

Estudo das tensões

Prof. Alfredo Gay Neto
Prof. Luís Bitencourt Jr.
Prof. Miguel Bucalem

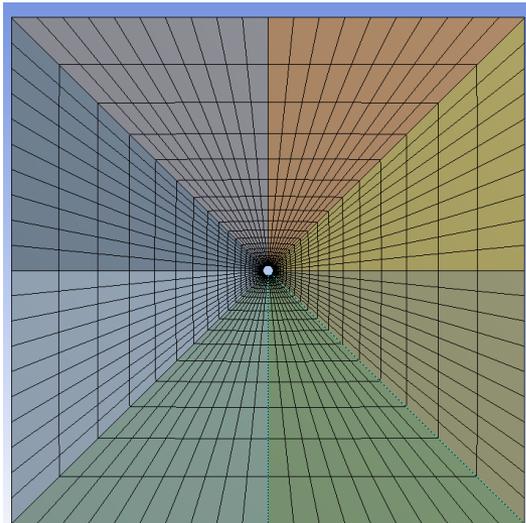


PEFUSP

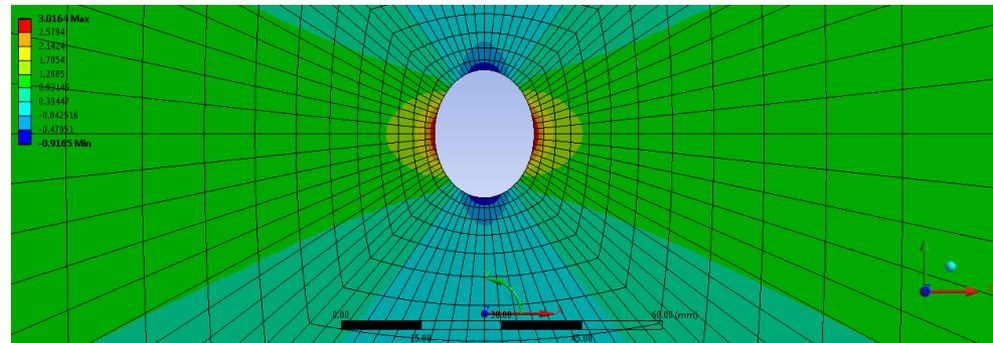
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA
DE ESTRUTURAS E GEOTÉCNICA

**PEF 3302 – Mecânica das
Estruturas I**

- ▶ Avaliação de esforços e falhas em peças, componentes, estruturas em geral
- ▶ Ex: análise de elementos finitos (interpretação de resultados)
 - Placa sob tração com furo no centro



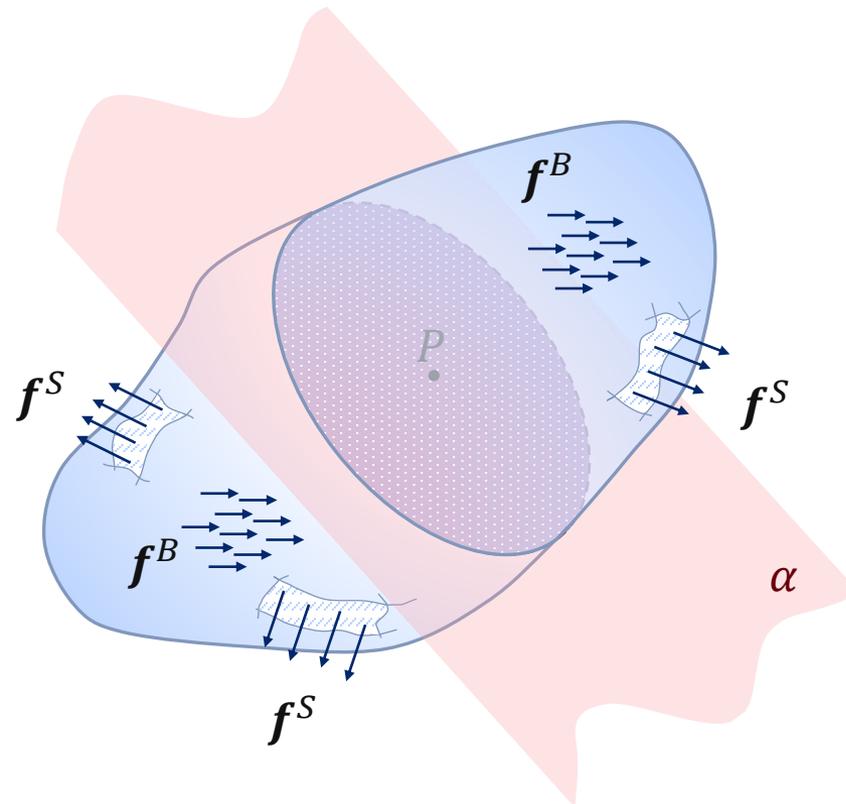
Exemplo de componente de tensões plotada em escala de cores:



