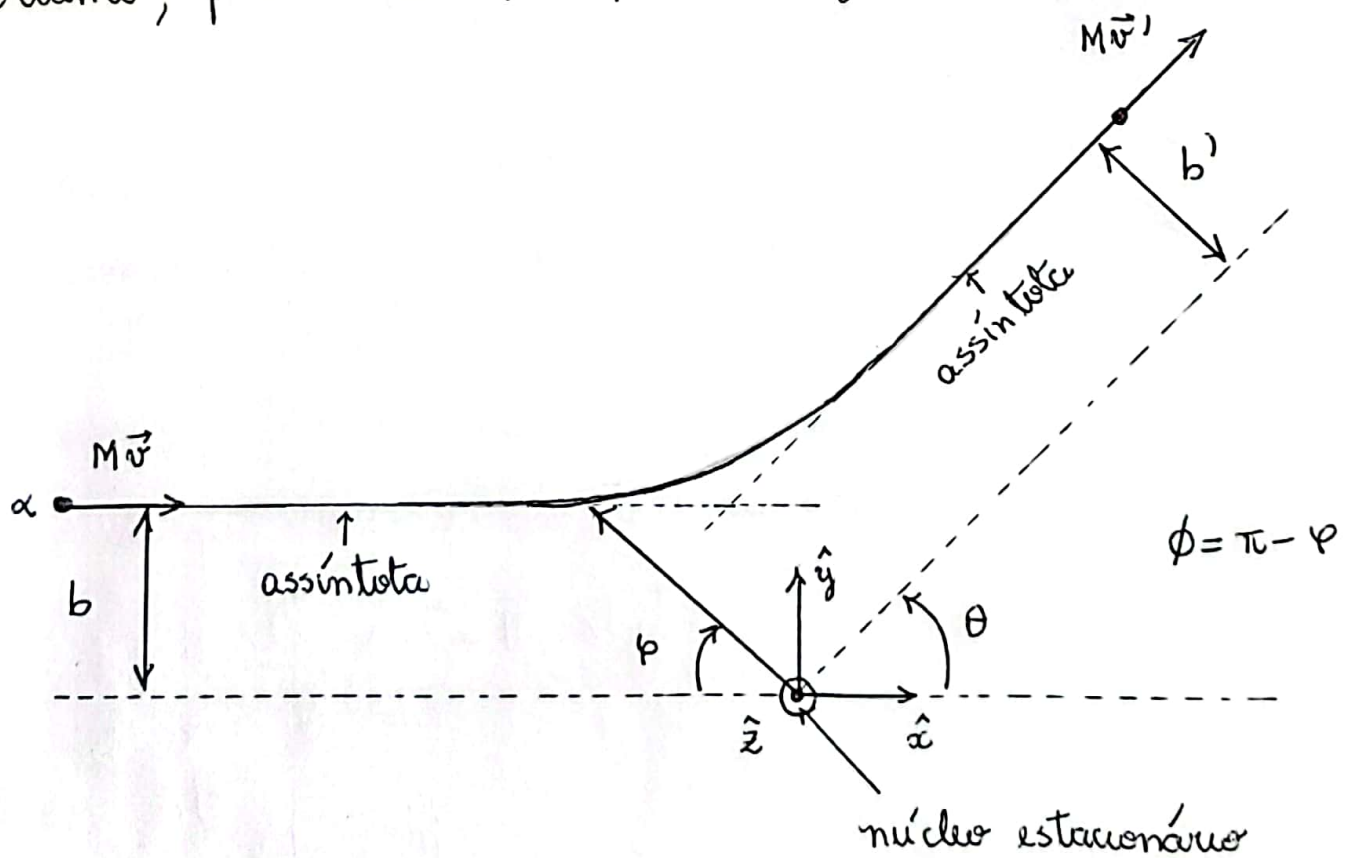


O modelo atômico de Rutherford

(1)

Para interpretar os resultados de espalhamento de partículas α por folha de ouro, Rutherford propôs um modelo atômico em que toda a carga positiva e, conseqüentemente, toda a massa do átomo essencialmente, estavam concentradas numa região diminuta chamada de núcleo.

