PRO3384 - Finanças Quantitativas

Modelo de Markowitz

Segundo semestre 2023

O modelo de Markowitz

- n ativos com risco
- Retornos médios $\begin{bmatrix} r_1 & \cdots & r_n \end{bmatrix}^t$
- Matriz de covariância

$$\Sigma = \lfloor \sigma_{ij} \rfloor$$

Hipótese: positiva definida, i.é.,

$$\forall x \neq 0 \quad x^t \Sigma x > 0$$

- R_0 retorno mínimo fixado

O modelo de Markowitz

Modelo (formulação clássica)

$$\min \ \frac{1}{2} w^t \Sigma w$$

$$\text{s.a} \quad \begin{aligned} & \mathrm{r}^{\mathrm{t}} w = R_0 \\ & \sum_{j=1}^{n} w_j = 1 \end{aligned}$$

Problema: minimizar uma função quadrática sujeito a restrições lineares

Condições de otimalidade de Kuhn Tucker

Problema (P)

$$\min \quad f(x)$$
$$g_i(x) \leq 0 \quad \forall i \in \{1,2,\ldots,n\}$$
$$h_i(x) = 0 \quad \forall i \in \{1,2,\ldots,m\}$$
$$x \in \Re^p$$

Suponha f,g, e h convexas.

Se existem

$\bar{\lambda}_i \quad i \in \{1,2,\ldots,m\}, \quad \bar{\mu}_j(x) \quad j \in \{1,2,\ldots,n\}$ e $\bar{x} \in \Re^p$ tais que

$$\nabla f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{m} \bar{\lambda}_i \nabla h_i(\bar{x}) + \sum_{j=1}^{n} \bar{\mu}_j \nabla g_j(\bar{x}) = 0$$

$$\bar{\mu}_j g_j(\bar{x}) = 0 \quad \forall j \in \{1,2,\ldots,n\}$$

$$g_j(\bar{x}) \leq 0 \quad \forall j \in \{1,2,\ldots,n\}$$

$$h_i(\bar{x}) = 0 \quad \forall i \in \{1,2,\ldots,m\}$$

Então $\bar{x}$ é solução ótima de (P)

Exemplo

- 3 ativos não correlacionados
- Variâncias $\sigma_i^2 = 1 \quad \forall i$
- Retorno médios $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}^t$

Problema (carteira de mínima variância)

$$\min \frac{1}{2}\left\{\omega_1^2\sigma_1^2 + \omega_2^2\sigma_2^2 + \omega_3^2\sigma_3^2\right\}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} = R_0$$

$$\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 1$$

Funções

$$h_1(\omega) = -\omega_1 - 2\omega_2 - 3\omega_3 + R_0$$

$$h_2(\omega) = -\omega_1 - \omega_2 - \omega_3 + 1$$

$$f(\omega) = \frac{1}{2}\left(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2\right)$$

Gradientes

$$\nabla h_1(\omega) = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix} \quad \nabla h_2(\omega) = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \nabla f(\omega) = \begin{bmatrix} -\omega_1 \\ -\omega_2 \\ -\omega_3 \end{bmatrix}$$

Condições de Otimalidade

$$\begin{bmatrix} -\omega_1 \\ -\omega_2 \\ -\omega_3 \end{bmatrix} + \lambda_1 \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = 0$$