Seja um sólido deformável, submetido a carregamentos de volume e de superfície

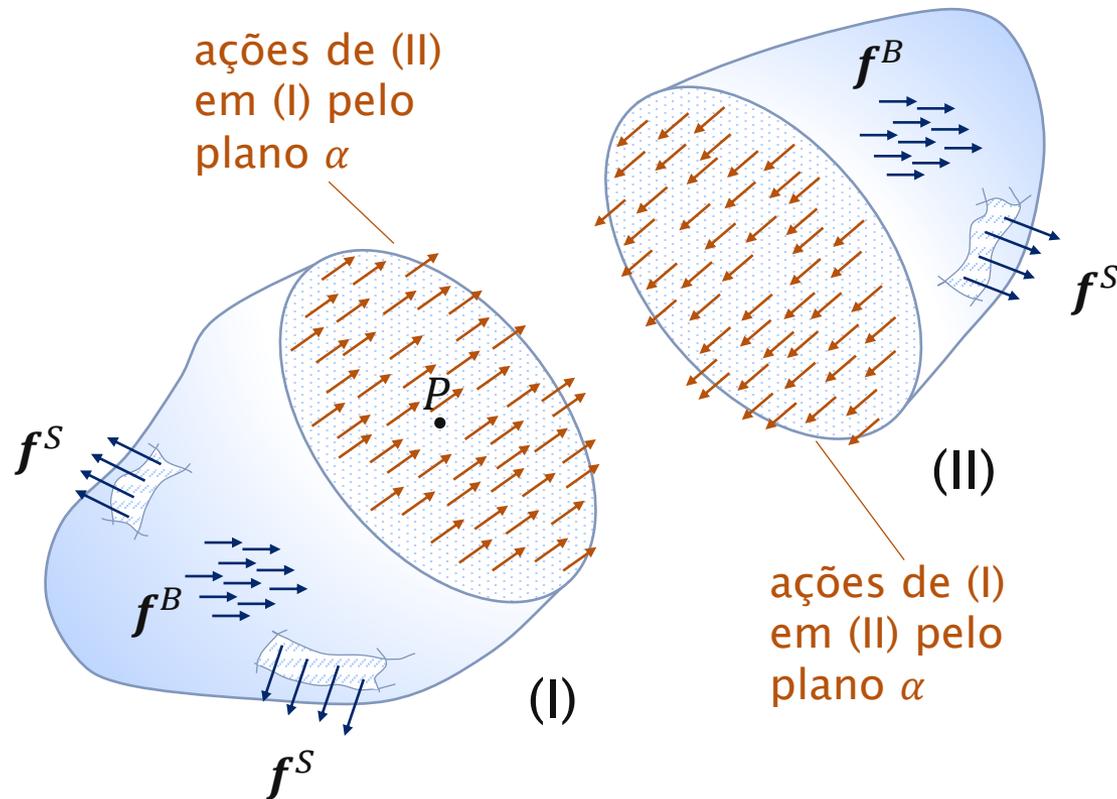
Carregamentos:

- Volume f^B (ou $\underline{f^B}$)
- Superfície f^S (ou $\underline{f^S}$)



Sólido em equilíbrio estático

As partes (I) e (II) também devem estar em equilíbrio



Define-se:

$$\rho_m = \frac{\Delta F}{\Delta S} \quad \rho_m = \rho_m(P, \alpha, \Delta S)$$

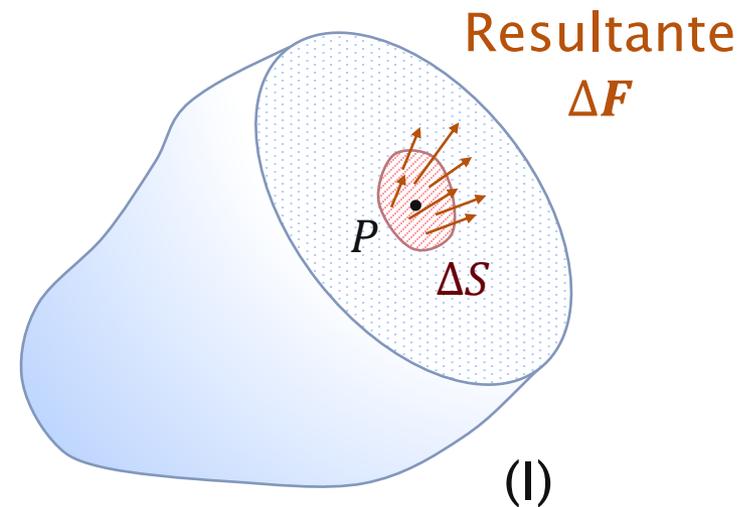
ρ_m : tensão média

No limite: $\rho = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta S}$

$$\rho = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \rho_m \quad \rho = \rho(P, \alpha)$$

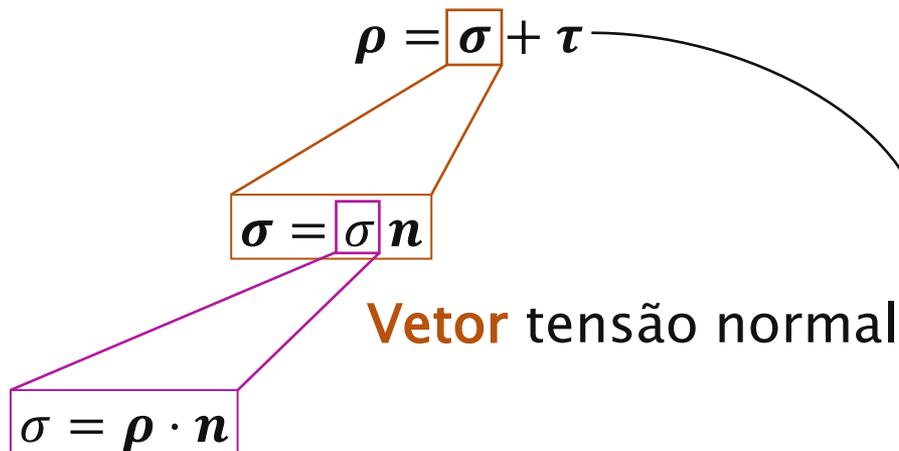
ρ : tensão em P segundo o plano α

Um vetor não é suficiente para descrever o estado de tensão de um ponto!



Seja n o vetor normal exterior definido pelo plano de corte α

Podemos decompor a tensão assim:

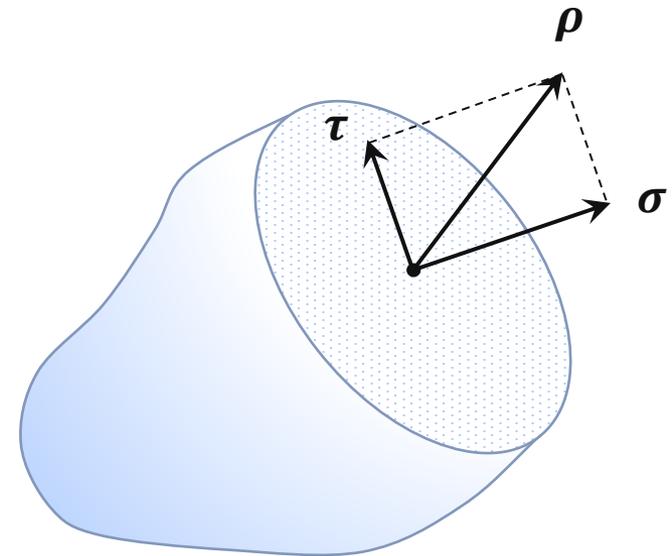


Vetor tensão normal

Escalar tensão normal

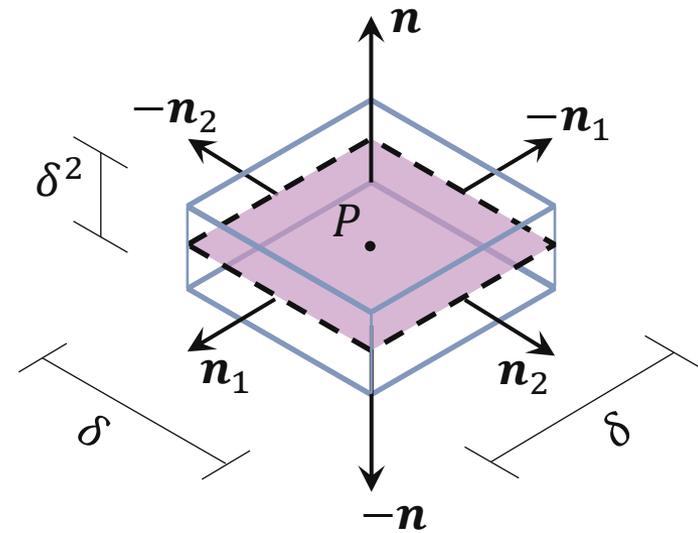
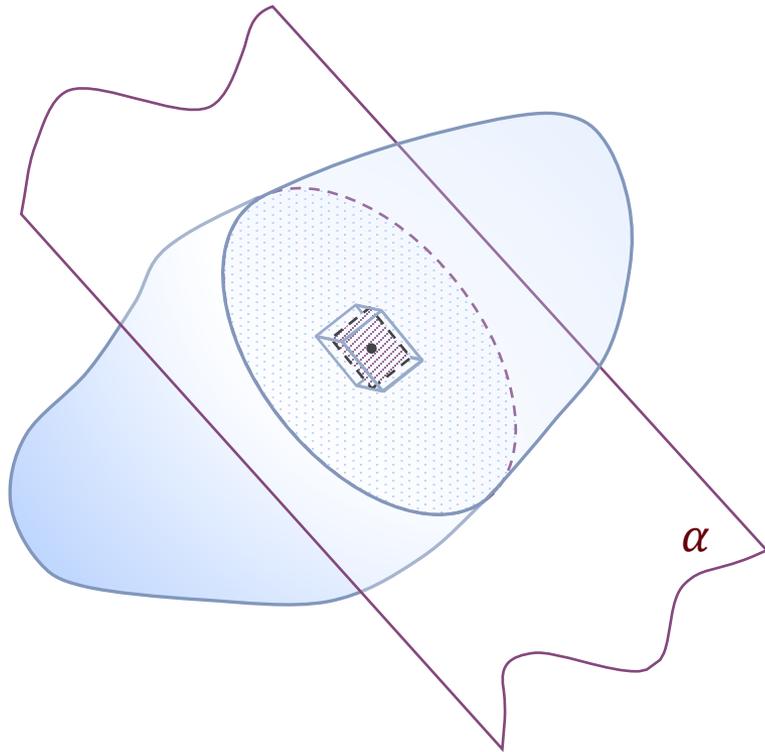
$\sigma > 0$ Tração

$\sigma < 0$ Compressão



$$\tau = \rho - \sigma$$

Vetor tensão tangencial
ou de cisalhamento



$$\rho(P, \mathbf{n})\delta^2 + \rho(P, -\mathbf{n})\delta^2 + \rho(P, \mathbf{n}_1)\delta^3 + \rho(P, -\mathbf{n}_1)\delta^3 + \rho(P, \mathbf{n}_2)\delta^3 + \rho(P, -\mathbf{n}_2)\delta^3 + \mathbf{f}^B(P)\delta^4 = \mathbf{0}$$

Quando $\delta \rightarrow 0$

$$\rho(P, \mathbf{n}) = -\rho(P, -\mathbf{n})$$

Direções particulares de corte $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$

$$\rho(P, \mathbf{e}_1) = T_{11}\mathbf{e}_1 + T_{12}\mathbf{e}_2 + T_{13}\mathbf{e}_3$$

ou

$$\rho(P, \mathbf{e}_1) = T_{11}\mathbf{e}_1 + T_{21}\mathbf{e}_2 + T_{31}\mathbf{e}_3$$

Há duas notações possíveis (de acordo com a referência):

- **Notação 1:** T_{ij} : i refere-se à direção do plano de corte e j refere-se à direção associada àquela componente
- **Notação 2:** T_{ji} : j refere-se à direção do plano de corte e i refere-se à direção associada àquela componente

Apesar da aparente confusão que isso poderia causar, depois veremos que $T_{ij} = T_{ji}$. Assim, é importante aprender a conviver com ambas as notações.

O mesmo vale para as direções e_2 e e_3

Seguindo a **notação 1**

$$\rho(P, e_2) = T_{21}e_1 + T_{22}e_2 + T_{23}e_3$$

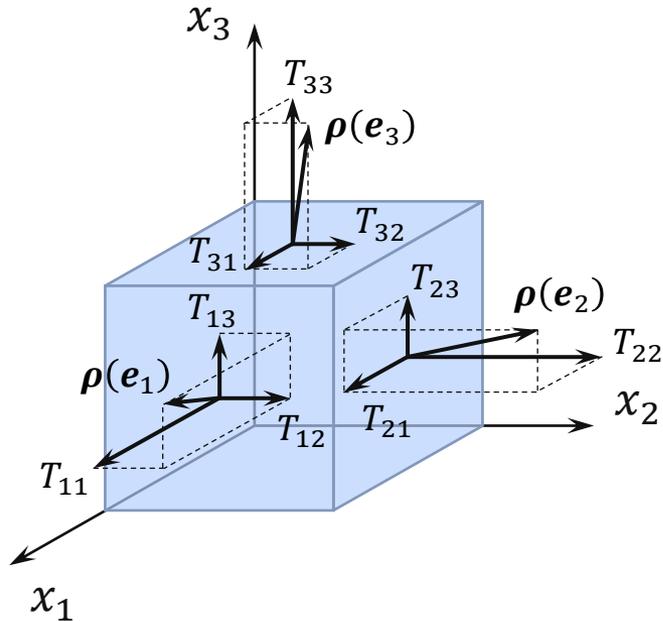
$$\rho(P, e_3) = T_{31}e_1 + T_{32}e_2 + T_{33}e_3$$

