se:

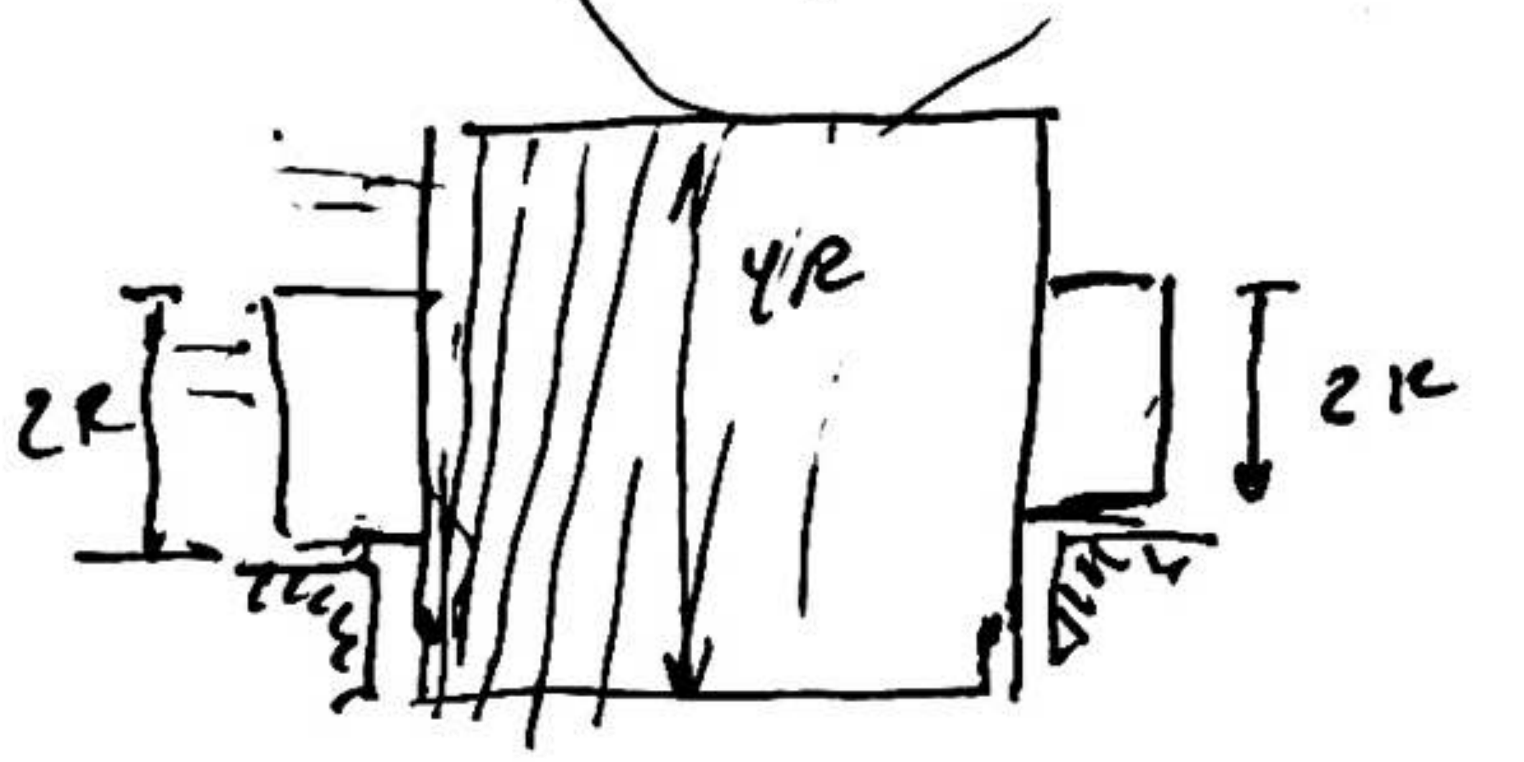


a) o CIR e o vetor de rotação $\vec{\omega}$ da bobina;

b) a velocidade $\vec{v}_O$ e a aceleração $\vec{a}_O$ do centro geométrico O da bobina;

c) a aceleração $\vec{a}_A$ do ponto A da bobina;

d) dizer se o cabo está se enrolando ou desenrolando. Justifique.



a) $\boxed{CIR \equiv A}$ $\quad v_B = v\vec{i}$

$\vec{\omega} = \omega\vec{k}$

$\vec{v}_B = \vec{v}_{CIR} + \vec{\omega} \wedge (B - CIR)$

$\vec{v}_B = \vec{0} + \omega\vec{k} \wedge (-R\vec{j})$

$v\vec{i} = +\omega R\vec{i} \Rightarrow \omega = \dfrac{v}{R}$

$\boxed{\vec{\omega} = \dfrac{v}{R}\vec{k}} \rightarrow \boxed{\dot{\vec{\omega}} = \vec{0}}$

b) $\vec{v}_O = \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge (O - A)$

$\vec{v}_O = \vec{0} + \dfrac{v}{R}\vec{k} \wedge R\vec{j} \Rightarrow \boxed{\vec{v}_O = -v\vec{i}} \rightarrow \boxed{\vec{a}_O = \vec{0}}$

cte

c) $\vec{a}_A = \cancel{\vec{a}_O} + \cancel{\dot{\vec{\omega}} \wedge (A - O)} + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (A - O)]$

$\vec{a}_A = \dfrac{v}{R}\vec{k} \wedge \left[\dfrac{v}{R}\vec{k} \wedge (-R\vec{j})\right] \Rightarrow \boxed{\vec{a}_A = \dfrac{v^2}{R}\vec{j}}$

d) O CABO ESTÁ DESENROLANDO JÁ QUE SUA EXTREMIDADE DESLOCA-SE PARA A DIREITA ENQUANTO QUE O CARRETEL GIRA NO SENTIDO ANTI-HORÁRIO COM O SEU CENTRO DESLOCANDO-SE PARA A DIREITA.