$$\omega_1 + 2\omega_2 + 3\omega_3 = R_0$$

$$\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 1$$

Solução

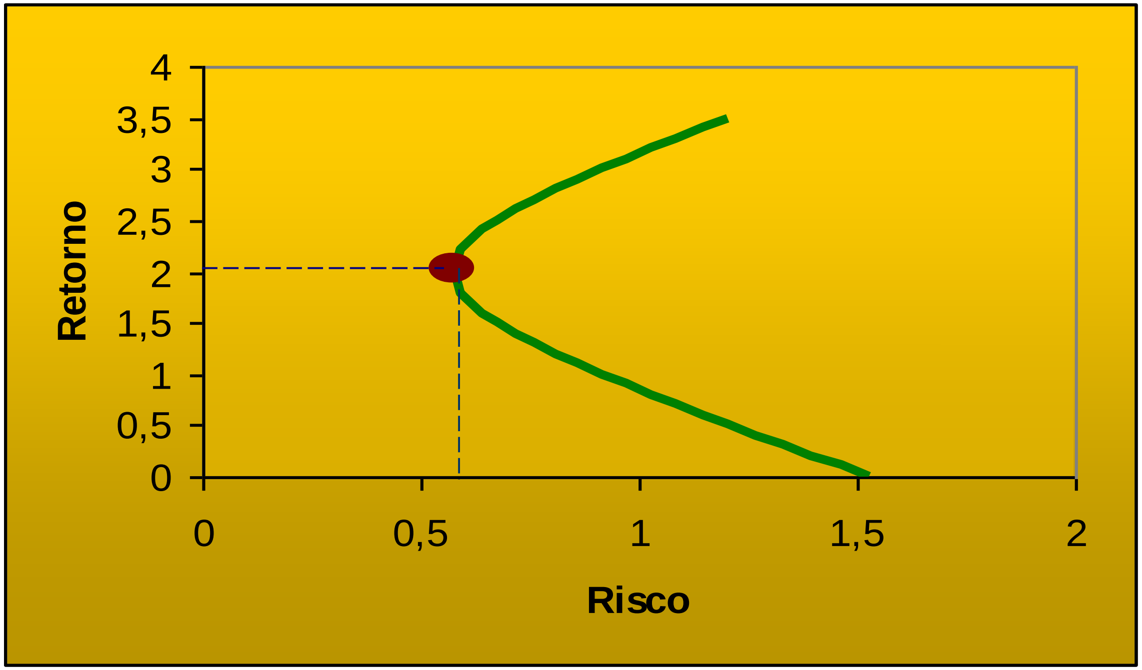
$$\begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{4}{3} - \dfrac{R_0}{2} \\ \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{R_0}{2} - \dfrac{2}{3} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{R_0}{2} - 1 \\ \dfrac{2}{3} - R_0 \end{bmatrix}$$

Substituindo na função objetivo

$$\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2} = \sqrt{\frac{7}{3} - 2R_0 + \frac{R_0^2}{2}}$$

Ponto de mínima variância em função de R_0

$$R_0 = 2 \Rightarrow \sigma \approx 0{,}58$$



Conjunto de pontos eficientes

Para o modelo de Markowitz a solução é determinada pela solução do sistema

$$\sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij}\omega_j - \lambda_1 R_i - \lambda_2 = 0 \quad \forall i$$

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i R_i = R_0$$

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i = 1$$

O modelo de Markowitz

Formulações alternativas (equivalentes)

$$\max \; r^t w$$

$$\text{s.a} \quad \begin{aligned} & w^t \Sigma w \le \sigma_0^2 \\ & \sum_{j=1}^{n} w_j = 1 \end{aligned}$$

Limite superior do risco da carteira

$$\max \; \mathrm{r}^t w - \eta \frac{1}{2} w^t \Sigma w$$

$$\text{s.a} \quad \sum_{j=1}^{n} w_j = 1$$

Parâmetro de aversão ao risco

Modelo de Markowitz com restrições de venda a descoberto

Problema

$$\min \frac{1}{2}\sum_{i,j}\sigma_{ij}\omega_i\omega_j$$

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i R_i = R_0$$

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i = 1$$

$$\omega_i \geq 0 \quad \forall i \in \{1,2,\cdots,n\}$$

Problema de programação quadrática !!