De nosso cálculo anterior para o ângulo de espalhamento elástico θ de uma partícula α de massa M por uma carga parada de massa $m = \lambda M$, concluímos que $\sin \theta \leq \lambda$, portanto, para $\lambda \gg 1$, θ pode atingir valores de até 180° !



b é chamado de parâmetro de impacto.

(2)

No cálculo que se segue, trataremos o núcleo como estacionário. Sabemos que nesse problema, durante o espalhamento, o núcleo recua. O cálculo pode ser feito no centro de massa do sistema α -núcleo para levar em conta tal recuo. Aqui, nosso cálculo será aproximado mas ainda assim as conclusões serão válidas ainda, mesmo desconsiderando-se o recuo.

A força de repulsão Coulombiana exercida pelo núcleo sobre a partícula α é de natureza central

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{zZ e^2}{r^2} \hat{r}$$

onde $z=2$ é o número atômico da partícula α e Z é o número atômico do material que compõe a folha espalhadora ($Z=79$ para ouro).

Como a força é central, o torque sobre a partícula α é nulo e seu momento angular se conserva

$$\vec{L} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{0}$$

Logo

$$\vec{L}_i = \vec{r} \times \vec{p}_i = \vec{r} \times (M\vec{v}) = (x\hat{x} + b\hat{y}) \times (Mv\hat{x}) = -Mvb\hat{z}$$

$$\vec{L}_f = -Mv'b'\hat{z}$$

Conservação de energia implica

$$\frac{1}{2} M v^2 = \frac{1}{2} M v'^2 \Rightarrow v' = v$$

Portanto

$$\vec{L}_i = \vec{L}_f \Rightarrow b' = b$$

A segunda lei de Newton aplicada à partícula α leva

a

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{zZe^2}{r^2} \hat{r} = M \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \quad \text{com } \vec{r} = r \hat{r}$$

Como

$$\begin{cases} \hat{r} = \cos\phi \hat{x} + \sin\phi \hat{y} \\ \hat{\phi} = -\sin\phi \hat{x} + \cos\phi \hat{y} \end{cases}$$

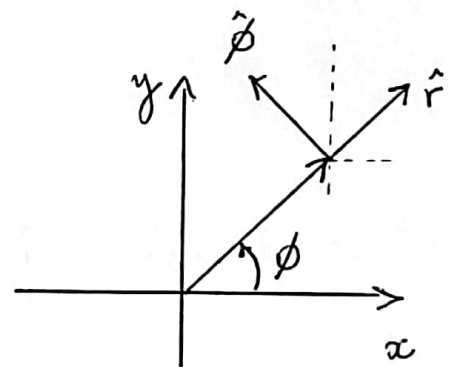


$$\frac{d\hat{r}}{dt} = \dot{\phi} \hat{\phi} \quad \text{e} \quad \frac{d\hat{\phi}}{dt} = -\dot{\phi} \hat{r}$$

Então

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{r} \hat{r} + r \dot{\phi} \hat{\phi}$$

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = (\ddot{r} - r \dot{\phi}^2) \hat{r} + (2\dot{r} \dot{\phi} + r \ddot{\phi}) \hat{\phi}$$



Dessa forma, podemos escrever a partir da 2ª lei de Newton

$$\begin{cases} \frac{z Z e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = M \left[\frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 \right] \\ 2 \left(\frac{dr}{dt} \right) \left(\frac{d\phi}{dt} \right) + r \frac{d^2 \phi}{dt^2} = 0 \end{cases}$$

Uma equação que também pode ser escrita (embora não seja independente das duas acima) é aquela oriunda diretamente da conservação de momento angular

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = r \hat{r} \times \left(M \frac{d\vec{r}}{dt} \right) = \vec{cte}$$

$$M r \hat{r} \times \left(\dot{r} \hat{r} + r \frac{d\hat{r}}{dt} \right) = M r \hat{r} \times \left(\dot{r} \hat{r} + r \dot{\phi} \hat{\phi} \right) = M r^2 \dot{\phi} \hat{z}$$

Portanto

$$M r^2 \frac{d\phi}{dt} = cte$$

No curso de Mecânica Clássica você resolverá as equações acima para obter a trajetória da partícula α

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{b} \sin \varphi + \frac{D}{2b^2} (\cos \varphi - 1) ,$$

onde

$$D = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{zZe^2}{Mv^2/2} \quad \text{e} \quad \varphi = \pi - \phi$$

