Lista 1 - Monitores

1 Questão 1 - 1.1 do Kibble

Um objeto A se movendo com velocidade $\mathbf{v}$ colide com um objeto estacionário B. Após a colisão, A se move com velocidade $\mathbf{v}/2$ e B com velocidade $3\mathbf{v}/2$. Ache a razão de suas massas. Se, ao invés de se separarem, os dois corpos se grudam após a colisão, com que velocidade os corpos irão se mover?

2 Questão 2 - 46 da Lista 1

Um corpo de massa M está preso ao teto por uma corda de massa m e comprimento l. Calcule a tensão na corda em função da distância z em relação ao teto.

3 Questão 3 - 1.36 do Marion

Encontre o valor da integral $\int_S \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{a}$, onde $\mathbf{A} = x\mathbf{i} - y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ e S é uma superfície fechada delimitada pelo cilindro $c^2 = x^2 + y^2$. O topo e a base do cilindro estão em $z = d$ e $z = 0$ respectivamente.

4 Questão 4 - 2.52 do Marion EDITADA

Uma partícula de massa m se move unidimensionalmente sob um potencial $U(x) = U_o[2(x/a)^2 - (x/a)^4]$, onde U_0 e a são constantes positivas

a) Descreva, de maneira geral, como será o movimento deste corpo. Utilize as condições iniciais que achar mais interessante.

b) Ache a força $F(x)$, que age em uma partícula.

c) Esboce $U(x)$. Ache as posições de equilíbrio estável e instável.

d) Qual a frequência angular ω das oscilações sobre o ponto de equilíbrio estável?

e) Qual a velocidade mínima que a partícula deve ter na origem para escapar para o infinito?

f) Considere que em $t = 0$ a partícula está na origem e sua velocidade é positiva e igual em magnitude à velocidade de escape calculada no item anterior. Ache $x(t)$ e esboce seu resultado.

5 Questão de Cada Turma

5.1 Questão do Artur

a) Mostre, utilizando coordenadas polares, que uma partícula livre (ou seja, que não sofre forças) se move em uma trajetória retilínea. Interprete a expressão encontrada e justifique porquê ela representa uma linha. Note que estamos considerando uma movimentação em uma direção genérica, ou seja, temos que $\dot{\theta} \neq 0$. (dica: encontre $\cos\theta = r_0/r$)

b) Encontre o vetor aceleração em coordenadas esféricas (isto é, em 3 dimensões).

5.2 Questão do Rafael

Considere a força em coordenadas polares, dada por

$$\boldsymbol{F}(r,\theta) = \left[\frac{1+\sin(\theta)}{r^2} - k_1 \frac{\ddot{r}\,\dot{r}\,\exp(r)}{\sqrt{r}}\right]\hat{r} + \left[-\frac{\cos(\theta)}{r^2} - k_2\,\dot{r}^2\,\tan(\theta)\,\exp(r)\right]\hat{\theta}. \tag{1}$$

Item A

Derive os vetores velocidade e aceleração em coordenadas polares, e escreva as equações de movimento para o sistema. (**não é necessário resolvê-las**.)

Item B

A força em questão possui duas constantes k_1 e k_2. Ajuste essas constantes para que tal força seja conservativa e obtenha o potencial escalar $V(r,\theta)$. Você consegue reescrever esse potencial nas coordenadas x, y?

Item C

Encontre a velocidade da partícula nesse campo conservativo como função de r, θ e E, onde E é sua energia.

5.3 Questão do Giuseppe - Símbolo de Levi-Civita e Notação de Einstein

O objetivo dessa questão é ser um treinamento para o uso do símbolo de Levi-Civita e da notação de Einstein (soma implícita para índices repetidos) para resolver problemas.

a) Demonstre a seguinte relação:

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}) = 0\ ,$$

sendo $\mathbf{A}$ um vetor qualquer. (Não é necessário usar usar o símbolo de levi-civita ou notação de Einstein para demonstrar essa relação, porém agiliza muito as contas)

b) Demonstre a seguinte relação:

$$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\ .$$

Seguem algumas relações úteis para os exercícios:

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A} = \partial_i A_i\ ;$$

$$(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A})_i = \varepsilon_{ijk}\partial_j A_k\ ;$$

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn} = \det\begin{vmatrix}\delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in}\\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jn}\\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn}\end{vmatrix}\ ;$$

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{imn} = \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}\ ,$$

onde os índices vão de 1 a 3. Tente partir da terceira relação e chegar na quarta (atenção com a notação de einstein usada nas relações!).

5.4 Questão do João Octavio

Demonstre as seguintes desigualdades, dando, para cada uma, uma demonstração geométrica e outra algébrica (em termos de componentes):

a) $|\mathbf{A}+\mathbf{B}| \le |\mathbf{A}| + |\mathbf{B}|$

b) $|\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}| \le |\mathbf{A}||\mathbf{B}|$

c) $|\mathbf{A}\times\mathbf{B}| \le |\mathbf{A}||\mathbf{B}|$