O modelo de Markowitz com restrições de venda a descoberto

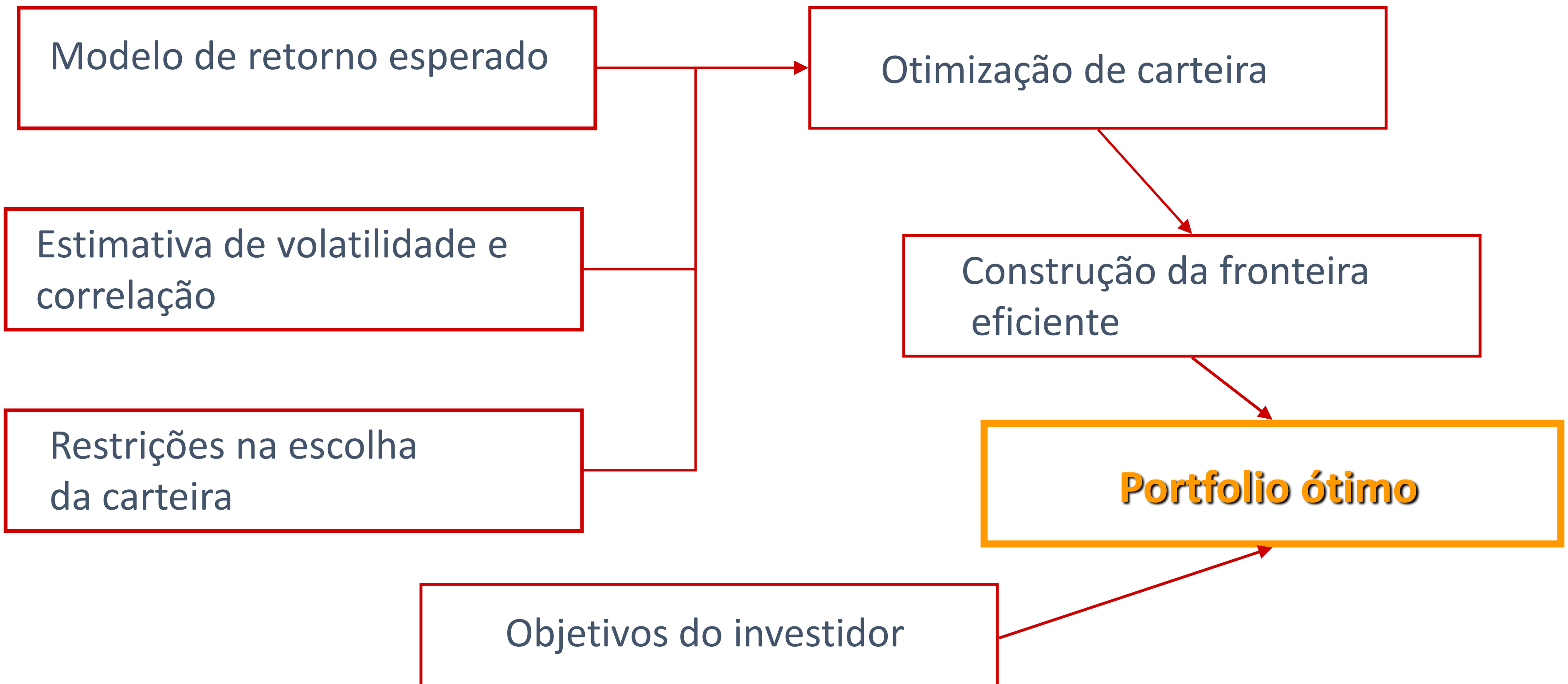
Construção das condições de Kuhn Tucker introduzem restrições do tipo

$$u_j g_j(x) = 0$$

Inúmeros aplicativos resolvem o problema

O modelo de Markowitz

Processo de investimento sob a perspectiva da teoria moderna de portfolios



Teorema dos dois fundos

As soluções do modelo de Markowitz são obtidas através das soluções do sistema

Sótimo

$$\sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij}\omega_j - \lambda_1 R_i - \lambda_2 = 0 \quad \forall i$$