Numa colisão frontal ($b=0$), D é a distância de maior aproximação entre partícula α e núcleo, já que nesse ponto a energia da partícula está toda na forma potencial, portanto

$$ze \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze}{D} \right) = \frac{Mv^2}{2}$$

De acordo com a equação da trajetória, o ângulo de espalhamento θ pode ser obtido a partir φ quando $r \rightarrow \infty$

$$\frac{1}{b} \sin\varphi + \frac{D}{2b^2} (\cos\varphi - 1) = 0$$

$$\sin\varphi = \frac{D}{2b} (1 - \cos\varphi)$$

Nesse limite (excluindo, é claro, a solução trivial $\varphi=0$), temos que

$$\varphi = \pi - \theta \Rightarrow \begin{cases} \sin\varphi = \sin(\pi - \theta) = \sin\theta \\ \cos\varphi = \cos(\pi - \theta) = -\cos\theta \end{cases}$$

Logo

$$\sin \theta = \frac{D}{2b} (1 + \cos \theta)$$

$$2 \sin(\theta/2) \cos(\theta/2) = \frac{D}{2b} [1 + \cos^2(\theta/2) - \sin^2(\theta/2)]$$

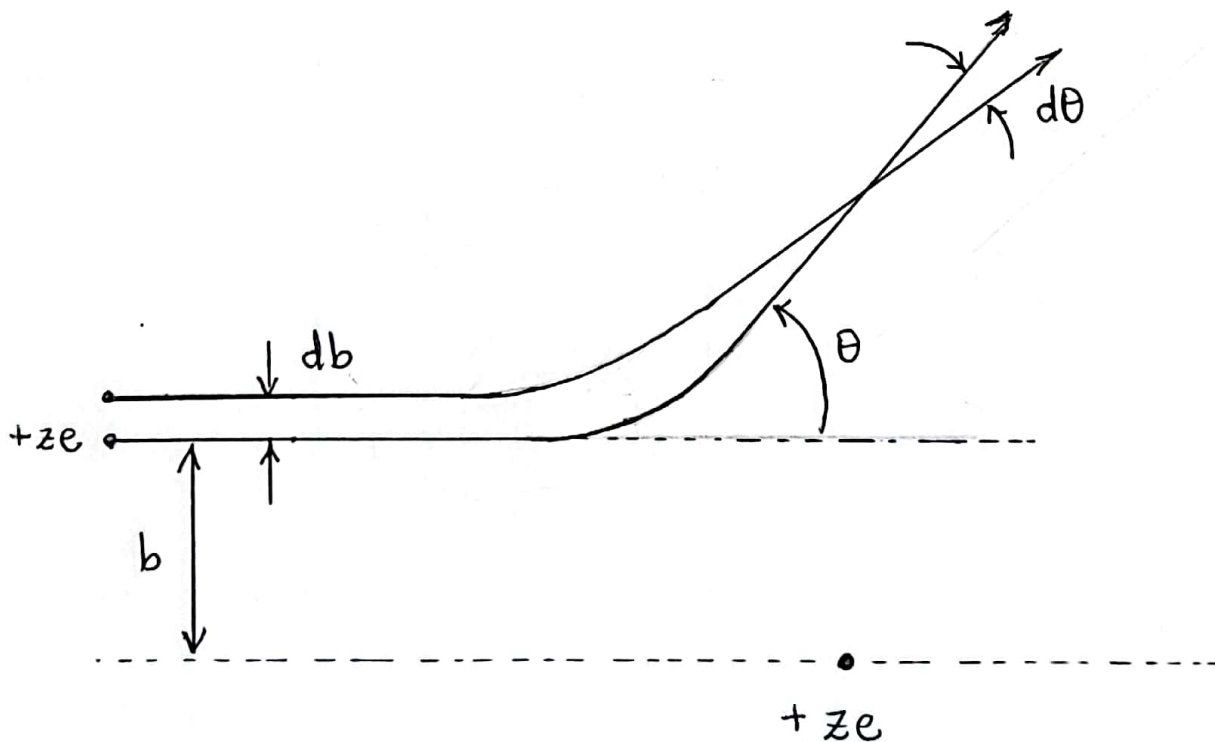
$$= \frac{D}{b} \cos^2(\theta/2)$$

Portanto

$$\tan(\theta/2) = \frac{D}{2b}$$

 $\Rightarrow$

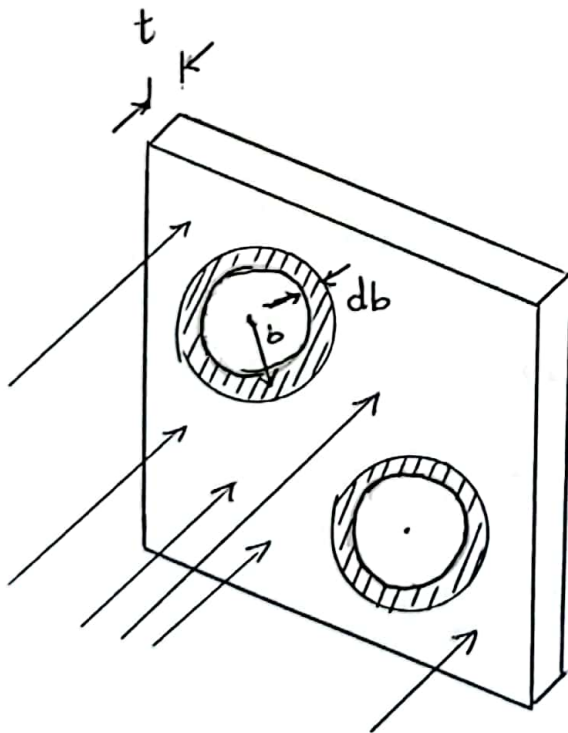
$$\cot \theta = \frac{2b}{D}$$



Se a folha for suficientemente fina, de modo que não haja sobreposição de anéis de átomos distintos, então podemos escrever

