

3/10

(1)

OK, sabemos tudo sobre vetores/coordenadas agora!

⇒ Dada uma função (campo escalar) $\phi = \phi(x, y, z)$ seu gradiente

é o vetor definido por: $\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\hat{k} = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial z}\right)$

Dada uma variação espacial $d\vec{r} = (dx, dy, dz)$, a variação de ϕ será:

$$d\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\phi}{\partial y}dy + \frac{\partial\phi}{\partial z}dz = \nabla\phi \cdot d\vec{r}$$

Em particular, se escolhermos $d\vec{r}$ ao longo de uma superfície com

ϕ constante, teremos $d\phi = \nabla\phi \cdot d\vec{r} = 0$

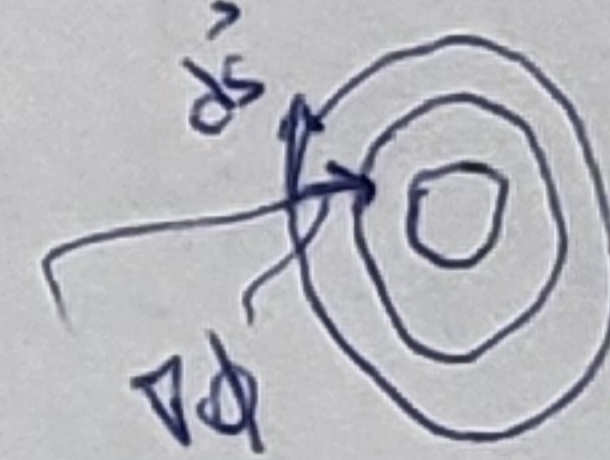
Portanto: $\nabla\phi$ é perpendicular a superfícies c/ ϕ const. !!

Da mesma forma: a máxima variação será ao longo da direção de $\nabla\phi$ (o máximo do prod. esc. é quando os dois vetores são paralelos) ⇒ Gradiente indica a direção de máxima

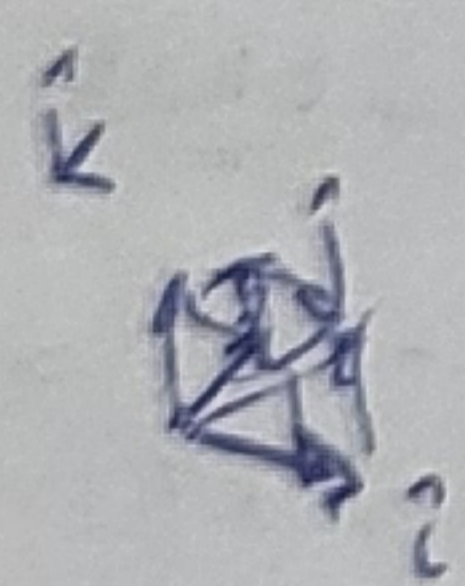
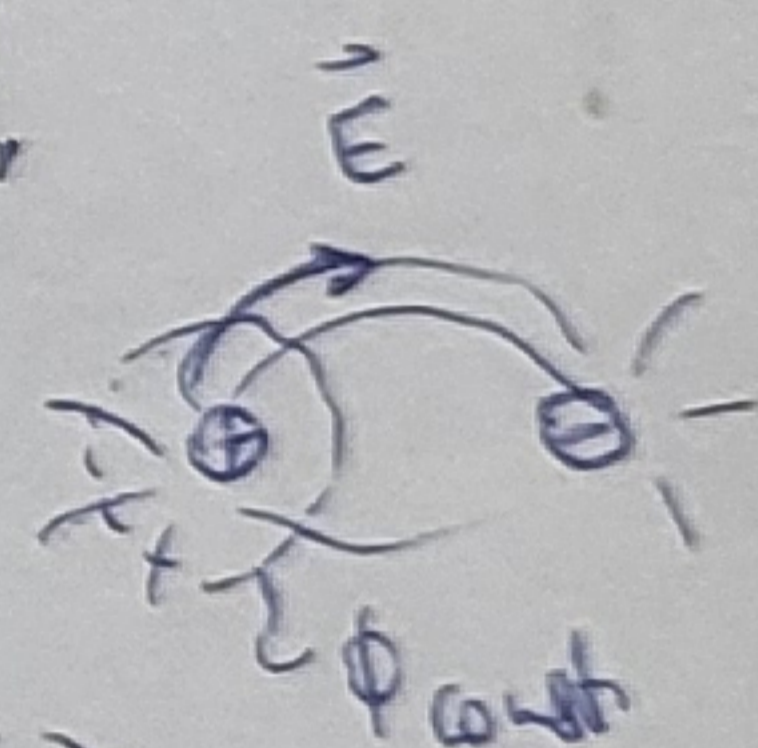
variação de uma função → ☺ !!

Mudanças de coordenadas:

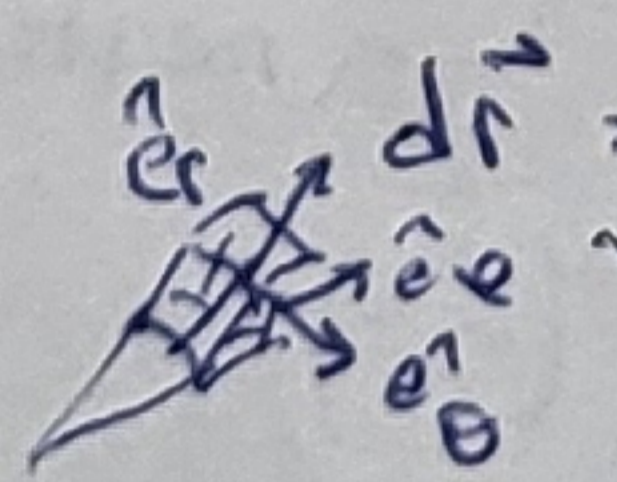
Isolando ϕ const.



e.g. campo el.



$$d\vec{r} = dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k}$$



$$d\vec{r} = dr\hat{e}_r + r d\theta\hat{e}_\theta + r \sin\theta d\phi\hat{e}_\phi$$

"arco" na direção θ "arco" na direção ϕ

$$d\phi = \frac{\partial\phi}{\partial r}dr + \frac{\partial\phi}{\partial\theta}d\theta + \frac{\partial\phi}{\partial\phi}d\phi = \nabla\phi \cdot d\vec{r}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (\nabla\phi)_r = \frac{\partial\phi}{\partial r} \\ \text{componentes} \\ (\nabla\phi)_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial\phi}{\partial\theta} \\ (\nabla\phi)_\phi = \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial\phi}{\partial\phi} \end{cases}$$

∴ grad em coord. esf. $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial r}\hat{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\hat{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\hat{e}_\phi$

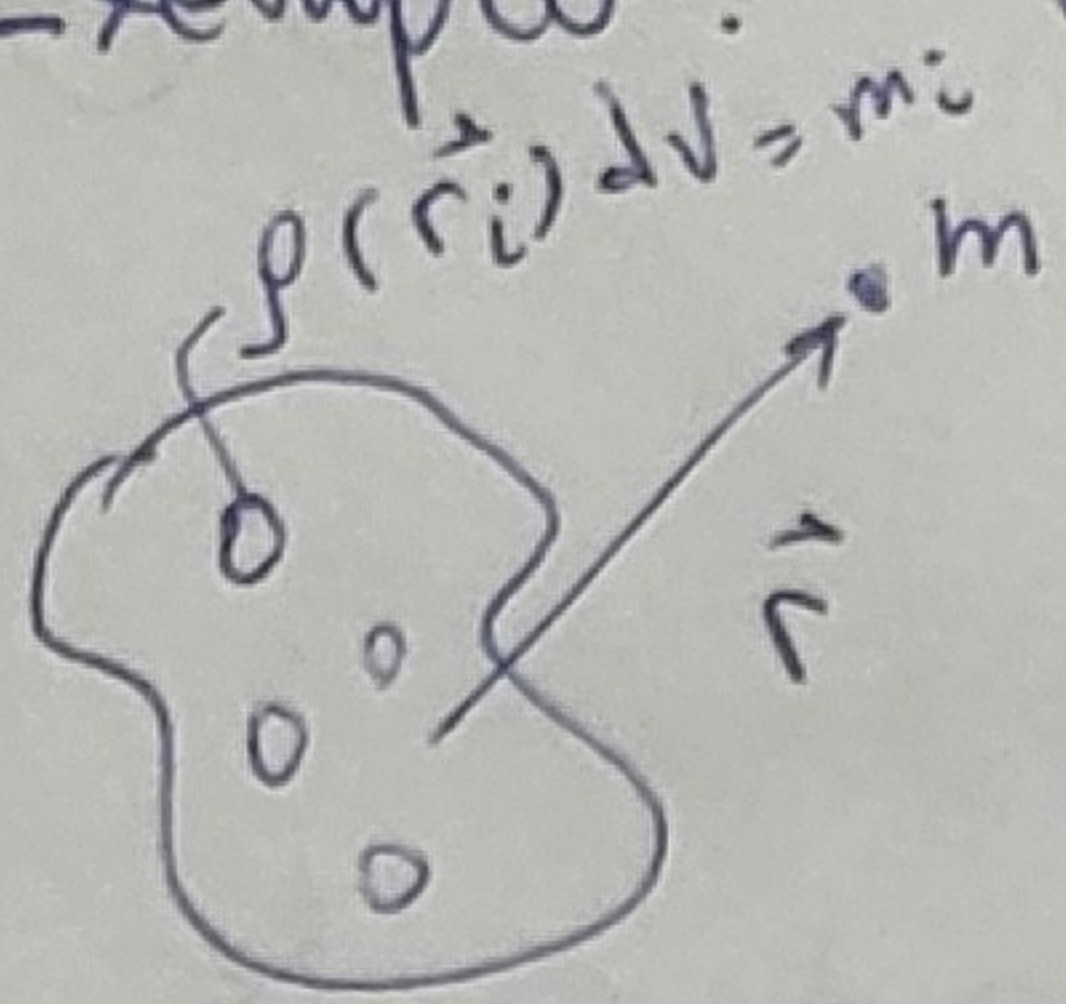
de forma que o prod. esc. $\nabla\phi \cdot d\vec{r}$ permanece o mesmo que em coord. cart.!

da mesma forma, temos div. $\nabla \cdot$, rot $\nabla \times$, Laplaciano $\nabla \cdot \nabla$ em coord. esf.