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i R_i = R_0$$

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i = 1$$

Teorema dos dois fundos

Se $\omega^{(A)} = \left(\omega_1^{(A)}, \omega_2^{(A)}, \ldots, \omega_n^{(A)}\right)$ e $\omega^{(B)} = \left(\omega_1^{(B)}, \omega_2^{(B)}, \ldots, \omega_n^{(B)}\right)$

são soluções do sistema Sótimo

Então $\forall \theta \in]-\infty;\infty[\quad \theta\omega^{(A)} + (1-\theta)\omega^{(B)}$

é solução de Sótimo

Importância:combinações de soluções eficientes (i.é. resolvem o modelo de Markowitz) são também eficientes

Teorema dos dois fundos

É possível determinar dois portfólios tais que qualquer portfolio eficiente pode ser replicado (em termos de média e variância) como uma combinação destes dois. (ou seja, o investidor necessita investir somente nestes dois fundos)

Teorema dos dois fundos

Matematicamente

$\exists \quad \omega^{(A)}$ e $\omega^{(B)}$ soluções ótimas de Sótimo tais que

$\forall \quad \overline{\omega}$ solução de Sótimo se escreve como

$$\overline{\omega} = \theta\omega^{(A)} + (1-\theta)\omega^{(B)}$$

para algum $\theta \in \Re$ (demonstre!)

Teorema dos dois fundos

Construção dos dois fundos

Tome λ_1= 1 e λ_2= 0 e resolva

$$\sum_j \sigma_{ij}\omega_j = R_i \quad \forall i \quad \left(v^{(1)}\right)$$

Tome λ_1= 0 e λ_2= 1 e resolva

$$\sum_j \sigma_{ij}\omega_j = 1 \quad \forall i \quad \left(v^{(2)}\right)$$

Teorema dos dois fundos

Exemplo (Luenberger)

Covariância

Ativo						R(%)
1	2,30	0,93	0,62	0,74	-0,23	15,1
2	0,93	1,40	0,22	0,56	0,26	12,5
3	0,62	0,22	1,80	0,78	-0,27	14,7
4	0,74	0,56	0,78	3,40	-0,56	9,02
5	-0,26	0,26	-0,27	-0,56	2,60	17,68

Teorema dos dois fundos

Sejam

$v^{(1)}$ solução de $$\sum_j \sigma_{ij}\omega_j = 1 \quad \forall i \in \{1,2,\ldots,5\}$$

$v^{(2)}$ solução de $$\sum_j \sigma_{ij}\omega_j = R_i \quad \forall i \in \{1,2,\ldots,5\}$$

Teorema dos dois fundos

Os dois fundos serão

$$\omega^{(A)} = \frac{1}{\sum v_j^1} v^{(1)} \quad \text{e} \quad \omega^{(B)} = \frac{1}{\sum v_j^2} v^{(2)}$$

Teorema dos dois fundos

Assim

$$\omega^{(A)} = \begin{bmatrix} 0{,}158 \\ 0{,}155 \\ 0{,}314 \\ 0{,}038 \\ 0{,}334 \end{bmatrix} \qquad \omega^{(B)} = \begin{bmatrix} 0{,}088 \\ 0{,}251 \\ 0{,}282 \\ 0{,}104 \\ 0{,}275 \end{bmatrix}$$

e $\mu_A = 15{,}202$ $\sigma_A = 0{,}812$

$\mu_B = 14{,}413$ $\sigma_B = 0{,}791$

Teorema dos dois fundos

Vimos que

$\exists \quad \omega^{(A)} \; e \; \omega^{(B)}$ soluções ótimas de Sótimo tais que