$$\underbrace{P(b)db}_{\substack{\text{probabilidade da partícula } \alpha \text{ passar a uma} \\ \text{distância entre } b \text{ e } b+db \text{ do núcleo}}} = \frac{\substack{\text{área total dos anéis de raio } b \text{ e largura } db \\ \text{área transversal da folha}}}$$

probabilidade da partícula α passar a uma distância entre b e $b+db$ do núcleo



Então

$$P(b)db = \frac{(2\pi b db) \times \rho A t}{A} = \rho t 2\pi b db$$

Mas sabemos que

$$b = \frac{D}{2} \cot\left(\frac{\theta}{2}\right),$$

de modo que

$$db = \frac{D}{2} \left[\frac{-1}{\sin^2(\theta/2)} \frac{1}{2} \right] d\theta$$

então

$$b db = \frac{D}{2} \frac{\cos(\theta/2)}{\sin(\theta/2)} \left[-\frac{D}{4} \frac{1}{\sin^2(\theta/2)} d\theta \right] \times \frac{2 \sin^2(\theta/2)}{2 \sin(\theta/2)}$$

$$b db = -\frac{D^2}{16} \frac{\sin \theta}{\sin^4(\theta/2)} d\theta$$

Por outro lado, conservação de probabilidade implica que

$$|P(b) db| = |P(\theta) d\theta|,$$

de modo que podemos escrever finalmente

$$\frac{N(\theta) d\theta}{I} = P(\theta) d\theta = \frac{\pi}{8} \rho t D^2 \frac{\sin \theta}{\sin^4(\theta/2)} d\theta,$$