Lembrando: Teo. de Stokes: $\iint_{\text{sup}} \hat{n} \cdot (\nabla \times \vec{A}) dS = \int_C \vec{A} \cdot d\vec{r}$

Teo. de Gauss: $\iiint_V \nabla \cdot \vec{B} dV = \iint_S \hat{n} \cdot \vec{B} dS$

Exemplo: Teo. das cascas (Newton) usando teorema de Gauss



$$\vec{F}_{grav} = \sum_i -G m m_i \frac{(\vec{r} - \vec{r}_i)}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} = m \vec{g} = -\nabla V$$

pois \vec{F} só depende de pos. ρ

Potencial grav $\phi = V/m = \sum_i \frac{G m_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$

check $\nabla \phi = -\frac{\vec{F}}{m} = -\vec{g}$ note $\nabla(1/r) = -\frac{1}{r^2} \hat{e}_r$ gradem coord. esf.

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 \quad \forall C$$

$$\nabla \times \vec{F} = 0$$

F é grad.

aqui temos derivadas em \vec{r} mas ϕ é função de $\vec{r}_i = \vec{r} - \vec{r}_i \rightarrow$ também faz!

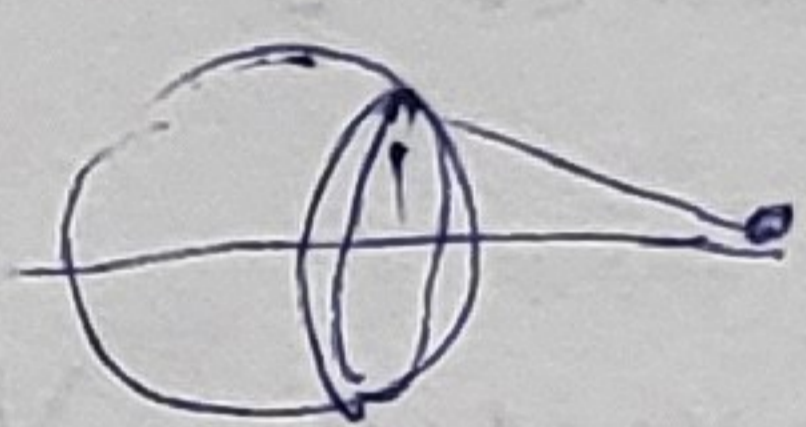
ou explicito/ $\frac{\partial}{\partial x_1} \dots$ pois $\frac{\partial}{\partial x} (\frac{1}{\sqrt{x^2 + \dots}}) = -\frac{1}{2} \frac{2x}{r^3}$ etc

$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial x} = 1 \rightarrow$ faz como se fosse \vec{r} e toma $\vec{r}' = \vec{r} - \vec{r}_i$ no final

$$\Rightarrow \nabla \phi = \sum_i G m_i \nabla \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} \right) = -\sum_i G m_i \frac{(\vec{r} - \vec{r}_i)}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} = -\frac{\vec{F}}{m}$$

p/ casca R integro $\frac{G m_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$ na superfície esférica de massa $M = 4\pi R^2 \rho$

p/ encontrar ϕ , e.g. por anéis

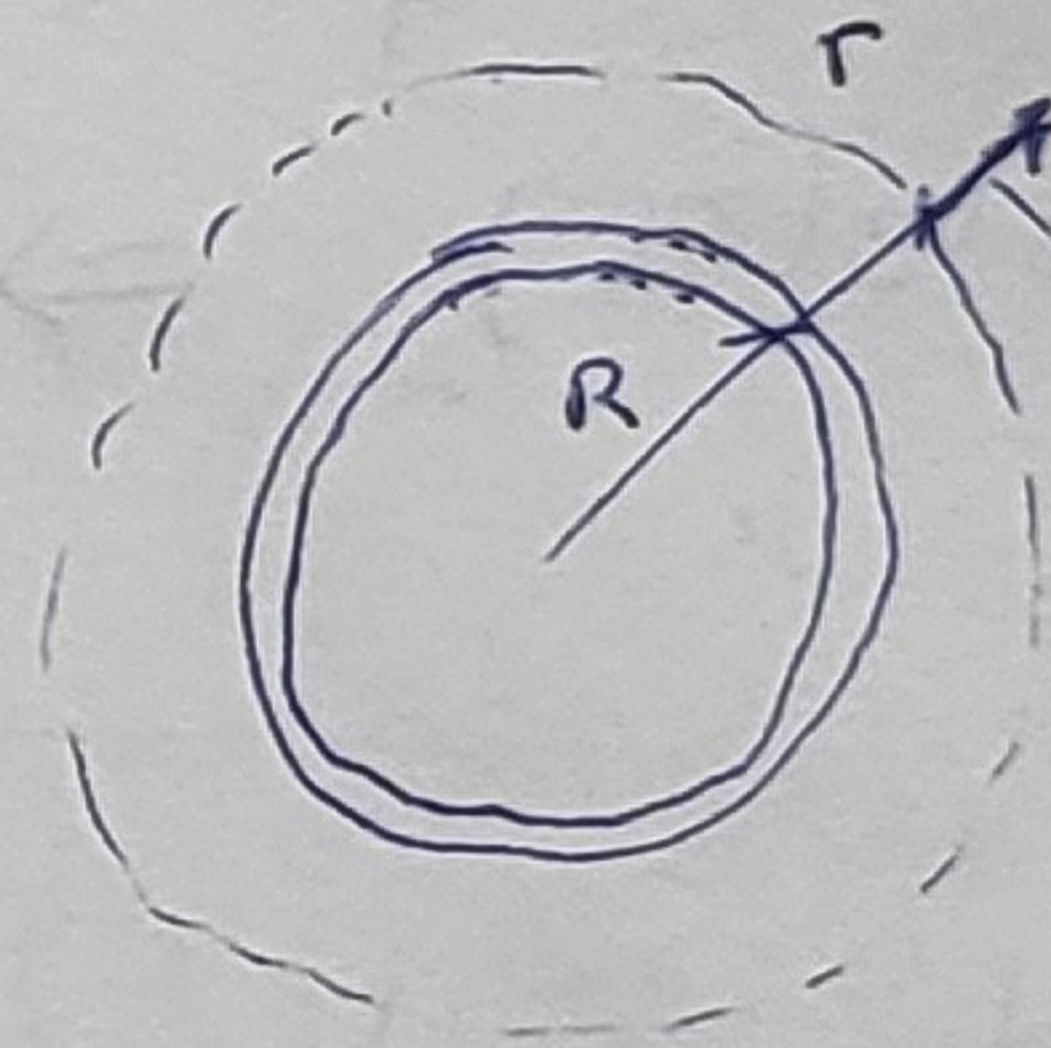


e depois temos $\vec{g} = -\nabla \phi$

uso a simetria, p/ casca de densidade uniforme deve dar \vec{g} radial, e pelo teorema de Gauss:

$$\oint_C \vec{g} \cdot \hat{n} = \int_V \nabla \cdot \vec{g} \, dV$$

casca de raio r



(na verdade, $-\vec{g}$) pois deve apontar p/ dentro

agora note que $\nabla \cdot \left(\frac{\vec{r}}{r^3} \right) = 4\pi \delta(\vec{r})$ **whaat??** \rightarrow demonstre! neste caso usar coord. esf. é +chato!

se $\vec{r} \neq 0$: $\nabla \cdot \left(\frac{\vec{r}}{r^3} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{r^3} \right) + \dots = \frac{1}{r^3} - \frac{3x^2}{r^5} + \dots = \frac{3}{r^3} - \frac{3r^2}{r^5} = 0$

p/ $\vec{r} = 0$ é algo cujo integral é 4π , pois $\oint \nabla \cdot \left(\frac{\vec{r}}{r^3} \right) = \int \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot \hat{n} = \frac{4\pi r^2}{r^3}$ portanto é $= 4\pi \delta(\vec{r})$ Some = integral na casca R

então temos $\oint \vec{g} \cdot \hat{n} = 4\pi r^2 |\vec{g}| = -\int_V \sum_i G m_i \nabla \cdot \left(\frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} \right) dV$

$$\rightarrow 4\pi r^2 |\vec{g}| = -G 4\pi \int_V \left[\sum_i m_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i) \right] dV$$

só significa que \vec{g} aponta p/ dentro

"tanto faz" ser div em \vec{r} ou $\vec{r}' = \vec{r} - \vec{r}_i$, como ocorre

total no interior da casca R

ver Cap 6 Symon

$\vec{g} = -\frac{GM}{r^3} \vec{r}$ como se a massa da casca estivesse concentrada no centro $\rightarrow \vec{F} = m\vec{g}$

$r < R$

da mesma forma, $\vec{g} = 0$ p/ pontos no interior da casca

⇒ leis do movimento, leis de conservação: o que muda de 1d p/ 3d? (2)

$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\vec{\ddot{r}}$ decompõe em coordenadas

e.g. oscilador em 3d (ver Seção 3-10 do Symon)



$m\ddot{x} = -k_x x$
 $m\ddot{y} = -k_y y$
 $m\ddot{z} = -k_z z$

movi/o em "cubo" de lados $2A_x, 2A_y, 2A_z$
 ↳ amplitude

→ dependendo da proporção entre as freq. $\omega_{x,y,z}$ e fases iniciais $\theta_{x,y,z}$ pode fazer figuras bonitas → figs. de Lissajous

movi/o de projétil (Seção 3-11 do Symon)

$m\vec{\ddot{r}} = -mg\hat{k}$ sem resist. do ar → $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t - \frac{gt^2}{2}\hat{k}$

supondo $\vec{r}_0 = 0$ e \vec{v}_0 no plano xz

$$\begin{cases} x = v_{x0} t \\ y = 0 \\ z = v_{z0} t - \frac{gt^2}{2} \end{cases}$$

ou: $m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -mg\hat{k} - b\frac{d\vec{r}}{dt}$ q resist.

como antes, $y=0$, separo x e z

↳ $m\dot{v}_x = -bv_x$ → $v_x = v_{x0} e^{-bt/m}$ ajusta const. (multiplicar) p/ dar $v_x(0) = v_{x0}$

↳ $x = \frac{mv_{x0}}{b} (1 - e^{-bt/m})$ ajusta const. p/ dar $x_0 = 0$

$m\dot{v}_z = -mg - bv_z$

↳ eq. dif. do tipo $\frac{dy}{dt} = -ay + b$ ⇒ $\frac{dy}{b-ay} = dt$ ⇒ $\ln(b-ay) = -at + c$

$y(t) = \frac{b}{a} - \left(\frac{e^c}{a}\right) e^{-at}$
 ↳ $c = y_0 - b/a$

portanto: $v_z = \left(v_{z0} + \frac{mg}{b}\right) e^{-bt/m} - \frac{mg}{b}$

e $z = \left(\frac{m^2g}{b^2} + \frac{m v_{z0}}{b}\right) (1 - e^{-bt/m}) - \frac{mg}{b} t$

→ ajusta const. p/ dar $z(0) = 0$

verifique ↑ ⊗

ENERGIA:

$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int \vec{F} \cdot \vec{v} dt = \int m \left(\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v}\right) dt$

$= \int m \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\vec{v} \cdot \vec{v}) dt = \frac{m v^2}{2} \Big|_1^2 = K_2 - K_1 = \Delta K$

∴ como antes!