$\forall \quad \overline{\omega}$ solução de Sótimo se escreve como

$$\overline{\omega} = \theta\omega^{(A)} + (1-\theta)\omega^{(B)}$$

para algum

$$\theta \in \Re$$

Teorema dos dois fundos

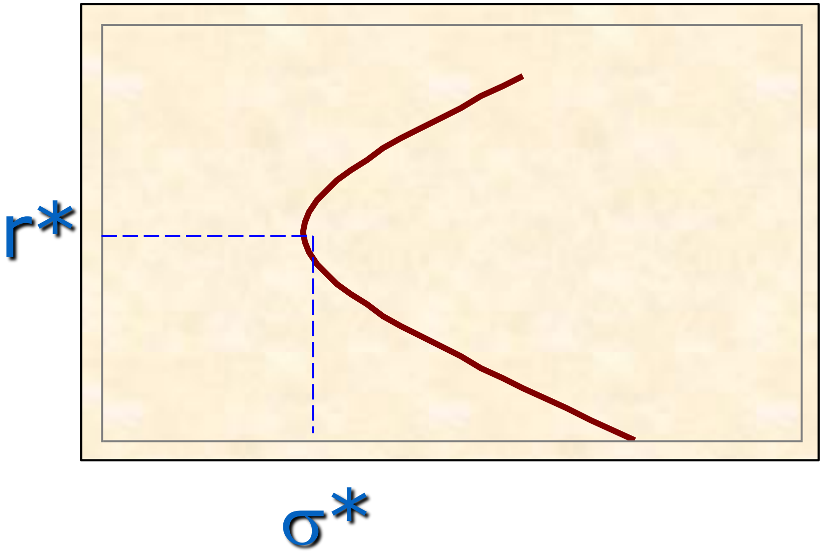
A carteira de mínima variância corresponde a um particular valor

$$\theta^*$$

$$\omega\left(\theta^*\right) = \theta^* \omega^{(A)} + (1-\theta^*)\omega^{(B)}$$

r^*

σ^*



Teorema dos dois fundos

Carteiras eficientes

Qualquer carteira $\omega(\theta)$ cujo retorno satisfaz

$$r(\omega(\theta)) \geq r^*$$

Inclusão de ativo livre de risco

Ativo livre de risco $\Rightarrow$ retorno certo rf

(i.é. 'σ_f = 0')

Covariância com demais ativos é nula

$$E\big((R-\mu_R)(R_F-\mu_{RF})\big)=0$$

Inclusão de ativo livre de risco

Portfolio com ativos com risco e livre de risco

$$E(\alpha R_F + (1-\alpha)R) = \alpha E(R_F) + (1-\alpha)E(R)$$

$$\sigma^2(\alpha R_F + (1-\alpha)R) = (1-\alpha)^2 \sigma^2(R)$$

Ativo livre de risco
R_F

Modelo de média variância com ativo livre de risco

$$\min \ \frac{1}{2} w^t \Sigma w$$

$$\sum_{j=1}^{n} R_j \omega_j + (1 - \sum_{j=1}^{n} \omega_j) R_F = R_0$$

$$\omega \in \Re^n$$

Resolução por Kuhn Tucker

Modelo de média variância com ativo livre de risco

Reescrevendo

$$f(\omega) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}\omega_i\omega_j$$

$$h(\omega) = R_0 - \sum_{i=1}^{n} R_j\omega_j - (1 - \sum_{i=1}^{n}\omega_j)R_F$$

Derivadas parciais

$$\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \omega_{\mathrm{k}}} = 2\sum_{j=1}^{n}\sigma_{jk}\omega_j$$

$$\frac{\partial \mathrm{h}}{\partial \omega_{\mathrm{k}}} = -R_K + R_F$$

Modelo de média variância com ativo livre de risco

Na forma matricial

$$\nabla f(\omega) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial \omega_1} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial \omega_n} \end{bmatrix} = 2\sum \omega \qquad \nabla h(\omega) = \begin{bmatrix} -R_1 + R_F \\ \vdots \\ -R_n + R_F \end{bmatrix}$$