Com índices genéricos, escreve-se:

$$\rho(P, e_i) = T_{i1}e_1 + T_{i2}e_2 + T_{i3}e_3 = \sum_{j=1}^3 T_{ij}e_j$$

Plano de corte indicado pelo índice i

Componente de tensão indicada pelo índice j



$$\rho(\mathbf{e}_1) = T_{11}\mathbf{e}_1 + T_{12}\mathbf{e}_2 + T_{13}\mathbf{e}_3$$

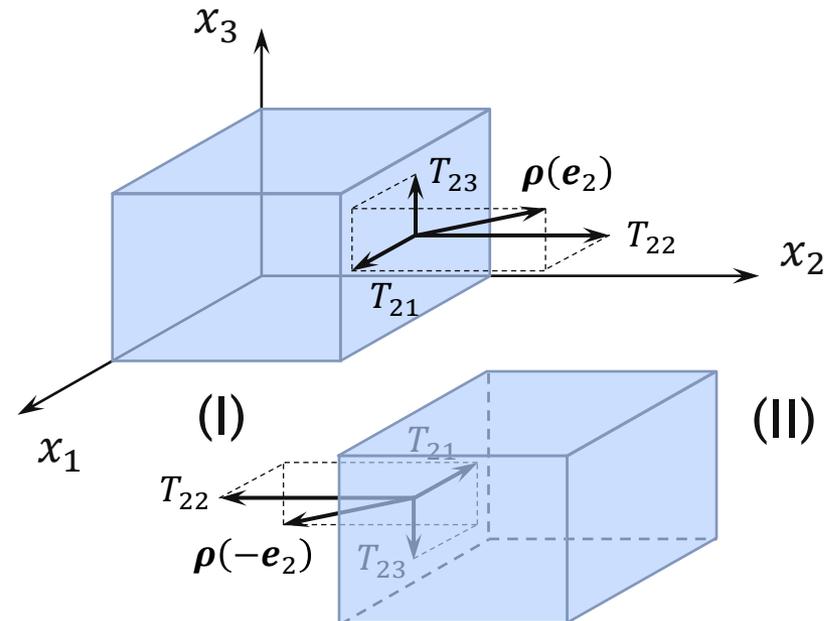
$$\rho(\mathbf{e}_2) = T_{21}\mathbf{e}_1 + T_{22}\mathbf{e}_2 + T_{23}\mathbf{e}_3$$

$$\rho(\mathbf{e}_3) = T_{31}\mathbf{e}_1 + T_{32}\mathbf{e}_2 + T_{33}\mathbf{e}_3$$

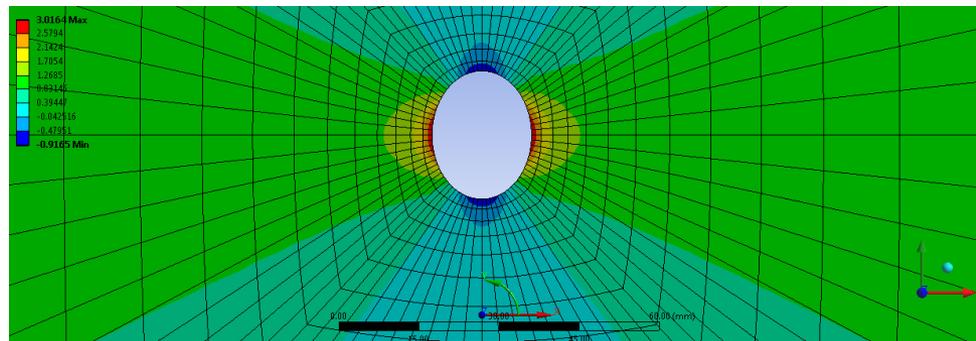
$$\rho(\mathbf{e}_i) = \sum_{j=1}^3 T_{ij}\mathbf{e}_j$$

Ação-reação

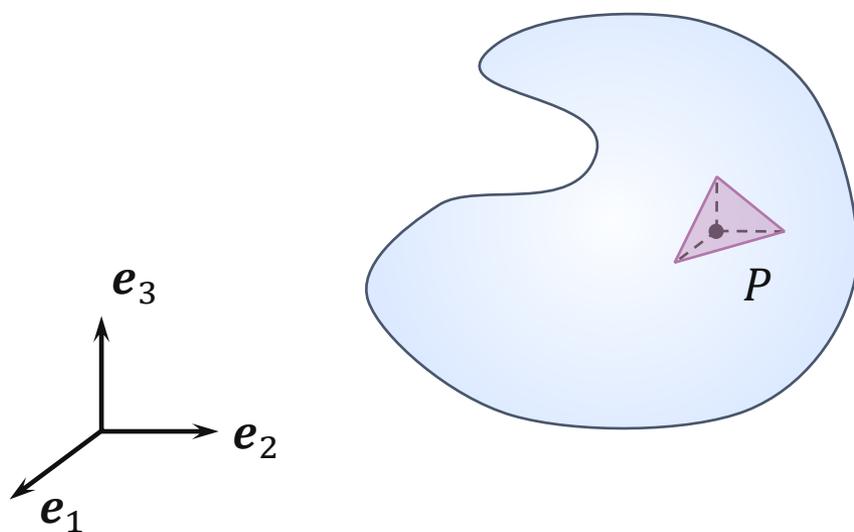
$$\begin{aligned} \rho(-\mathbf{e}_2) &= -\rho(\mathbf{e}_2) \\ &= -T_{21}\mathbf{e}_1 - T_{22}\mathbf{e}_2 - T_{23}\mathbf{e}_3 \end{aligned}$$