En. Potencial: se $\int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = W$ for indep. do caminho

teremos $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 \Rightarrow \int (\nabla \times \vec{F}) \cdot \hat{n} \Rightarrow \nabla \times \vec{F} = 0, \vec{F} = -\nabla V$
 $\left. \begin{matrix} \text{curva} \\ \times \end{matrix} \right\} \Rightarrow F \text{ é grad.} \therefore \vec{F} \cdot d\vec{r} = -dV$

então, tb é como antes, se \vec{F} é conservativa (W n depende da trajetória) tenho $W = -(V_2 - V_1) \Rightarrow E = K + V = \text{const.} = k_2 - k_1$

→ a única sutileza é que n é mais suficiente ter força que só depende da posição, preciso tb verificar que $\nabla \times \vec{F} = 0$

exemplo: (de Sec 3-12 do Symon)

Qual das forças abaixo é conservativa? *

- a) $F_x = axy, F_y = -az^2, F_z = -ax^2$
- b) $F_x = ay(y^2 - 3z^2), F_y = 3ax(y^2 - z^2), F_z = -6axyz$

FORÇA CENTRAL

$$\vec{F} = F(r) \hat{r}$$

paralela ao vetor posic, e só depende de $|\vec{r}|$

e.g. \vec{F}_{grav} , dirigida p/ o centro de força \vec{r} tomado a partir do centro

Aí, necessariamente: é conservativa!

* como mostrar? $\nabla \times \vec{F} = 0 \rightarrow (\nabla \times \vec{F})_i = \epsilon_{ijk} \partial_j F_k$
 $= \epsilon_{ijk} \frac{F(r)}{r}$
 mas $\partial_j F_k = \frac{\partial F_k}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x_j} = \frac{x_j}{r} \frac{\partial F(r)}{\partial r}$
 $\therefore = \partial_k F_j (!)$

⇒ força cons. nã é necessariamente central, ver ex. acima, MAS central é necessariamente conservativa!

Note: $\vec{F} = -\nabla V \rightarrow V = V(r)$
 $\left. \begin{matrix} F(r) \hat{e}_r \end{matrix} \right\}$

Além disso: conserva momento angular, como já vimos!

de fato: $\dot{\vec{L}} = d\vec{L}/dt = \vec{r} \times \vec{F} = F(r) \vec{r} \times \hat{r} = 0$

$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \text{const.}$

e, ainda por cima: movimto estará contido no plano \perp a \vec{L} !

* como mostrar?

⇒ movto no plano perp. a \vec{L} , vamos usar coord. polares

$$\text{vimos acima: } \begin{cases} \vec{r} = r \hat{e}_r \\ \dot{\vec{r}} = \dot{r} \hat{e}_r + r \dot{\theta} \hat{e}_\theta \\ \ddot{\vec{r}} = (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \hat{e}_r + (r \ddot{\theta} + 2 \dot{r} \dot{\theta}) \hat{e}_\theta \end{cases}$$

L_{corp}

como $\vec{F} = F(r) \hat{e}_r \rightarrow \begin{cases} m \ddot{r} - m r \dot{\theta}^2 = F(r) \\ m r \ddot{\theta} + 2 m \dot{r} \dot{\theta} = 0 \rightarrow \text{equiv. a } \frac{d}{dt} (m r^2 \dot{\theta}) = 0 \end{cases}$

$L = I \omega$
 $(m r^2)$

note que como $\vec{L} = \vec{r} \times m \vec{v}$ só a velocidade angular vai contribuir
 $\vec{v} = \dot{r} \hat{e}_r + r \omega \hat{e}_\theta \rightarrow |\vec{r} \times \vec{v}| = r^2 \omega$; $v^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2$

Portanto, temos: $\begin{cases} m r^2 \dot{\theta} = L = \text{const.} \\ K + V = E = \frac{m}{2} \dot{r}^2 + \frac{m}{2} r^2 \dot{\theta}^2 + V(r) = \text{const.} \end{cases}$

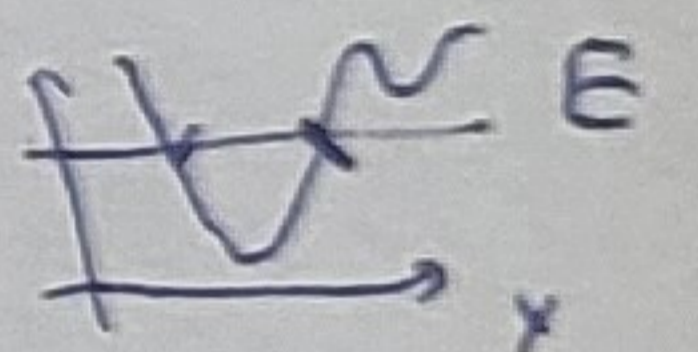
Combinando as 2 eqs: $\frac{m \dot{r}^2}{2} + \frac{L^2}{2 m r^2} + V(r) = E$

e resolvemos por $\dot{r} \Rightarrow$ DMG, virou movto 1d !?

tipo movto em pot. $V(x)$
e temos pontos de retorno
p/ $E = V$ etc.

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2}{m} \left(E - V(r) - \frac{L^2}{2 m r^2} \right)^{1/2}}$$

(tomamos $L = p$ ou "incluído" no potencial)



podemos integrar: $\int_{r_0}^r \frac{dr}{\left(E - V(r) - \frac{L^2}{2 m r^2} \right)^{1/2}} = \sqrt{\frac{2}{m}} t$

e temos tb $\theta(t)$: $\theta = \theta_0 + \int_0^t \frac{L}{m r^2} dt$ da solução acima
(usei $\dot{\theta} = L / m r^2$)

Note que a 2ª lei radial era: $m \ddot{r} = F(r) + \frac{L^2}{m r^3}$

então é como se tivéssemos uma força adicional na direção radial p/ for \Rightarrow barreira centrífuga

qto maior ω maior a força adicional, mas for isso é como se fosse unidimensional, em r 😊!

Equivalentemente, temos $V(r) \rightarrow V(r) + \frac{L^2}{2mr^2}$ barreiras centrífugas

pl simplificar ainda mais, tome a variável

$$u = 1/r$$

⊗ verifique!

$$r = 1/u \quad r^2 \dot{\theta} = \frac{L}{m}$$

$$\dot{r} = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\theta} \dot{\theta}$$

$$\ddot{r} = -\frac{L}{m} \frac{du}{d\theta} \rightarrow \ddot{r} = -\frac{L}{m} \frac{d^2u}{d\theta^2}$$

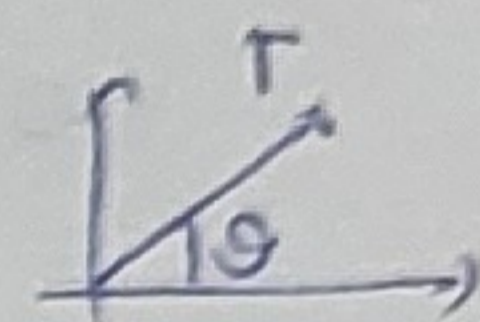
$$= Lu^2/m$$

que leva a:

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} = -u - \frac{m}{L^2 u^2} F(1/u)$$

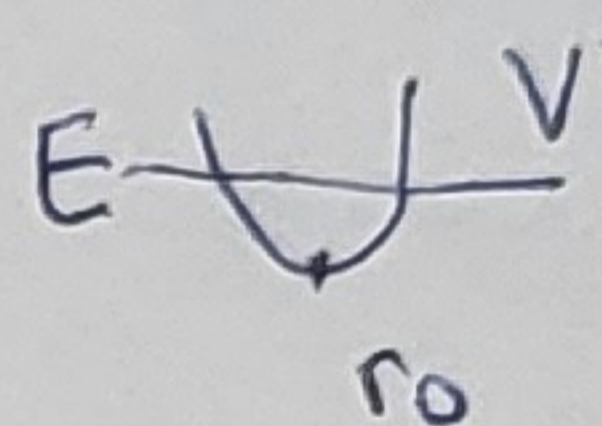
$$m\ddot{r} = F(r) + \frac{L^2 u^3}{m} = -\frac{L^2 u^2}{m} \frac{d^2u}{d\theta^2}$$

