Quarta Lista de Mecânica Quântica: 2/09/2023

1. Calcule produtos escalares entre os vetores abaixo (definidos numa certa base ortonormal). Normalize esses vetores (cuidado com elementos complexos: $\vec{a}\cdot\vec{b}=\sum_i a_i^* b_i$. Encare os vetores como matrizes):
$$\begin{pmatrix}1\\2i\\3\end{pmatrix}\;,\quad\begin{pmatrix}-i\\i\\2\end{pmatrix}\quad \text{e}\quad \begin{pmatrix}0\\i\\2\end{pmatrix}.$$
Se um desses vetores (escolha) for indicado pelo símbolo $|a\rangle$ (chamado ket), como você indicaria o vetor $\langle a|$ (chamado bra), sabendo que o produto escalar $\vec{a}\cdot\vec{b}$ é um número (complexo) indicado pelo braket $\langle a|b\rangle$? Que natureza (escalar, vetor, operador, ...) tem o objeto $\mathcal{O}=|a\rangle\langle b|$? Construa esse objeto, explorando as regras do produto de matrizes. Prove que $\mathcal{O}^\dagger=|b\rangle\langle a|$. Calcule $\langle c|\mathcal{O}|c\rangle$, sendo $|c\rangle$ um dos vetores acima.

2. A exponencial de um operador é definida pela sua expansão em série de Taylor: $e^A = 1 + A + A^2/2! + A^3/3! + ...$ Demonstre, então, que $\psi(x+a,t)=e^{i\hat{p}\,a/\hbar}\psi(x,t)$. Por isso o operador $\hat{p}/\hbar$ é denominado *gerador das translações espaciais*. Sugestão: expanda $\psi(x+a,t)$ em Taylor, troque as derivadas por $p=-i\hbar\partial_x$ e reagrupe os termos.

3. Mostre que: $(\alpha A)^\dagger=\alpha^* A^\dagger$, $(ABC)^\dagger = C^\dagger B^\dagger A^\dagger$, $(e^A)^\dagger = e^{A^\dagger}$.

4. Mostre que $[x^n,p]=i\hbar x^{n-1}$, $[f(x),p]=i\hbar\partial f/\partial x$ e $[e^A,A]=0$.

5. Considere o operador momento angular orbital $\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}$. Mostre que (a) $L_z=xp_y-yp_x$ é Hermitiano e linear e (b) $[L_x,L_y]=i\hbar L_z$.

6. Sabendo que $\phi=A\psi$, com ϕ e ψ normalizadas, determine (a) $\langle\psi|A^\dagger|\phi\rangle$ e (b) $\langle\psi|A^\dagger A|\psi\rangle$. Se ainda tivermos que $[A^\dagger,A]=I$, quanto vale $\langle\psi|AA^\dagger|\psi\rangle$?

7. Futuramente iremos encontrar o operador $A=id/d\phi$, onde ϕ é a coordenada polar usual no plano, cujo valor fica no intervalo $0\le\phi\le 2\pi$. Mosque que A é hermitiano. Determine suas autofunções $f_n(\phi)$ e autovalores a_n, considerando que $f_n(\phi+2\pi)=f_n(\phi)$. Tome duas autofunções $f_n(\phi)$ e $f_m(\phi)$ e mostre que são ortogonais para $n\neq m$. Determine o valor médio do operador A^2 no estado normalizado $\psi(\phi)=\alpha f_1+\beta f_2$, sendo α e β constantes complexas. Dica: exercício parcialmente resolvido no Griffiths.

8. Se as funções ϕ_1 e ϕ_2 do exercício anterior representam duas autofunções degeneradas de um certo Hamiltoniano, mostre que as duas novas funções ortogonais ψ_1 e ψ_2 também são autofunções desse Hamiltoniano. Como os autovalores associados à ψ_1 e ψ_2 se relacionam com aqueles de ϕ_1 e ϕ_2?

9. Foi mostrado em classe que o operador momento linear $p=-i\hbar\partial_x$ é Hermitiano. Mostre que p^2 também é. Mostre que ambos, p e p^2 são lineares. O operador x^2 é linear?

10. Mostre que

(a) $[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B$ usando direto a definição $[A, B] = AB - BA$. Naturalmente, então, que também vale $[A, BC] = B[A, C] + [A, B]C$.

(b) para dois operadores A e B, vale que $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$. Em particular, observe que todo operador $O = A^\dagger A$ (chamada forma biquadrática) é Hermitiano;

(c) baseado no item anterior, como podemos expressar $(ABC)^\dagger$? Dica: chame temporariamente BC de D;

(d) se dois operadores comutam, isto é, $[A, B] \equiv AB - BA = 0$, seus adjuntos também comutam;

(e) o produto de dois operadores Hermitianos é Hermitiano se eles comutam entre si;

(f) se A e B são dois observáveis (isto é, Hermitianos e lineares), e tiverem um conjunto completo de autofunções ϕ_n comuns a ambos, isto é, $A\phi_n = a_n\phi_n \quad \text{e} \quad B\phi_n = b_n\phi_n$, então eles comutam. O inverso também é válido.

11. Um observável A tem dois autoestados ψ_1 e ψ_2, com autovalores a_1 e a_2, respectivamente. Um outro observável B tem dois autovalores b_1 e b_2, respectivamente com autoestados (normalizados) ϕ_1 e ϕ_2, tais que: $\psi_1 = (3\phi_1 + 4\phi_2)/5 \quad \text{e} \quad \psi_2 = (4\phi_1 - 3\phi_2)/5$.

(a) O observável A é medido e o valor a_1 é obtido. Qual é o estado do sistema imediatamente após a medida?

(b) Se após a medida mencionada no item anterior for feita uma medida do observável B, quais os possíveis valores da mesma e respectiva probabilidade?

Agora começa tudo novamente (esquece as medidas feitas nos itens anteriores):

(a) O observável B é medido e o valor b_1 é obtido. Qual é o estado do sistema imediatamente após a medida?

(b) Se após a medida mencionada no item anterior for feita uma medida do observável A, quais os possíveis valores da mesma e respectiva probabilidade?

12. Considere o seguinte operador: $\hat{A} = i|1\rangle\langle 2| - i|2\rangle\langle 1|$, onde $|1\rangle$ e $|2\rangle$ são dois estados de base (e $i = \sqrt{-1}$). Certifique-se que ele é Hermitiano. Um elemento de matriz de $\hat{A}$ é defindo por: $A_{m,n} = \langle m|\hat{A}|n\rangle$. Monte a matriz A, 2×2, que representa o operador $\hat{A}$ nessa base. Verifique que $(A^t)^* = A$, onde A^t indica tomar o transposto da matriz A. Isso equivale à afirmação $\hat{A}^\dagger = \hat{A}$. Diagonalize essa matriz, ou seja, encontre seus autovetores e autovalores. Veja que os autovalores são reais, a despeito do i em $\hat{A}$, e os autovetores são ortogonais, propriedades esperadas já que $\hat{A}^\dagger = \hat{A}$. Note que fiz distinção na notação do operador, $\hat{A}$, e da matriz que o representa, A. Nem sempre isso é feito, mas você deve entender que são objetos diferentes: um representa o outro em espaços diferentes.

13. Mostre que os autovetores determinados no item anterior formam um base, afinal são derivados de um operador Hermitiano. Expanda o vetor $|v\rangle = |1\rangle + |2\rangle$ nessa base.