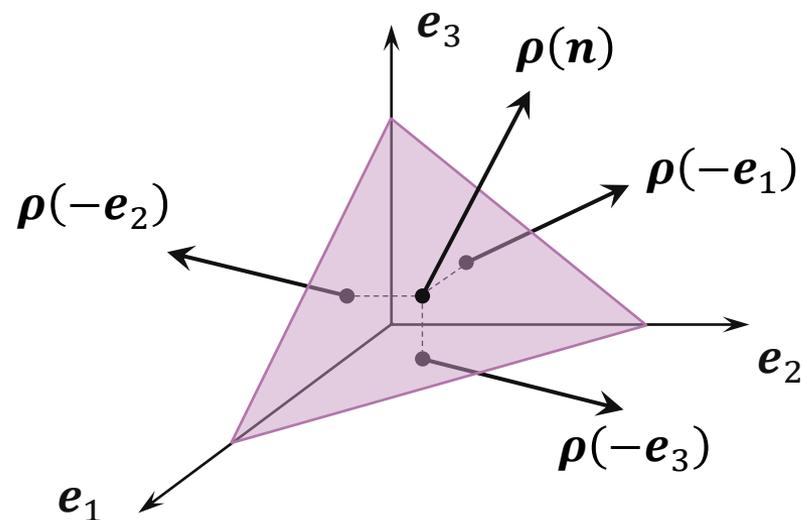
- ▶ Grande utilidade para avaliar o “esforço interno” associado a um ponto de um sólido
- ▶ Será importante para estabelecer critérios de resistência:
 - Como e porque o material falha?
 - Ex: dúctil vs. frágil e diferentes critérios que possuem relação com diferentes interpretações sobre o estado de tensão de um ponto (candidato a falha)
- ▶ Obs: em uma análise (ex: elementos finitos), cada ponto (material) possui um estado de tensão distinto.



Vamos analisar as forças em um **tetraedro infinitesimal** com vértice em um ponto arbitrário P de um sólido

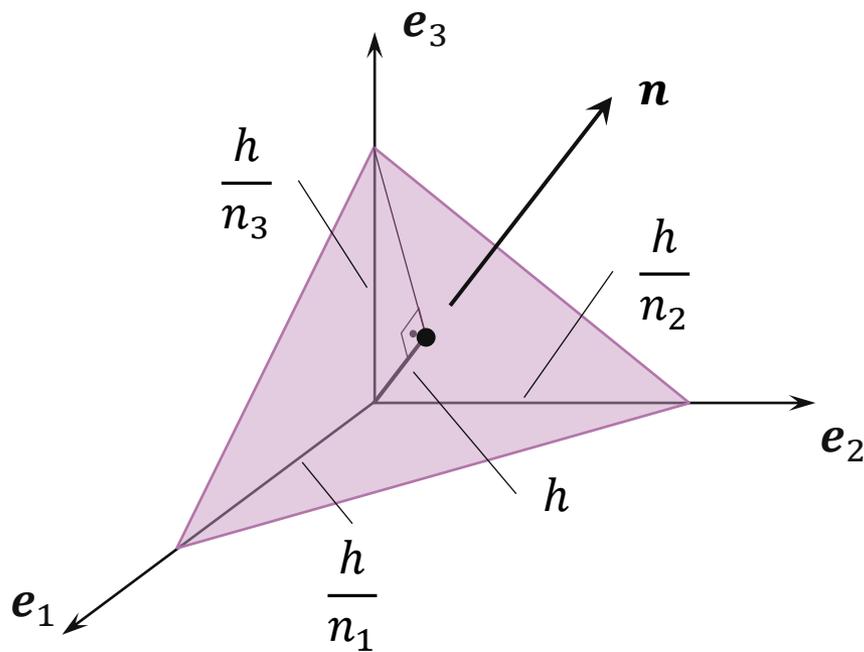


Isolando o tetraedro, ficam expostas as tensões nas quatro faces



Vamos utilizar as seguintes relações entre as áreas das faces

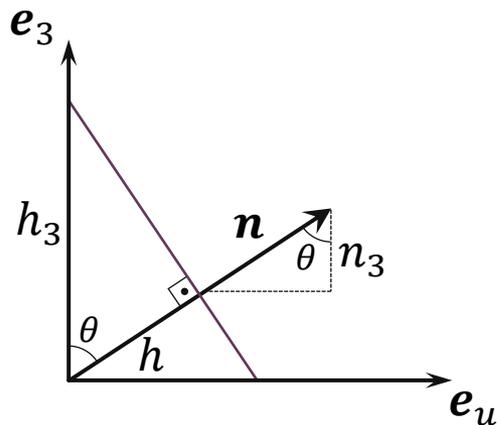
$$V = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3}S_i \left(\frac{h}{n_i} \right)$$



- ▶ V é o volume do tetraedro
- ▶ S é a área da face frontal
- ▶ h é a altura
- ▶ n_i é componente da normal \mathbf{n}
- ▶ S_i é a área da face ortogonal ao eixo e_i

$$S_i = n_i S$$

- ▶ Projeção da face inclinada em um plano que:
 - contém a origem;
 - paralelo ao vetor normal à face inclinada \mathbf{n} e ao vetor \mathbf{e}_3 ;
 - intersecta o plano $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$ em algum vetor \mathbf{e}_u .



$$\cos(\theta) = \frac{h}{h_3}$$

$$\cos(\theta) = \frac{n_3}{1}$$



$$n_3 h_3 = h$$

- ▶ De modo geral: $n_i h_i = h$

- ▶ Volume: $V = \frac{1}{3} S h = \frac{1}{3} S_i h_i = \frac{1}{3} S_i \frac{h}{n_i}$ Áreas: $S_i = n_i S$

A resultante de forças no tetraedro é

$$\mathbf{R} = \rho(\mathbf{n})S + \rho(-\mathbf{e}_1)S_1 + \rho(-\mathbf{e}_2)S_2 + \rho(-\mathbf{e}_3)S_3 + \mathbf{f}^B V = \mathbf{0}$$