⇒ Sabendo a força (ou o potencial), integro pl achar $u \rightarrow r(\theta)$



analogia cl 1d: tendo $V' = V + \frac{L^2}{2mr^2}$ e 1 pb de mínimo r_0

posso supor oscilações harmônicas ao redor de r_0



$$E > V'(r_0)$$

com freq. ang. $\omega^2 = \frac{1}{m} \left(\frac{d^2V'}{dr^2} \right)_{r_0}$

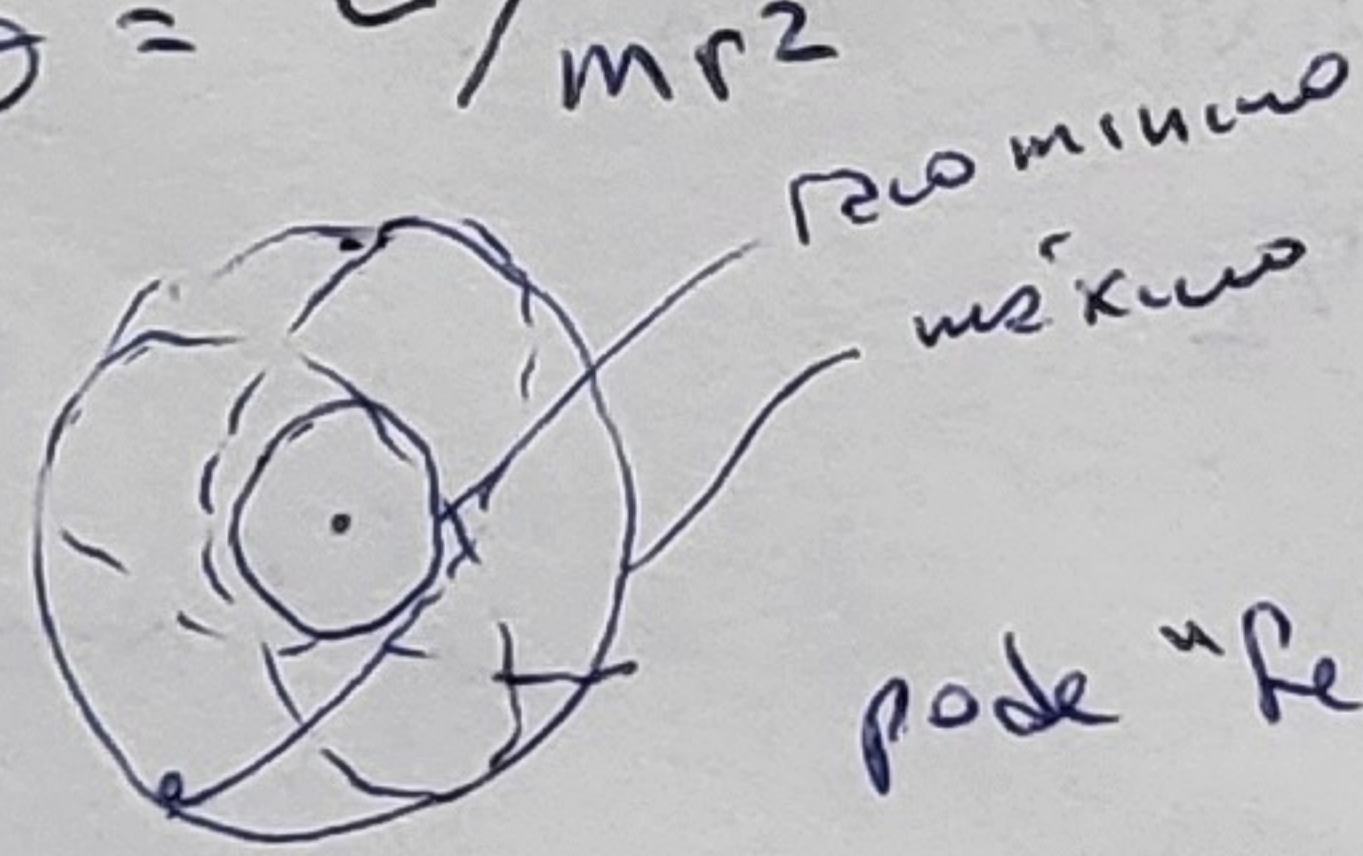
⊗ demonstre!

$$V' \approx V'(r_0) + \frac{dV'}{dr} \Big|_{r_0} (r-r_0) + \frac{1}{2} \frac{d^2V'}{dr^2} \Big|_{r_0} (r-r_0)^2$$

Note: isso é na coordenada r , ao mesmo tempo que a coord. θ descreve movimento com $\dot{\theta} = L/mr^2$

pl $r \approx r_0$ pot. é 1 parábola, $kx^2/2$ força restauradora $-kx$, oscilação com $k = m\omega^2 = d^2V'/dr^2|_{r_0}$

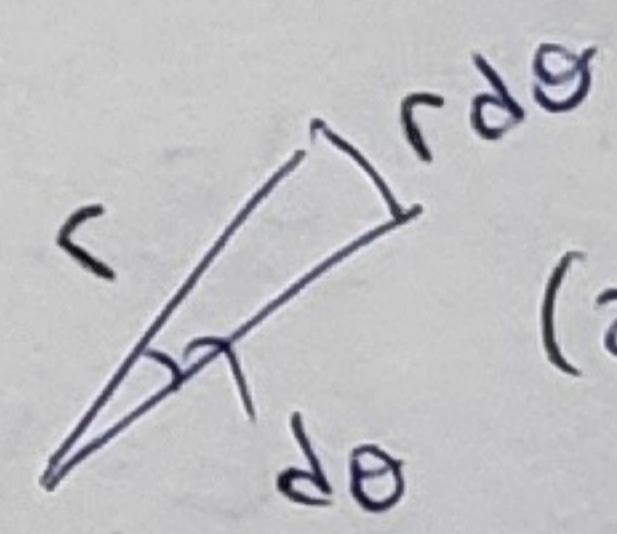
algo tipo



$\omega = \dot{\theta}$ é maior pl r menor (L é const.)

podem "fechar" (=periódico) ou não

pl variação de a área percorrida é $dS = \frac{r^2}{2} d\theta$



(área do triângulo)

∴ área coberta por tempo: $\frac{dS}{dt} = \frac{r^2 \dot{\theta}}{2} = \frac{L}{2m}$

⇒ é constante! (Lei das áreas, de Kepler)

se o movimento for periódico a área da órbita será

$$S = \frac{L \tau}{2m}$$

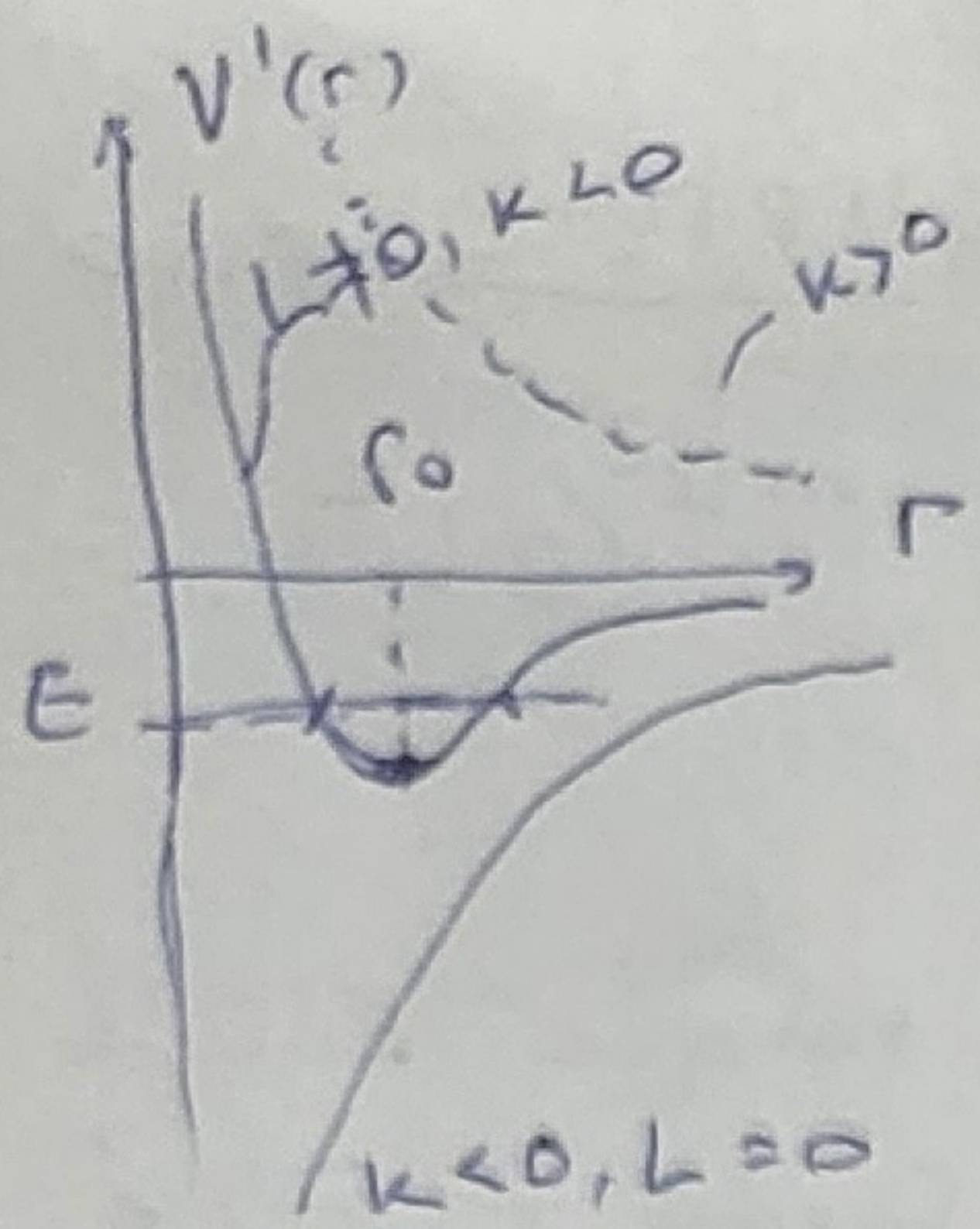
Isso pl $F(r)$ geral

⊗ check: $\vec{F} = -\nabla V = -\frac{dV}{dr} \hat{r} = \frac{k}{r^2} \hat{r}$

No caso $\vec{F} = \frac{k}{r^2} \hat{r}$, $V(r) = \frac{k}{r}$

(grav.) $\rightarrow k = -Gm_1 m_2$
ou Coulomb...

temos $V' = \frac{k}{r} + \frac{L^2}{2mr^3} \rightarrow$



$$\frac{k}{r} + \frac{L^2}{2mr^2}$$

se $L=0$ é sempre negativo

$k < 0$

se $L \neq 0$ começa com barreira repulsiva por r pequeno, vai cruzar eixo horiz., tem mínimo em r_0

dado por $\frac{dV'}{dr} = 0 \rightarrow r_0 = \frac{L^2}{(-k)m}$, $V'(r_0) = -\frac{mk^2}{2L^2}$

