

MAE-229: INTRODUÇÃO À PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA II

2º semestre de 2023 FEA

Prof. Nikolai Kolev, e-mail: nkolev@ime.usp.br

Exercícios Típicos para Primeira Prova

1. Considere uma população caracterizada via uma variável aleatória X que assume os valores 1, 2 e 3, com probabilidades correspondentes 0.2, 0.3 e 0.5. Considere uma amostra aleatória simples de tamanho $n = 2$ retirada desta população.

- Obtenha a distribuição amostral de $\bar{X} = (X_1 + X_2)/2$;
- Calcule a média e a variância de \bar{X} .

2. Considere uma população caracterizada via uma variável aleatória X que assume os valores -1, 0, 1 e 2 com probabilidades correspondentes 0.3, 0.2, 0.1 e 0.4. Considere uma amostra de tamanho $n = 36$, retirada com a reposição desta população. Calcule o valor esperado e a variância do estimador $\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{36} X_i}{36}$.

3. Considere uma população caracterizada via uma variável aleatória X que assume os valores $\theta - 5$, θ e $\theta + 5$, com probabilidades correspondentes 0.1, 0.8 e 0.1. Considere uma amostra de tamanho n retirada desta população.

- Demonstre que $\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$ é um estimador não viesado do parâmetro θ ;
- O estimador \bar{X} é consistente?

4a. Sejam X_1, X_2, \dots, X_n variáveis aleatórias independentes com distribuição comum Poisson de parâmetro desconhecido θ , i.e. $P(X_i = k) = \frac{e^{-\theta} \theta^k}{k!}$ para $k = 0, 1, 2, \dots$. Qual é o estimador de máxima verossimilhança de θ ?

4b. Sejam X_1, X_2, \dots, X_n variáveis aleatórias independentes com distribuição comum Laplace de parâmetro desconhecido θ , i.e. com densidade $f(x) = 1/2\theta \exp(-|x|/\theta)$ para $-\infty < x < \infty$. Qual é o estimador de máxima verossimilhança de θ ?

5. Faz-se uma pesquisa sobre o consumo da população normal $N(\mu, 4)$. A média amostral de uma amostra aleatória de tamanho $n=25$ é 8.2.

- Teste $H_0 : \mu = 7.5$ contra $H_A : \mu < 7.5$ com nível de significância $\alpha = 0.01$;
- Teste $H_0 : \mu = 9$ contra $H_A : \mu > 9$ com nível de significância $\alpha = 0.05$;
- Determinar um intervalo de confiança de 80% para média populacional;
- Dê um intervalo de confiança de 90% para média populacional e compare com (c).

6. Suponha que estejamos interessados em estimador de porcentagem dos consumidores de um certo produto. Uma amostra de tamanho 400 forneceu 100 indivíduos que consomem o dado produto.

- Teste $H_0 : p = 0.3$ contra $H_A : p < 0.3$ com nível de significância $\alpha = 0.01$;
- Teste $H_0 : p = 0.4$ contra $H_A : p > 0.4$ com nível de significância $\alpha = 0.05$;
- Construa intervalos com confiança 80% e 90% para a porcentagem populacional p . Comente as diferenças encontradas.