Dividindo-se por S

$$\rho(\mathbf{n}) + \rho(-\mathbf{e}_1)n_1 + \rho(-\mathbf{e}_2)n_2 + \rho(-\mathbf{e}_3)n_3 + \frac{1}{3}\mathbf{f}^B h = \mathbf{0}$$

Arestas infinitesimais \implies Tomar o limite $h \rightarrow 0 \implies \frac{1}{3}\mathbf{f}^B h = 0$

Portanto

$$\rho(\mathbf{n}) = \rho(\mathbf{e}_1)n_1 + \rho(\mathbf{e}_2)n_2 + \rho(\mathbf{e}_3)n_3$$

ou

$$\rho(\mathbf{n}) = \sum_{i=1}^3 \rho(\mathbf{e}_i)n_i = \sum_{i=1}^3 [(\sum_{j=1}^3 T_{ij}\mathbf{e}_j)n_i] = \sum_{j=1}^3 [(\sum_{i=1}^3 T_{ij}n_i)\mathbf{e}_j]$$

Escrevendo a equação vetorial na forma de três equações escalares:

$$\rho_1 = T_{11}n_1 + T_{21}n_2 + T_{31}n_3$$

$$\rho_2 = T_{12}n_1 + T_{22}n_2 + T_{32}n_3$$

$$\rho_3 = T_{13}n_1 + T_{23}n_2 + T_{33}n_3$$

Escrevendo matricialmente:

$$\begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{21} & T_{31} \\ T_{12} & T_{22} & T_{32} \\ T_{13} & T_{23} & T_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix}$$

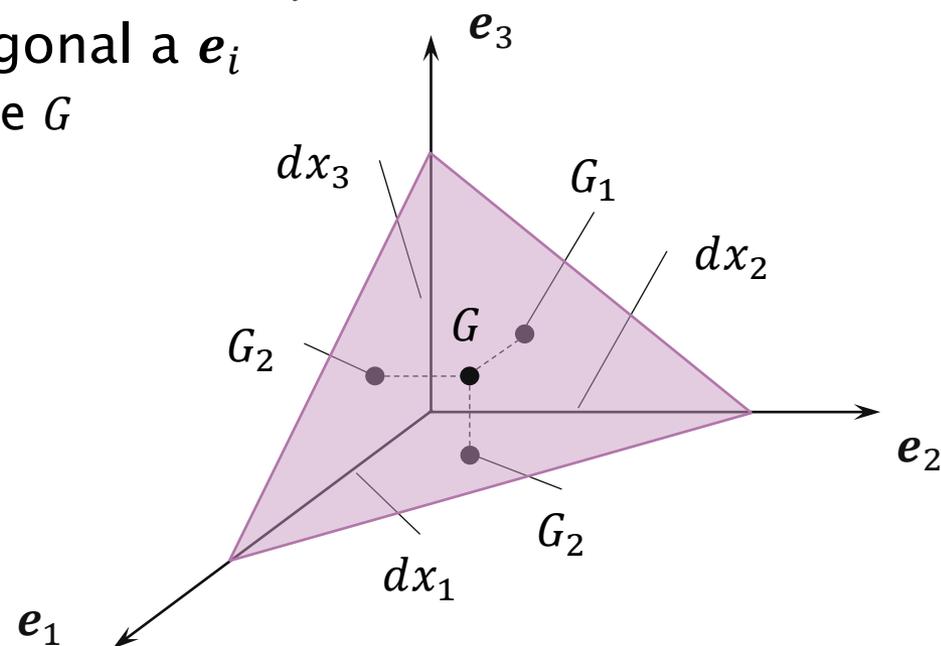
$$[\mathbf{T}] = [\boldsymbol{\rho}(\mathbf{e}_1) \quad \boldsymbol{\rho}(\mathbf{e}_2) \quad \boldsymbol{\rho}(\mathbf{e}_3)]$$

Esta forma evidencia um operador \mathbf{T} denominado tensor das tensões (Cauchy):

$$\boldsymbol{\rho}(\mathbf{n}) = \mathbf{T} \mathbf{n}$$

Propriedades geométricas relacionando os centros de gravidade das faces do tetraedro

- ▶ G é o centroide da face frontal
 - tem coordenadas $\left(\frac{dx_1}{3}, \frac{dx_2}{3}, \frac{dx_3}{3}\right)$
 - dx_i é a altura do tetraedro alinhada com e_i
- ▶ G_i é o centroide da face ortogonal a e_i
 - G_i é a projeção paralela a e_i de G

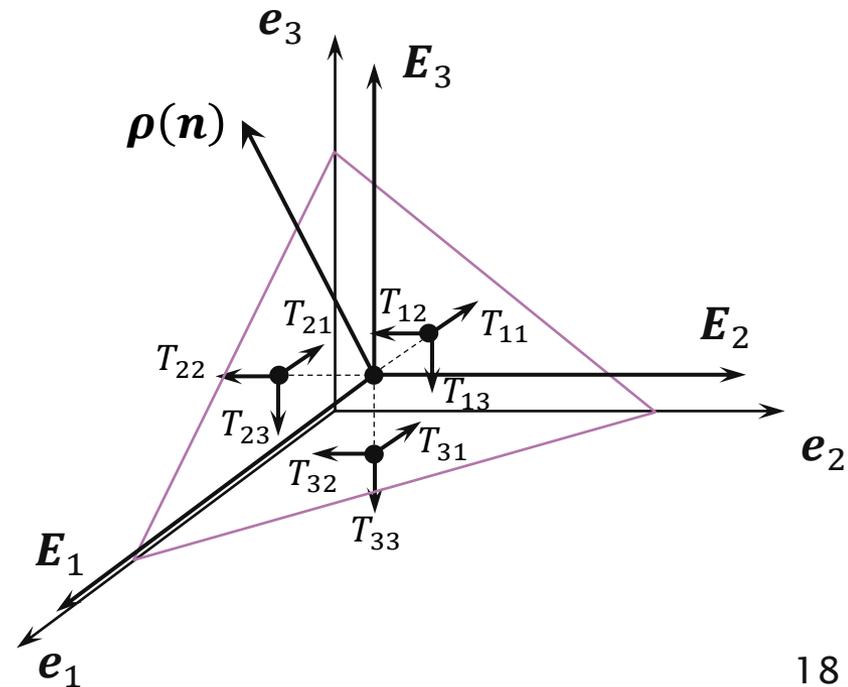


Vamos considerar que as componentes das tensões atuam nestes pontos*

O equilíbrio de momentos se escreve

$$\Sigma \mathbf{M}_G = \mathbf{0} \Leftrightarrow \Sigma \mathbf{M}_{E_1} = \Sigma \mathbf{M}_{E_2} = \Sigma \mathbf{M}_{E_3} = \mathbf{0}$$