Modelo de média variância com ativo livre de risco

Condições de Kuhn Tucker

$$\nabla f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{m} \bar{\lambda}_i \nabla h_i(\bar{x}) = 0$$

$$h_i(\bar{x}) = 0 \quad \forall i \in \{1, 2, \ldots, m\}$$

Modelo de média variância com ativo livre de risco

No problema em questão

$$2\sum_{j=1}^{n}\sigma_{jk}\omega_j - \lambda(R_k - R_F) = 0$$

$$\sum_{j=1}^{n}(R_j - R_F)\omega_j = R_0 - R_F$$

Matricialmente

$$2\Sigma\omega - \lambda(R \ - R_F[1,1,\ldots,1]^t) = 0$$

$$\omega^t(R \ - R_F[1,1,\ldots,1]^t) = R_0 - R_F$$

matriz de covariância

Σ

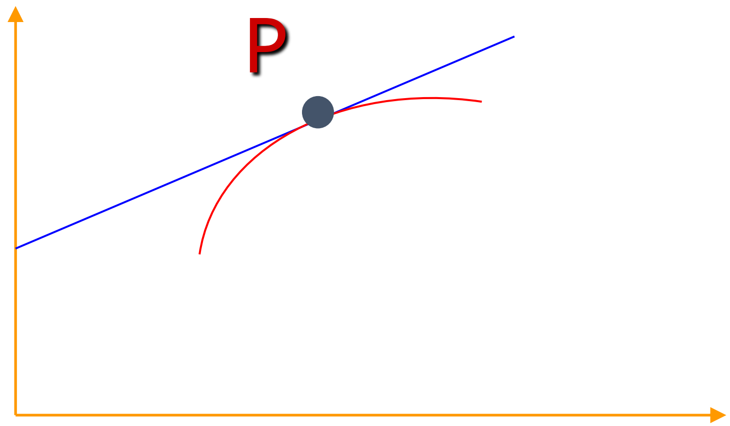
Cuja solução será (resolva primeira equação e substitua na segunda)

$$\omega^* = \frac{R_0 - R_F}{v^t \sum^{-1} v} \sum^{-1} v \qquad \text{com} \qquad v = \begin{bmatrix} R_1 - R_F \\ \vdots \\ R_n - R_F \end{bmatrix}$$

Modelo de média variância com ativo livre de risco

Caso particular: todos ativos com risco $[1,1,\ldots,1]\omega = 1$

$$\omega^P = \frac{1}{[1 \quad \ldots \quad 1]\Sigma^{-1} v}\Sigma^{-1} v \qquad \text{com} \qquad v = \begin{bmatrix} R_1 - R_F \\ \vdots \\ R_n - R_F \end{bmatrix}$$



Verifique!

Modelo de média variância com ativo livre de risco

Exemplo

$$R_F = 0.5\% \qquad \mathrm{R} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad \Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{v} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1.5 \\ 2.5 \end{bmatrix} \qquad \Sigma^{-1} = \Sigma \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Sigma^{-1} v = 4.5$$

$$\omega = \frac{1}{4.5} \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1.5 \\ 2.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{9} & \frac{1}{3} & \frac{5}{9} \end{bmatrix}^T$$

Modelo de média variância com ativo livre de risco

Teorema do único fundo

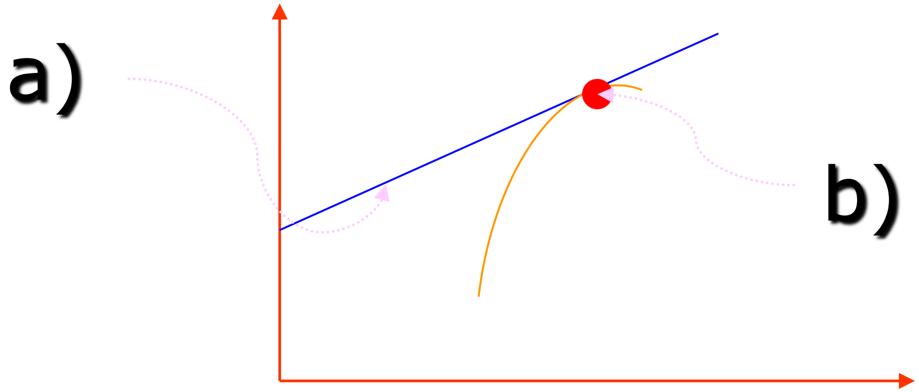
Existe uma única carteira P de ativos com risco, tal que qualquer carteira eficiente pode ser construída como uma combinação entre a carteira P e o ativo livre de risco

