PLANTÃO DE DÚVIDAS DO DIA 4 DE OUTUBRO

1) Sejam V um espaço vetorial e U e W subespaços de V. Mostre que $V = U \oplus W$ se, e somente se, para cada $v \in V$, existem um único $u \in U$ e um único $w \in W$ tais que $v = u + w$.

RESOLUÇÃO.

($\Rightarrow$)

Suponhamos, inicialmente, que $V = U \oplus W$. Nesse caso, $V = U + W$, e, portanto, cada vetor de V pode ser escrito como a soma de um vetor de U com um vetor de W. Além disso, é claro também que, se u_1 e u_2 em U e w_1 e w_2 em W são tais que $u_1 + w_1 = u_2 + w_2$, então

$$\underbrace{u_1 - u_2}_{\in U} = \underbrace{w_2 - w_1}_{\in W}.$$

Logo, nesse caso, $u_1 - u_2$ e $w_2 - w_1$ pertencem a $U \cap W$ — a partir do que concluímos, em vista do fato de que $U \cap W = \{0_V\}$ que, nesse caso, $u_1 - u_2 = 0_V = w_2 - w_1$ (o que, por sua vez, equivale a dizer que $u_1 = u_2$, e $w_1 = w_2$). Sendo assim, cada vetor de V pode ser escrito de modo único como soma de um vetor de U com um vetor de W.

($\Leftarrow$)

Suponhamos, agora, que cada vetor de V possa ser escrito de modo único como soma de um vetor de U com um vetor de W. Nesse caso, evidentemente, $V = U + W$. Vamos mostrar, a seguir, que $U \cap W$ é igual a $\{0_V\}$. Para tanto, notemos, inicialmente, que $0_V \in U \cap W$ (pois $0_V \in U$, e $0_V \in W$). Além disso, dado $v \in U \cap W$, é imediato ver que

$$\underbrace{v}_{\in U} + \underbrace{0_V}_{\in W} = v = \underbrace{0_V}_{\in U} + \underbrace{v}_{\in W}$$

— o que, por sua vez, permite-nos concluir que $v = 0_V$. Logo, $U \cap W$

é de fato igual a $\{0_V\}$. E, como $V = U + W$, disso resulta que $V = U \oplus W$.