E_i é o eixo paralelo a e_i passando por G (e também por G_i)



*É garantido que os centroides estão dentro das faces do tetraedro para quaisquer dx_i , o que permite fazer o limite infinitesimal

Para o eixo E_1

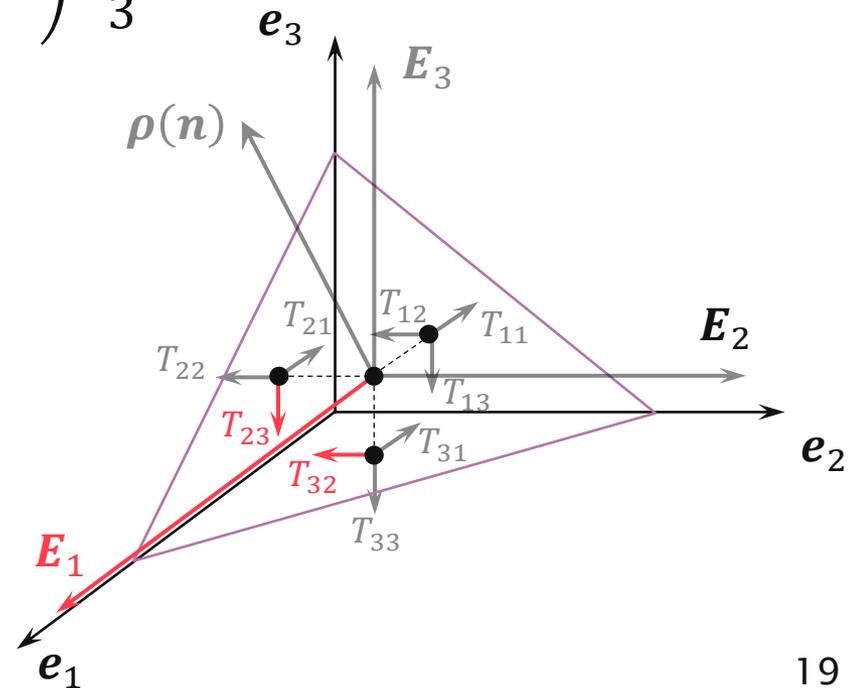
$$\Sigma M_{E_1} = T_{23} S_2 \frac{dx_2}{3} - T_{32} S_3 \frac{dx_3}{3} = 0$$

Então

$$T_{23} \left(\frac{dx_1 dx_3}{2} \right) \frac{dx_2}{3} = T_{32} \left(\frac{dx_1 dx_2}{2} \right) \frac{dx_3}{3}$$

Portanto

$$T_{23} = T_{32}$$



Para o eixo \mathbf{E}_2

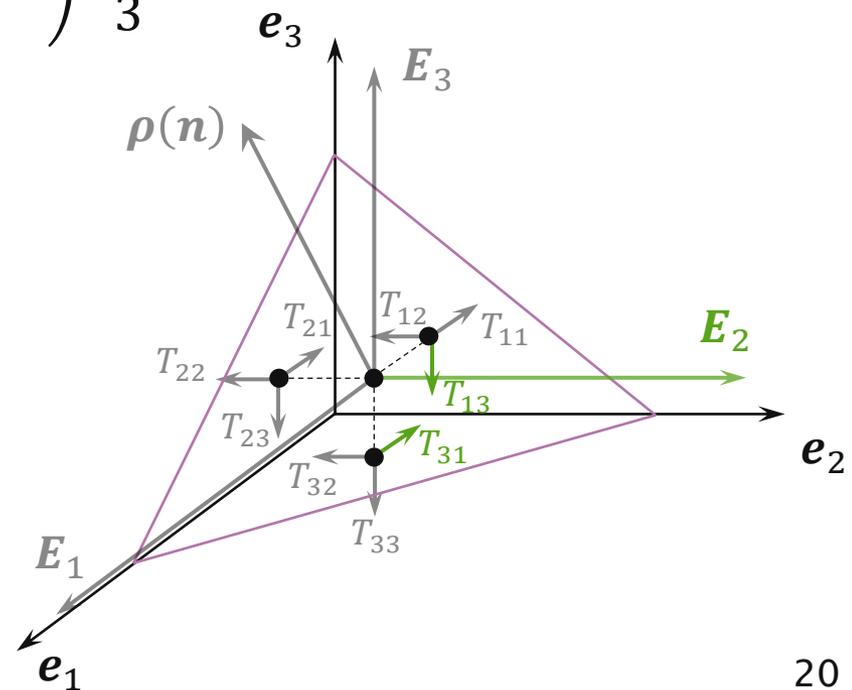
$$\Sigma \mathbf{M}_{\mathbf{E}_2} = T_{31} S_3 \frac{dx_3}{3} - T_{13} S_1 \frac{dx_1}{3} = 0$$

Então

$$T_{31} \left(\frac{dx_1 dx_2}{2} \right) \frac{dx_3}{3} = T_{13} \left(\frac{dx_2 dx_3}{2} \right) \frac{dx_1}{3}$$