(4)

$$\frac{dV'}{dr} = -\frac{k}{r^2} - \frac{L^2}{mr^3}, \quad \frac{d^2V'}{dr^2} = \frac{2k}{r^3} + \frac{3L^2}{mr^4} \quad \text{por } r=r_0 \quad \frac{k^4 m^3}{L^6} \rightarrow \text{oscilação}$$

$$\omega^2 = \frac{k^4 m^2}{L^6}$$

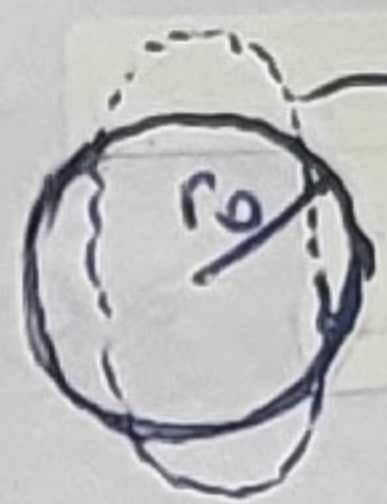
Olha que legal: oscila ao redor de r_0 c/ Freq. $\omega = \frac{mk^2}{L^3}$

mas por $r=r_0$ (mínimo do pot.) temos r fixo = movimento circular,

dado por $L = mr_0^2 \dot{\theta}$, ou seja Freq. ang. $\dot{\theta} = \frac{L}{mr_0^2} = \frac{L m^2 k^2}{m r_0^4} = \frac{mk^2}{L^3}$

portanto, por em um pouco acima de $V'(r_0)$ há oscilação de r com a mesma freq. do movimento circular com $r=r_0$ fixo.

(tipo) \Rightarrow elipse fechada!



passa de $r \geq r_0$ por $r \leq r_0$ enquanto percorre um ciclo

(Ex. 3.30 do Symon)

Voltando à eq. por u , com $F(r) = k/r^2$, $F(u) = ku^2$:

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = -\frac{mk}{L^2}$$

Sol. da homogênea: $u = A \cos(\theta - \theta_0)$

sol. particular: $u = -mk/L^2$

$$\Rightarrow \text{sol. geral: } u = \frac{1}{r} = -\frac{mk}{L^2} + A \cos(\theta - \theta_0)$$

é a equação de cônica com foco em $r=0$

\hookrightarrow (ver Apêndice B do Kibble)

Note que: A, θ_0 arbitrários, portanto posso supor A positivo. Nesse caso, os pontos de menor e maior aproximação da origem são dados por $\frac{1}{r_{\mp}} = -\frac{mk}{L^2} \pm A$ e correspondem a $V' = E$, como vimos

isto implica:

* verifique!

$$A^2 = \frac{2mE}{L^2} + \frac{m^2 k^2}{L^4}$$

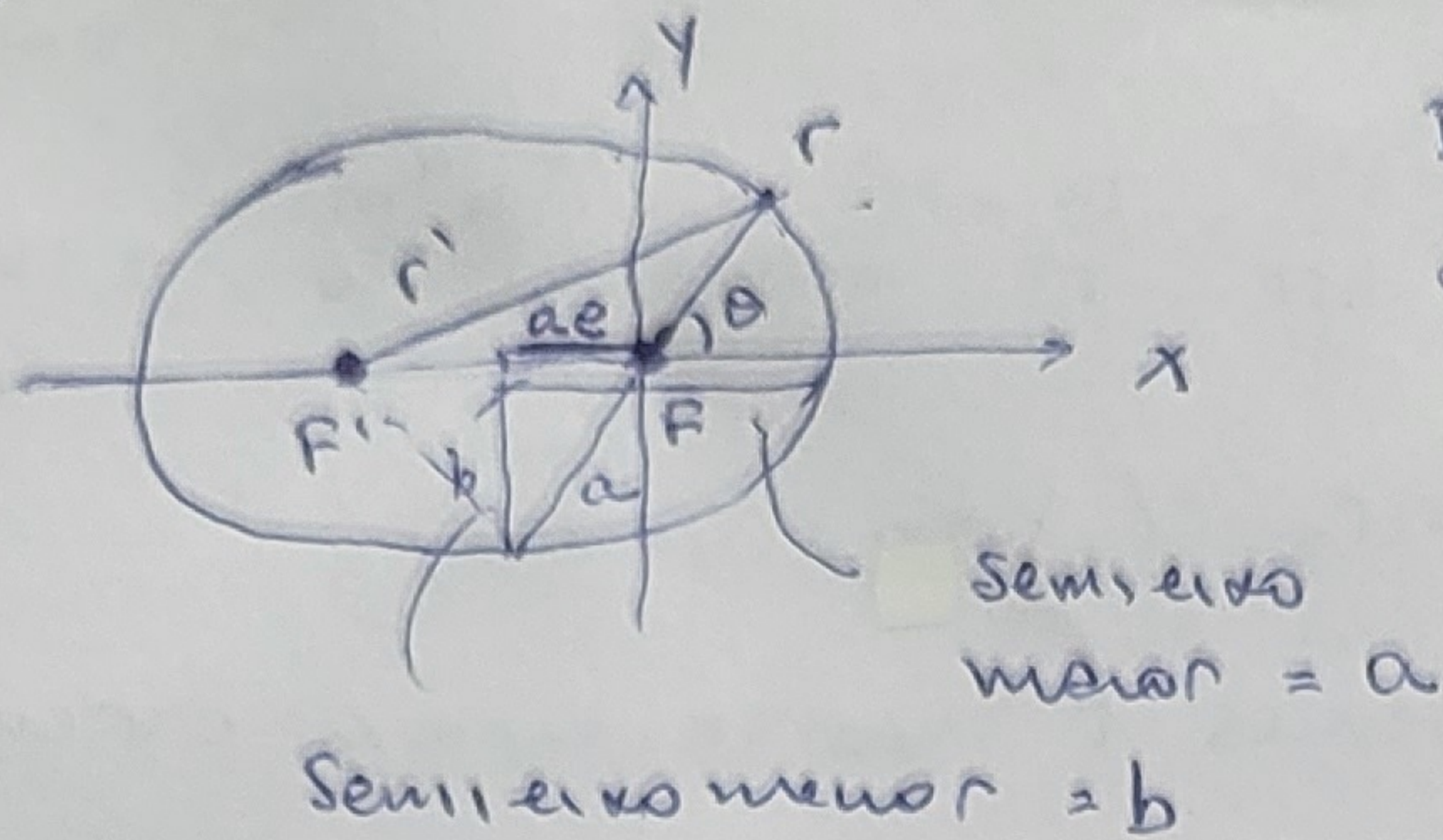
\rightarrow a constante A é escrita em termos das 2 constantes do movimento: E, L

Na verdade, como r é positivo, vemos que se $u > 0$ (força repulsiva!) há apenas um ponto com $V' = E$ e apenas se $A > mk/L^2$ (i.e. $E > 0$)

No caso de $k < 0$ (força atrativa) e $L \neq 0$ teremos os dois pontos de retorno para $V'_{min} < E < 0$ (vergálio acune) sendo $V'_{min} = -mk^2/2L^2$

e neste caso a órbita será uma ELIPSE

Vejamos:



Definida como curva tal que soma das distâncias aos focos F, F' é fixa: $r + r' = 2a$

dist. entre os focos $= 2ae$
 e/ou $e=0$ temos círculo (de raio a)
 * demonstre que o semi-eixo menor é = a

lembra os senos e cossenos
 temos: $r'^2 = r^2 + 4a^2e^2 + 4rae \cos \theta$

mas $r' = 2a - r$ \Rightarrow $r = \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos \theta}$

compre com o que tínhamos acima: tome $\theta_0 = 0$, i.e. eixo principal e o eixo x

$\frac{(L^2/-mk)}{r} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{mk^2}} \cos \theta$

\rightarrow faz sentido! pois $e = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{mk^2}}$ está entre 0 e 1 ($-mk^2/2L^2 < E < 0$)

p/ $E = V'_{min}$: temos órbita circular de raio $r = a = r_0 = \frac{L^2}{-km}$, visto acima

e de fato: $\frac{-a2Ek}{mk^2} = \frac{L^2}{-mk} \rightarrow a = \frac{-k}{-2E} \rightarrow \frac{-k}{2(-mk^2)} = \frac{L^2}{-km}$ e $e=0$

* Ve consegue calcular a área da elipse?

note que a eq. da elipse equivale a $\frac{y^2}{b^2} + \frac{(x+ea)^2}{a^2} = 1$

$a(1-e^2) = r + ex$

mas $a^2 = b^2 + a^2e^2 \rightarrow a^2(1-e^2) = b^2$

\therefore área = $4 \int_0^a y dx = 4 \int_0^a b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} dx = \pi ab$

\Rightarrow como visto acima, a área está relacionada ao período da órbita

$S = \frac{L\tau}{2m} = \pi ab \rightarrow \tau = \frac{2m}{L} \pi a^2 \sqrt{1-e^2} = \frac{2m}{L} \pi a^2 \sqrt{\frac{2(-E)L^2}{mk^2}} = 2m\pi a^2 \sqrt{\frac{1}{-mka}} = 2\pi a^{3/2} \sqrt{\frac{m}{-k}}$

$\Rightarrow \tau^2 = 4\pi^2 m a^3 / (-k)$

3ª lei de Kepler!