Teorema do único fundo

Idéia da demonstração

a) determinação das carteiras eficientes incluindo o ativo livre de risco

b) Na situação anterior, especifica o que acontece se 100% é investido em ativos com risco



Exercício - entrega 23/07 –

Apresente um relatório com formatação adequada!

a) Construa a fronteira de eficiência do modelo de Markowitz, considerando o conjunto de ações empregado na primeira lista de exercícios. Use a ferramenta de otimização do MATLAB. Não será aceito trabalho que utilize ferramentas prontas para construção de portfólios!!!

b) Encontre o portfólio tangente e o portfólio de mínima variância

c) Apresente cada uma das ações no gráfico risco X retorno

d) Considere que a taxa livre de risco anual (252 d.u.) seja 10.8%. Cuidado com taxas logaritmicas!!! Se um investidor deseja um retorno diário de 0.07%, como deveria investir seu capital nas ações e no ativo livre de risco?

e) Inclua a restrição $-0.1 \leq \omega_j \leq 0{,}5$ para cada ação. Reconstrua a fronteira e discuta o que ocorre.

Outras medidas de risco

Valor em risco (Var)

Perda máxima do valor de um ativo ou carteira, em determinado período de tempo, com um determinado nível de confiança.

Considera-se o retorno da carteira, X, como uma variável aleatória e a função de probabilidade acumulada da distribuição de perdas,

$$F(a) = P(X \geq a)$$

$$F^{-1}(b) = \min\{a \mid F(a) \geq b\}$$

onde **b** é o percentil considerado e é a perda máxima tolerada.

$$VaR_{\beta}(x) = F^{-1}(\beta)$$

Problema de interesse

$$\min_{x \in X} VaR_{1-\beta}(x)$$

Dificuldades:

- Não linearidade da função objetivo
- Ausência de subadtividade do VaR

Valor em risco condicional(CVar)

Valor médio da cauda da distribuição de retornos, para um dado período e nível de confiança

$$CVaR_{1-\beta}(x) = E\left(f(x,S) \mid f(x,S) \geq VaR_{1-\beta}(x) \right)$$

f(x,S) = função de perda de um portfólio com variável de decisão x e variável aleatória S.

$1-\beta$ = nível de confiança

Rockafellar e Uryasev (2000) desenvolveram uma abordagem para determinar simultaneamente o CVaR e o VaR de um portfólio, resolvendo um problema de otimização:

$$\min_{(\mathrm{x},\alpha)} F_{\beta}(x,\alpha) = \min_{(\mathrm{x},\alpha)} \left(\alpha + \frac{1}{1-\beta} \int_{f(x,S) \geq VaR_{1-\beta}(x)} \big(f(x,S) - \alpha \big) p(S) dS \right)$$

ROCKAFELLER, R. T.; URYASEV, S. Optimizaton of conditional value-at-risk: The journal of risk, n.2, p.21-41, 2000.

Solução: discretização

$$\min_{(x,\alpha)}\left(\alpha + \frac{1}{m(1-\beta)}\sum_{i=1}^{m} \max(\underbrace{f(x,S_i)-\alpha,}_{\text{Não linear}} 0)\right)$$

Saída:

$$\min_{(\mathrm{x},\alpha)} \alpha + \frac{1}{1-\beta}\sum_{i=1}^{m} \mathrm{Y_i}$$

$$\mathrm{Y_i} \geq 0 \quad \forall i \in \{1,2,\ldots,m\}$$

$$\mathrm{Y_i} \geq f(x,S_i)-\alpha \quad \forall i \in \{1,2,\ldots,m\}$$

Exercício:

Encontrar carteira de mínimo CVaR