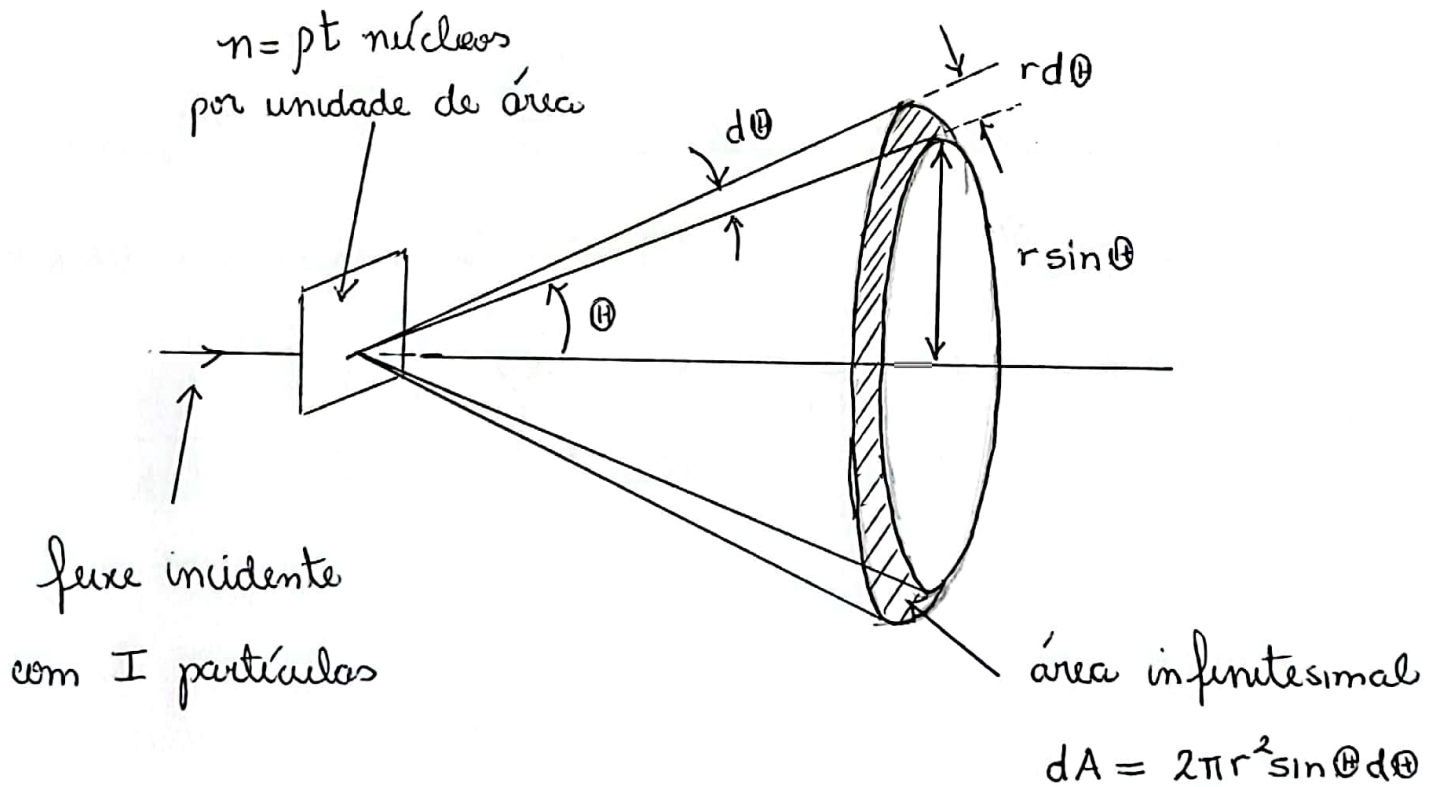
onde na última linha voltamos a usar o ângulo θ da experiência de Rutherford ($\theta \rightarrow \theta$).

Como

$$D = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{zZe^2}{Mv^2/2},$$

podemos escrever

$$\underbrace{N(\Theta) d\Theta}_{\equiv dN} = I \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \left(\frac{zZe^2}{2Mv^2} \right)^2 \rho t 2\pi \frac{\sin \Theta}{\sin^4(\Theta/2)} d\Theta$$



Logo, o ângulo sólido subtendido pelo ângulo $d\Theta$ em torno de Θ é dado por

$$d\Omega = \frac{dA}{r^2} = 2\pi \sin \Theta d\Theta$$

Então

(10)

$$\underbrace{\frac{dN}{d\Omega}}_{\substack{\text{número de partículas } \alpha \\ \text{espalhadas dentro de um} \\ \text{ângulo sólido } d\Omega}} = I \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \left(\frac{zZ e^2}{2Mv^2} \right)^2 \rho t \quad \frac{1}{\sin^4 \Theta/2} \equiv \underbrace{\frac{d\sigma}{d\Omega}}_{\substack{\text{seção de choque} \\ \text{diferencial}}} \underbrace{I \rho t}_{\substack{\text{núcleos por} \\ \text{unidade de} \\ \text{área}}}$$