= GMm

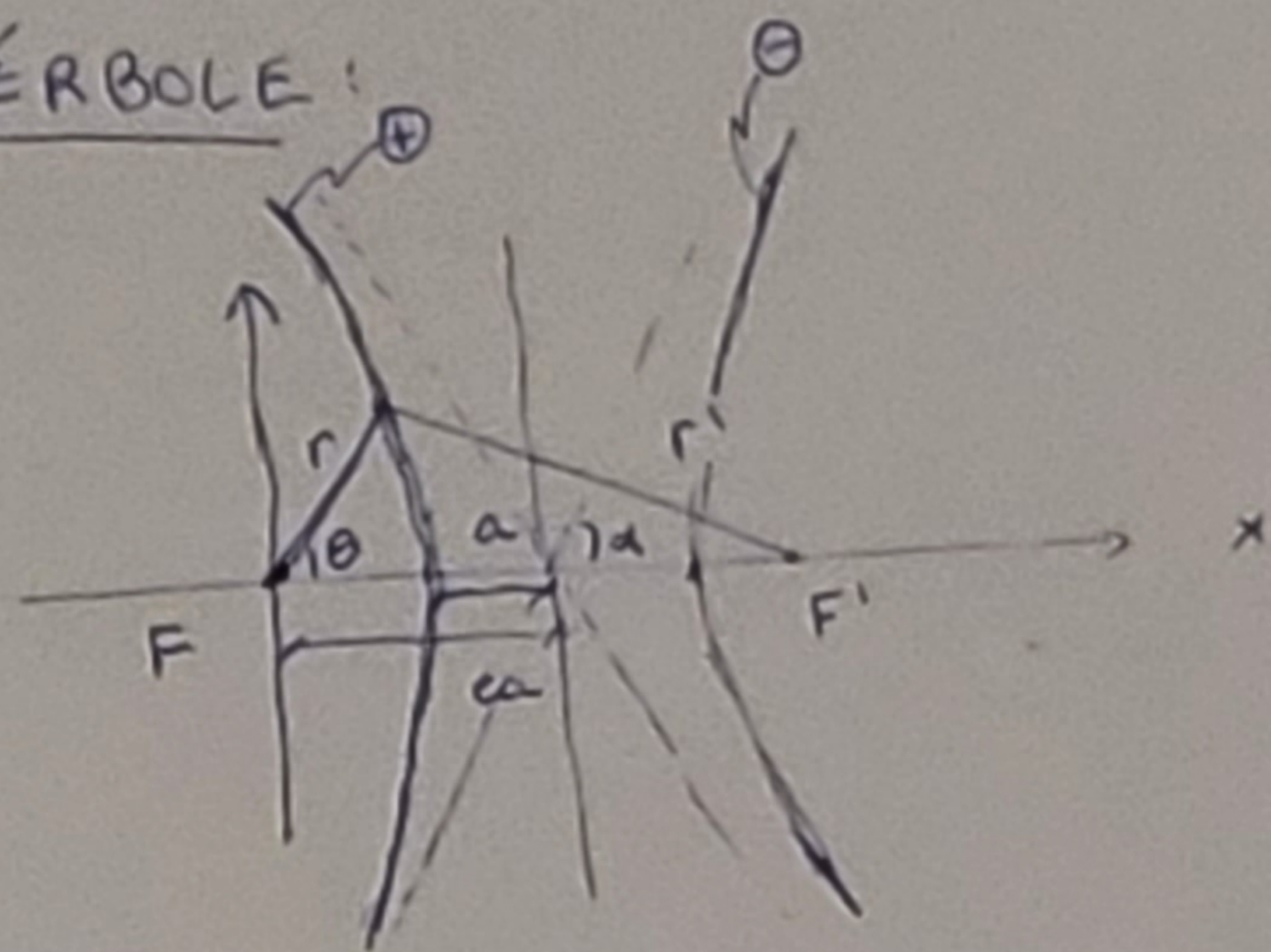
$\tau^2 = \frac{4\pi^2}{MG} a^3$ Note: a const. é a mesma p/ todos os planetas, permite "pesar" o Sol!

Leis:

- 1) planetas se movem em elipses c/ Sol em um dos focos
- 2) áreas percorridas pela linha que liga o Sol à um planeta são iguais p/ tempos iguais \rightarrow vimos acima
- 3) o quadrado do período de revolução é proporcional ao cubo do semi-eixo maior

Considere agora os casos em que há apenas 1 ponto de retorno (5)
 (o gráfico acima, casos em que $E > 0$ p/ pot. atrativo, ou $E > 0$ p/ repulsivo)
 e compare com órbita dada por HIPÉRBOLE:

Definida por: $r' - r = 2a$ (ramo +)
 ou $r' - r = -2a$ (ramo -)



temos, como acima, pela lei dos
 cossenos: $r'^2 = r^2 + 4a^2 e^2 - 4rae \cos \theta$
 $= r^2 + 4a^2 \pm 4ar$

$\rightarrow \pm 4ar + 4a^2 e^2 = 4a^2(e^2 - 1)$

$\Rightarrow r = \frac{a(e^2 - 1)}{\pm 1 + e \cos \theta}$

como acima (elipse), mas agora $e > 1$
 e temos 2 "ramos"

note: linhas tracejadas são as assíntotas,
 dadas por $\cos \alpha = \pm 1/e$ ângulo α que
 corresp. a $r \rightarrow \infty$

Posso comparar c/ a solução do movimento p/ $V(r) = k/r$. Como acima, temos:

$\frac{L^2/mk}{r} = 1 \pm \sqrt{1 + 2EL^2/mk^2} \cos(\theta - \theta_0)$ atrativo ($k < 0$): ramo +, $E > 0$
 \rightarrow Sendo $e^2 = 1 + 2EL^2/mk^2 \rightarrow \left[a = \frac{-k}{2E} \right]$
 $\frac{a(e^2 - 1)}{r} = \pm 1 + e \cos \theta$ repulsivo ($k > 0$): ramo -, $E > 0$

NOTE: θ_0 é o ângulo entre
 o eixo x e a linha
 que lig. a origem ao perihélio \rightarrow pto de máxima aproximação

e^2 como acima, $a = k/2E$, $\theta_0 = 0$

Em ambos casos temos $a = |k|/2|E|$ Semi-eixo maior do movimento
 relacionado apenas a E e k!

lembrando: pto de retorno $\frac{1}{r} = -\frac{mk}{L^2} + A$, $A = \sqrt{\frac{2mE}{L^2} + \frac{m^2k^2}{L^4}}$ note que é
 $1/r_0$ da órbita
 circular!
 (nesses casos)

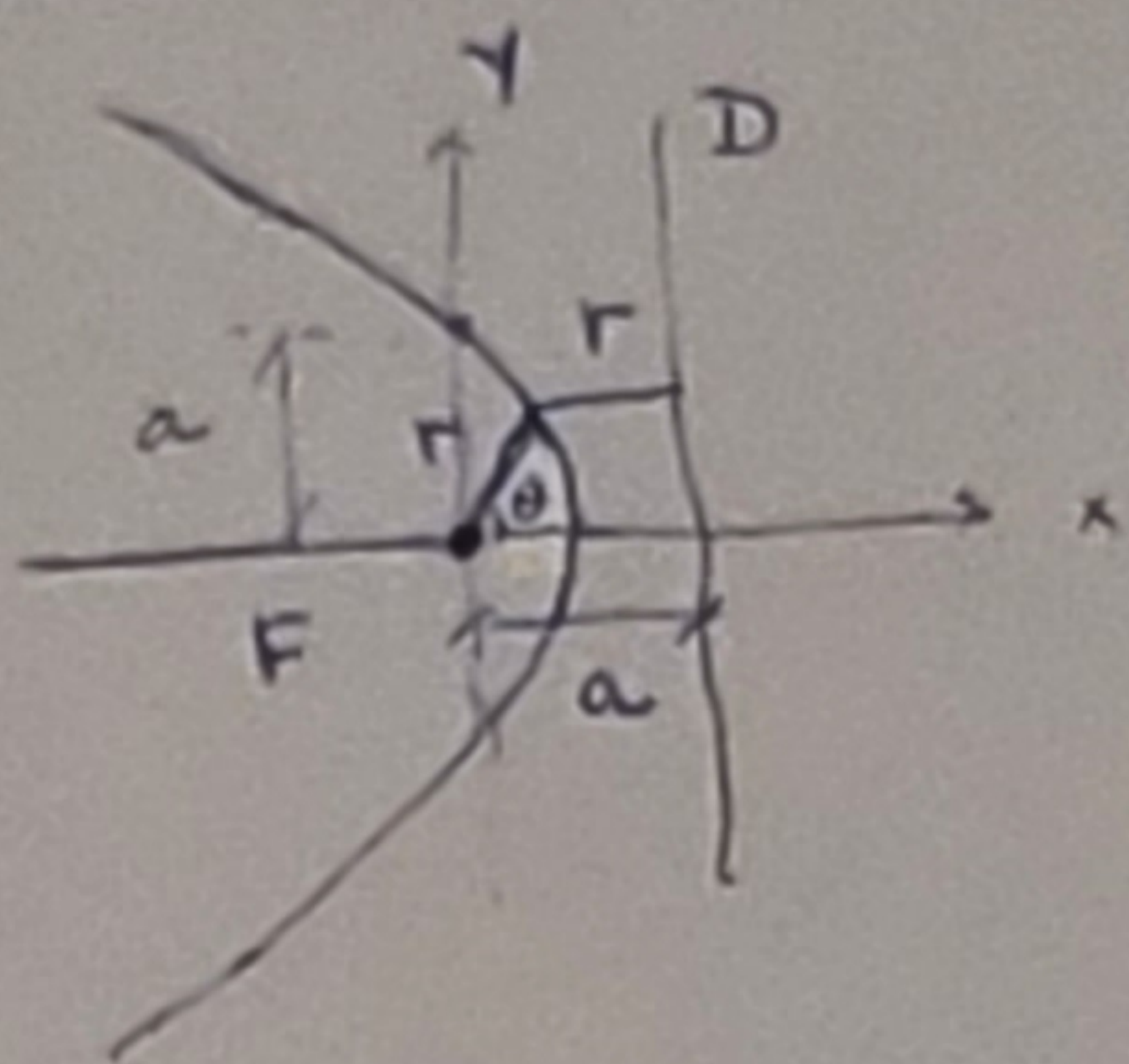
ou seja: $\frac{1}{r} = -\frac{mk}{L^2} + \frac{m|k|}{L^2} \left(1 + 2\frac{L^2 E}{mk^2} \right)^{1/2} = \frac{m|k|}{L^2} (\pm 1 + e)$
 \rightarrow pto de retorno = perihélio, deve ser $= a(e \mp 1)$ pela figura

usando que $L^2 = (e^2 - 1)mk^2/2E$ " $|k|/a$ " $\rightarrow \frac{1}{r} = \frac{m|k|/|k| (e \pm 1)}{mk^2 a(e^2 - 1)} = \frac{1}{a(e \mp 1)}$ ramo + (atrativo)
 ramo - (repulsivo)

Portanto, p/ movimento c/ apenas 1 pto de retorno o perihélio é $= a(e \mp 1) = r_0(e \mp 1)$

Falta apenas considerar o caso $E=0 \rightarrow e \rightarrow 1$, que só faz sentido p/ pot. atrativo ($k < 0$). (Ok, tb não consideramos $L=0$, mas aí o movimento é efetivamente unidimensional, na direção r .) ^{→ né tem graça 😊}

p/ $k < 0, E=0$ a hipérbole (ramo +) vai "se tornar" uma PARÁBOLA:



definida como a curva tal que r é igual à dist. em relação a um eixo fixo: diretriz

Temos então: $a = r(1 + \cos\theta)$

p/ comparar com: $(\frac{L^2}{-mk}) = 1 + \cos\theta$ ($k < 0$)

$\therefore a = \frac{L^2}{-mk}$ ($= r_0$ do movimento circular)

⊗ como é a curva em coord. cartesianas? $x(y)$ é parábola c/ boca p/baixo, raízes $\pm a$ e interseção c/ eixo y em $x = -a/2$: $x = \frac{y^2 - a^2}{2a}$ (verifique!)

RESUMINDO: p/ força central com $V(r) = k/r$ o movimento será em um plano, e a órbita é: 1) periódica = elipse ou círculo (suponha $L \neq 0$)

p/ $k < 0$ e $V'_{min} < E < 0$ com pontos de retorno (dados por aproximação menor ou maior à origem no eixo x)

Soluções: $r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta}$
 $r_{\pm} = a(1 \pm e)$, sendo $a = \frac{|k|}{2|E|}$ e $e = \left(1 + \frac{2EL^2}{mk^2}\right)^{1/2} < 1$ ($E < 0$)

Note: em termos de $r_0 = L^2/m|k|$ (que corresp. a V'_{min}) \rightarrow órbita circular

temos: $e = \sqrt{1 - r_0/a} < 1$ (sei que $a > r_0$ porque $V'_{min} = -mk^2/2L^2 < E < 0$)

$= \sqrt{1 - E/V'_{min}} = \sqrt{1 + E/|V'_{min}|} < 1$

p/ $e=0$ ($E = V'_{min}, r_+ = r_- = a = r_0$) temos órbita circular

ou 2) aperiódica: Para $E > 0$ temos apenas 1 pto de retorno (hipérbole) dado por $r = a(e \mp 1)$, sendo a e e como acima e $-$, $+$ p/ caso atrativo ($k < 0$) ou repulsivo ($k > 0$), respectiva/ ramo + ou - da curva; a diferença é que aqui $e > 1$ e a solução é dada por $r = a(e^2 - 1)/(\pm 1 + e\cos\theta)$. Aqui temos $e = \sqrt{1 + E/|V'_{min}|}$ com $E > 0$ qualquer

no caso $E=0$ ($k < 0$) temos $e \rightarrow 1$ e a hipérbole não faz mais sentido (ramo - dá $1/r \rightarrow 0$ e ramo + dá $1/r \rightarrow 2/r_0$, ver acima)

aí temos parábola com perihélio $= a/2 = r_0/2$; Solução $r = \frac{a}{1 + \cos\theta}$

Em todos esses casos tenho $\frac{1}{r} = B + A \cos(\theta - \theta_0)$ (6)
 nossa solução inicial \leftarrow

com $B = -mk/L^2 \rightarrow |B| = r_0$ (raio da órbita circular)
 \leftarrow corresp. a $E = v_{min}^2 = -mk^2/2L^2, L \neq 0, k < 0$
 $A > 0$
 $A = (2mE/L^2 + m^2k^2/L^4)^{1/2} = \sqrt{B^2 + 2mEL^2} = r_0^{-1} \sqrt{1 - E/v_{min}^2} = r_0^{-1} e$ $e \equiv \sqrt{1 + E \cdot 2L^2 / mk^2}$

Em particular: - elipse: $k < 0, v_{min}^2 < E < 0, 0 < e < 1, B > A, \frac{1}{r} = \frac{1}{r_0} (1 + e \cos \theta)$
 $\theta_0 = 0$

$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos \theta}$
 semi-eixo maior: $a = |k|/2|E| = \frac{r_0}{1-e^2}$
 pontos de max/min: $r_{\pm} = a(1 \pm e)$
 $B = \frac{1}{a(1-e^2)}$
 $A = Be$

- círculo: $k < 0, v_{min}^2 = E < 0, e = 0 \rightarrow B = 1/r_0, A = 0, \frac{1}{r} = 1/r_0$
 \rightarrow "elipse" com $a = b = r_0, r = a$

- hipérbole (+): $k < 0, E > 0, e > 1 \rightarrow B = 1/r_0 = \frac{1}{a(e^2-1)}, A = Be$
 $\theta_0 = 0$
 $0 < B < A$
 $a = \frac{|k|}{2E} = \frac{1}{B(e^2-1)}$
 $r = \frac{a(e^2-1)}{1+e \cos \theta}$

- parábola: $k < 0, E = 0, e = 1$
 θ entre 0 e α t.q. $\cos \alpha = -1/e$
 $a = r_0, A = B = 1/a$
 $r = \frac{a}{1+\cos \theta}, \theta_0 = 0$
 perihélio: $r = a/2$

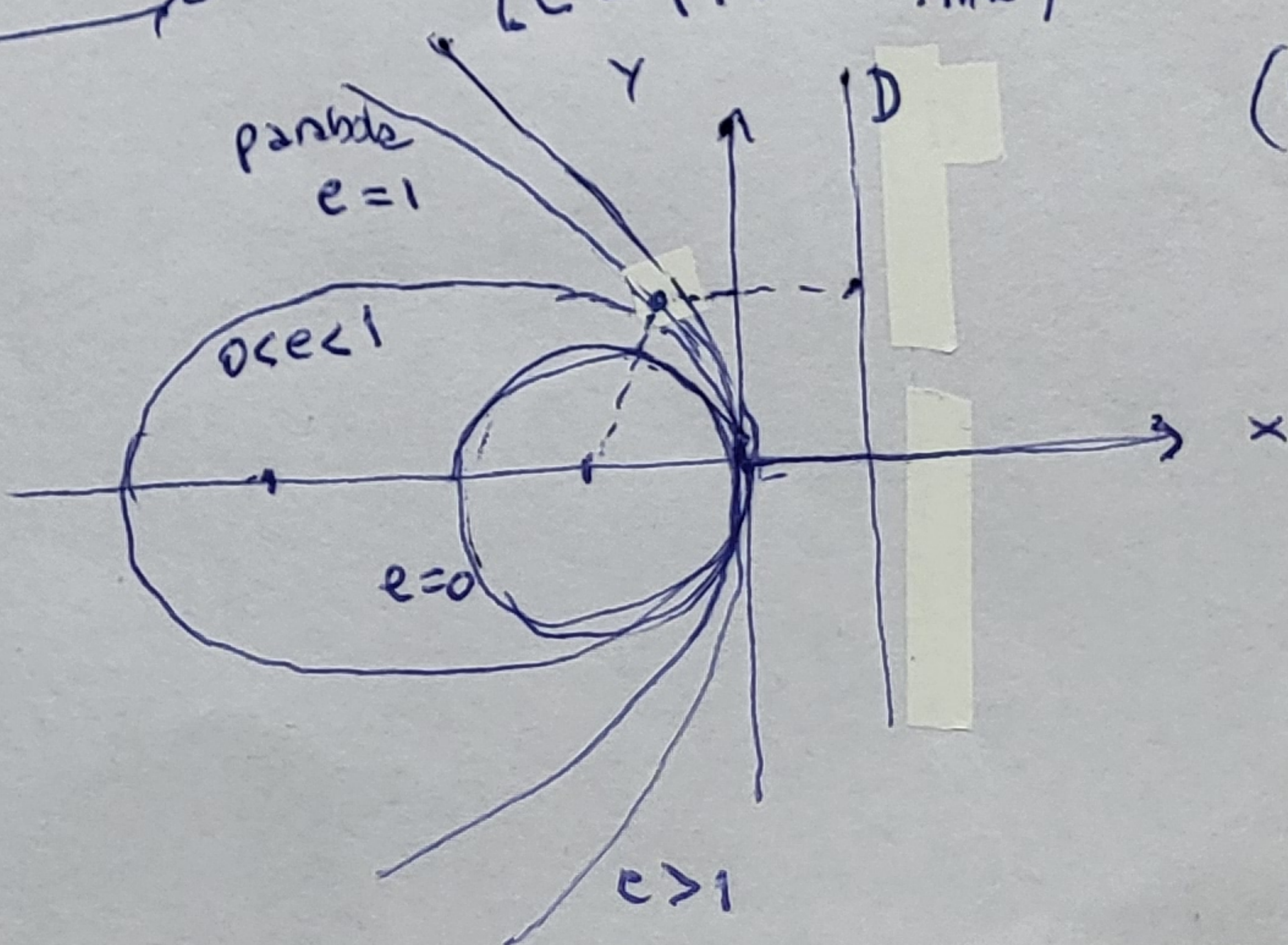
- hipérbole (-): $k > 0, E > 0, e > 1 \rightarrow B = -\frac{1}{r_0} = -\frac{1}{a(e^2-1)}$
 $a = k/2E = -\frac{1}{B(e^2-1)}, A = \frac{e}{r_0} = -eB, \theta_0 = 0$
 $r = a(e^2-1)$
 $r = \frac{a(e^2-1)}{-1+e \cos \theta}$
 $\frac{1}{r} = \frac{1}{a(e^2-1)} + \frac{e}{a(e^2-1)} \cos \theta$
 perihélio: $r = a(e+1)$
 note: θ entre 0 e α t.q. $\cos \alpha = 1/e$

NOTE: expressões acima estão em termos de a e e , mas de fórmulas + geom

($p/k < 0$) temos: $\frac{r_0}{r} = 1 + e \cos \theta$ com $\begin{cases} r_0 = L^2/m|k| \\ e = (1 + 2EL^2/mk^2)^{1/2} \end{cases}$

Sendo:

- $e > 1, E > 0$ hipérbole
- $e = 1, E = 0$ parábola
- $0 < e < 1, v_{min}^2 < E < 0$ elipse
- $e = 0, E = v_{min}^2$ círculo