Dessa forma, a seção de choque diferencial para espalhamento Rutherford é dada por

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \left(\frac{zZ e^2}{2Mv^2} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \Theta/2}$$

Perceba que

→ $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ decresce rapidamente com Θ , mas bem mais

lentamente que no modelo de Thomson onde o decaimento era exponencial com Θ^2

→ $\frac{d\sigma}{d\Omega} \propto Z^2$, portanto testes com folhas de Ag ($Z=47$)

e Au ($Z=79$) entre 5° e 150° com variações em $dN/d\Omega$ da ordem 10^5 puderam ser feitas pelo grupo de Rutherford

→ $\frac{dN}{d\Omega} \propto t$ o que permitiu testar o modelo com variações

da espessura da folha de um fator 10

→ $\frac{d\sigma}{d\Omega} \propto \frac{1}{Mv^2/2}$, permitindo o uso de partículas α de

diferentes elementos radioativos para testes do modelo.

→ $\frac{d\sigma}{d\Omega} \propto (Ze)^2$, ou seja, proporcional ao quadrado da

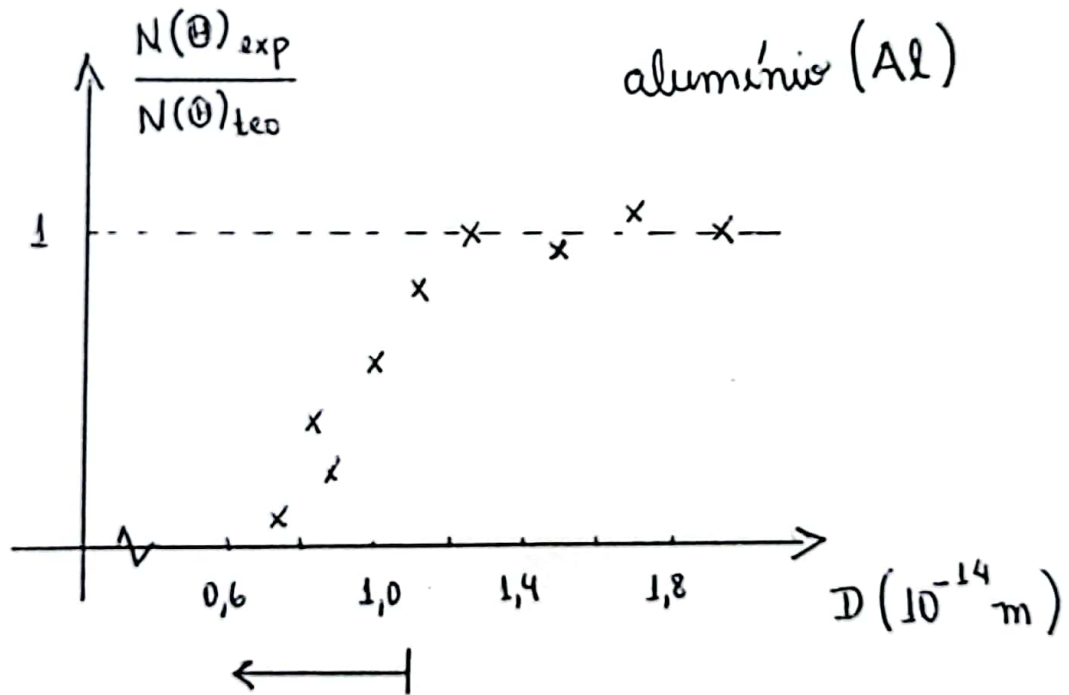
carga elétrica nuclear. Como à época, Z não era conhecido para vários átomos, a fórmula de $dN/d\Omega$ podia ser usada para determinar Z por meio de um ajuste aos dados. Esse procedimento levou à conclusão de que Z

era igual ao número atômico químico do elemento. (12)

→ D proporciona um limite superior para o tamanho nuclear

$$R_{\text{nuclear}} < R_{180^\circ} = D = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{zZ e^2}{Mv^2/2}$$

Medindo o raio nuclear



partícula α começa
a penetrar no núcleo atômico

Conclusão: $R_{\text{Al}} \sim 10^{-14} \text{ m} = 10 \text{ F}$

$$1 \text{ F} = 10^{-15} \text{ m} = 10^{-5} \text{ \AA}$$