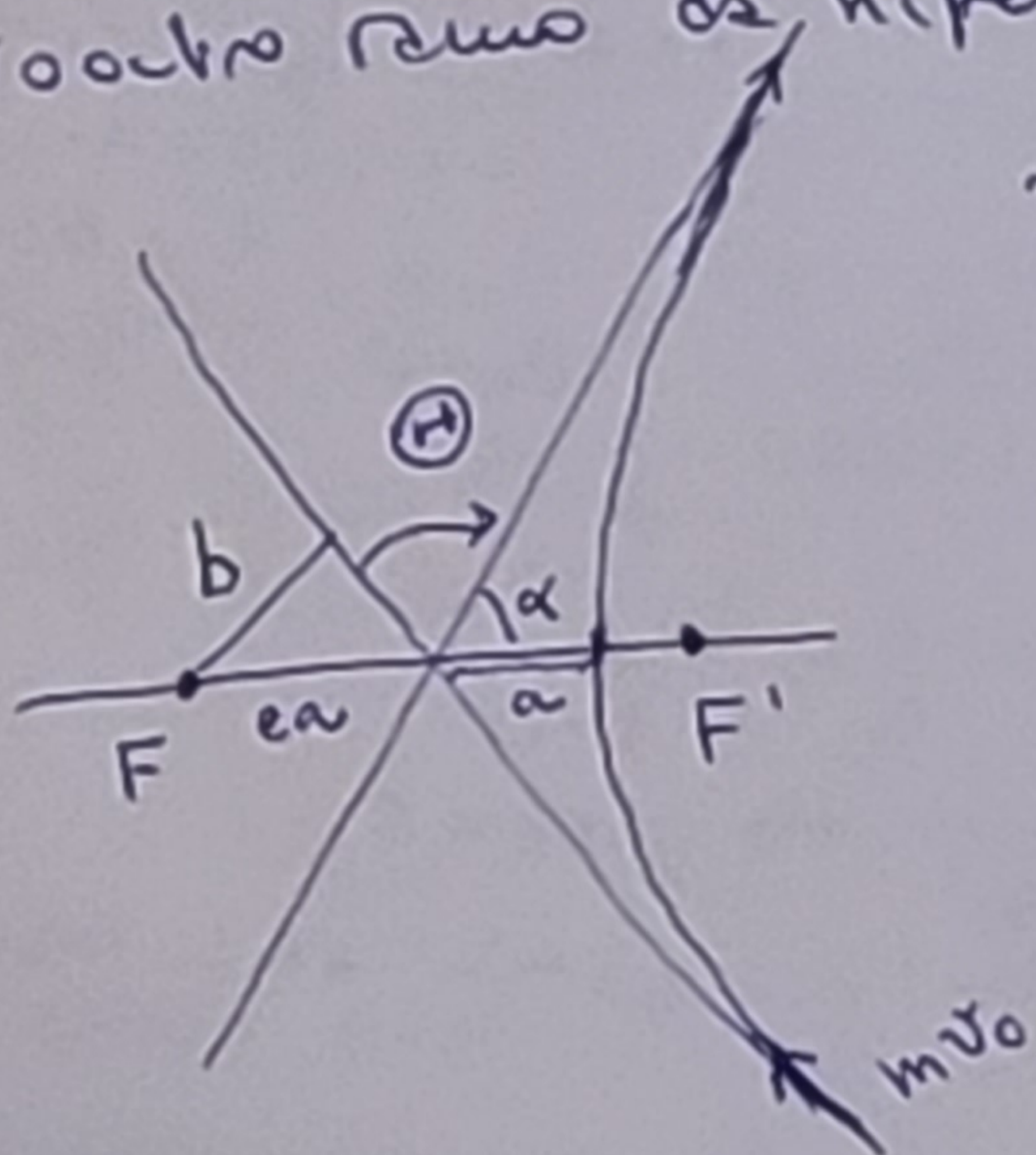


(ver Marion 8.7)

Aplicação: Espalhamento Rutherford

Embora possa parecer que a maior utilidade da discussão ocorre seja o entendimento das órbitas fechadas (movimento periódico, estados ligados, órbitas dos planetas), na realidade a física experimental é praticamente toda realizada estudando casos de espalhamento (!) \Rightarrow corpos em movimento aperiódico, colidindo ou não, que interagem por um potencial, que pode ser conhecido ou que se queira determinar.

Nesses casos, a medida principal é a deflexão, ou mudança de direção do corpo incidente, tomando como origem o centro de força. Com pot. repulsivo k/r (por ex., mas é análogo p/ atrativo, p/ outro ramo da hipérbole) e trajetória parabólica, temos:



ângulo de deflexão $\Theta = \pi - 2\alpha$, $\cos \alpha = \frac{1}{e}$
 $\rightarrow \text{tg } \Theta/2 = \cot \alpha = \frac{1/e}{\sqrt{1-1/e^2}} = \frac{1}{\sqrt{e^2-1}} = \left(\frac{mk^2}{2EL^2}\right)^{1/2}$

b = parâmetro de impacto

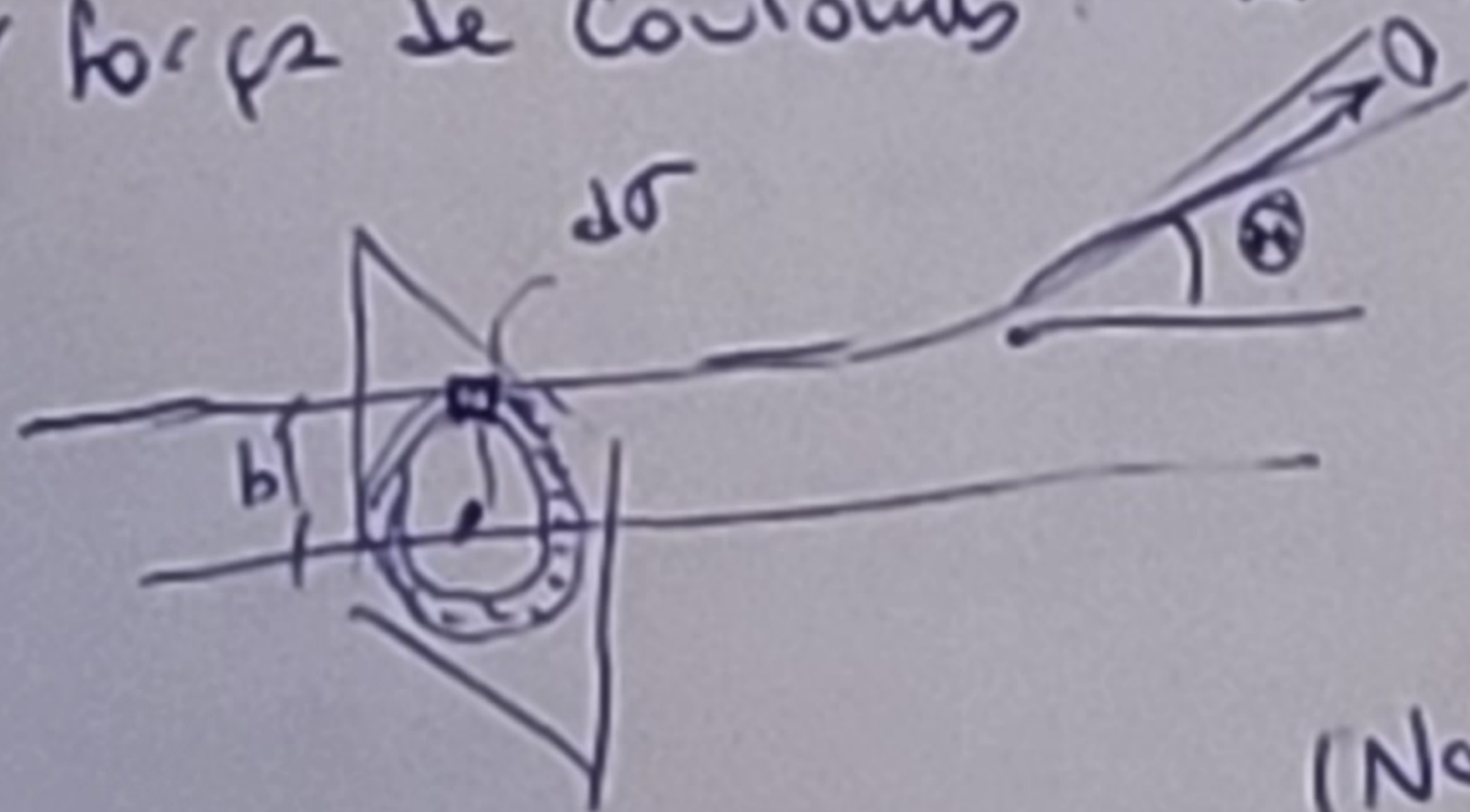
$E = m\bar{v}_0^2/2$

$L = m\bar{v}_0 b$

$\Rightarrow \text{tg } \Theta/2 = \frac{|k|}{mb\bar{v}_0^2}$

se $\Theta/2 \rightarrow 0$, $\frac{-|k| db}{mb\bar{v}_0^2}$ vai desaparecer o sinal \ominus abaixo, pois $d\sigma$ é área

p/ força de Coulomb: $k = q_1 q_2 / 4\pi\epsilon_0$



\rightarrow é importante calcular a seção de choque de espalhamento (Rutherford)

partículas que serão espalhadas no ângulo Θ vêm da área $d\sigma$ do feixe incidente. Queremos saber $d\sigma = 2\pi b db$ em função de Θ (Note que temos, \pm cruz, a relação entre Θ e b)

$\Rightarrow d\sigma = |2\pi b db| = \frac{2\pi b^3 m\bar{v}_0^2}{2 \cos^2 \Theta/2 |k|} \frac{d\Theta}{(m\bar{v}_0^2)^2 \cos^2 \Theta/2 \sin^3 \Theta/2} = \frac{\pi |k|^2}{2 \left(\frac{m\bar{v}_0^2}{2}\right)^2} \frac{\sin \Theta}{\sin^4 \Theta/2} d\Theta$

Esta fórmula (clássica!) permitiu decifrar os resultados do experimento de espalhamento de partículas α por núcleos de ouro e estimar o tamanho do núcleo, a partir da expressão $r = a(e+1) / (1 - \text{perihélio})$