Portanto

$$T_{31} = T_{13}$$



Para o eixo E_3

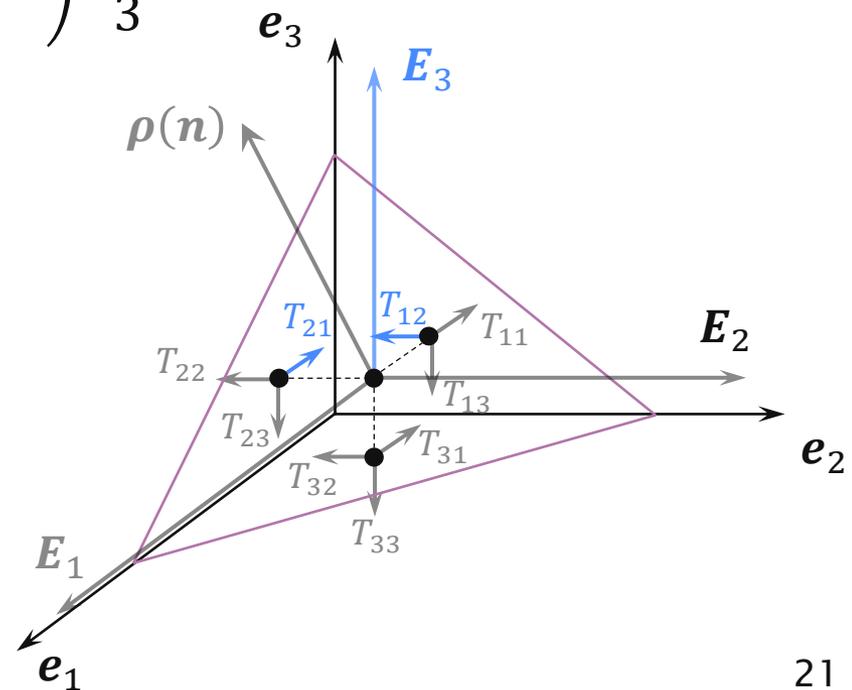
$$\Sigma M_{E_3} = T_{12}S_1 \frac{dx_1}{3} - T_{21}S_2 \frac{dx_2}{3} = 0$$

Então

$$T_{12} \left(\frac{dx_2 dx_3}{2} \right) \frac{dx_1}{3} = T_{21} \left(\frac{dx_1 dx_3}{2} \right) \frac{dx_2}{3}$$

Portanto

$$T_{12} = T_{21}$$



Alternativamente, podemos escrever a soma vetorial de momentos em torno do baricentro G

$$\Sigma \mathbf{M}_G = \underbrace{\rho(\mathbf{n})S}_{\mathbf{0}} \times (G - G) + \rho(-\mathbf{e}_1)S_1 \times (G_1 - G) + \rho(-\mathbf{e}_2)S_2 \times (G_2 - G) + \rho(-\mathbf{e}_3)S_3 \times (G_3 - G) = \mathbf{0}$$

Vamos avaliar a primeira parcela

$$\rho(-\mathbf{e}_1) S_1 \times (G_1 - G) =$$

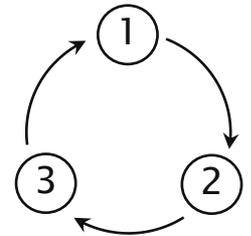
$$(-T_{11}\mathbf{e}_1 - T_{12}\mathbf{e}_2 - T_{13}\mathbf{e}_3) n_1 S \times \left(-\frac{dx_1}{3} \mathbf{e}_1 \right) =$$

$$(T_{11}\mathbf{e}_1 + T_{12}\mathbf{e}_2 + T_{13}\mathbf{e}_3) \times \mathbf{e}_1 \frac{hS}{3} = \frac{hS}{3} (T_{12}\mathbf{e}_3 - T_{13}\mathbf{e}_2)$$

$$*h = n_i dx_i$$

A segunda e terceira parcelas são similares e podem ser obtidas da primeira permutando os índices 1, 2 e 3 ciclicamente

A soma de momentos fica



$$\Sigma \mathbf{M}_G = \frac{hS}{3} (T_{12} \mathbf{e}_3 - T_{13} \mathbf{e}_2) + \frac{hS}{3} (T_{23} \mathbf{e}_1 - T_{21} \mathbf{e}_3) + \frac{hS}{3} (T_{31} \mathbf{e}_2 - T_{32} \mathbf{e}_1) = \mathbf{0}$$

Reorganizando esta soma, temos

$$(T_{23} - T_{32}) \mathbf{e}_1 + (T_{31} - T_{13}) \mathbf{e}_2 + (T_{12} - T_{21}) \mathbf{e}_3 = \mathbf{0}$$

As três componentes tem que ser nulas. Conclusão:

$$T_{23} = T_{32}$$

$$T_{31} = T_{13}$$

$$T_{12} = T_{21}$$

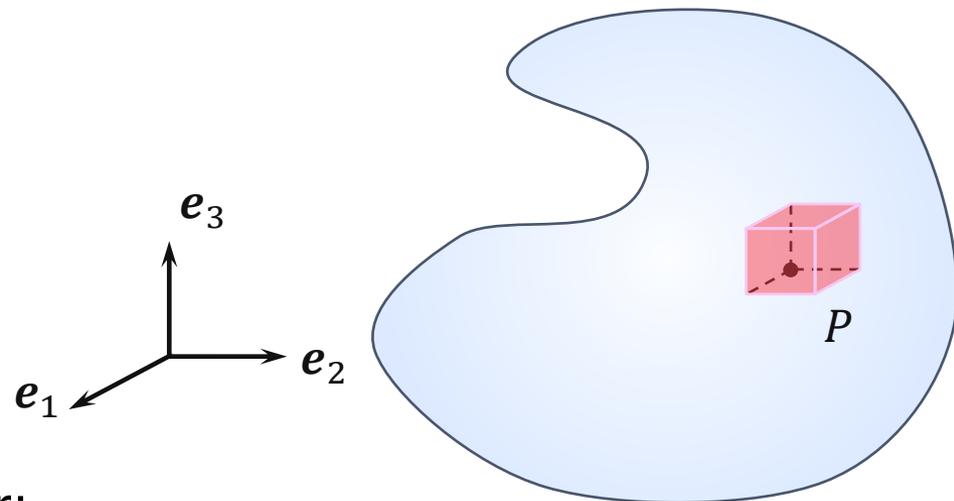
A matriz

$$[\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{21} & T_{31} \\ T_{12} & T_{22} & T_{32} \\ T_{13} & T_{23} & T_{33} \end{bmatrix}$$

é simétrica!

Dizemos que o tensor das tensões de Cauchy \mathbf{T} é um tensor simétrico.

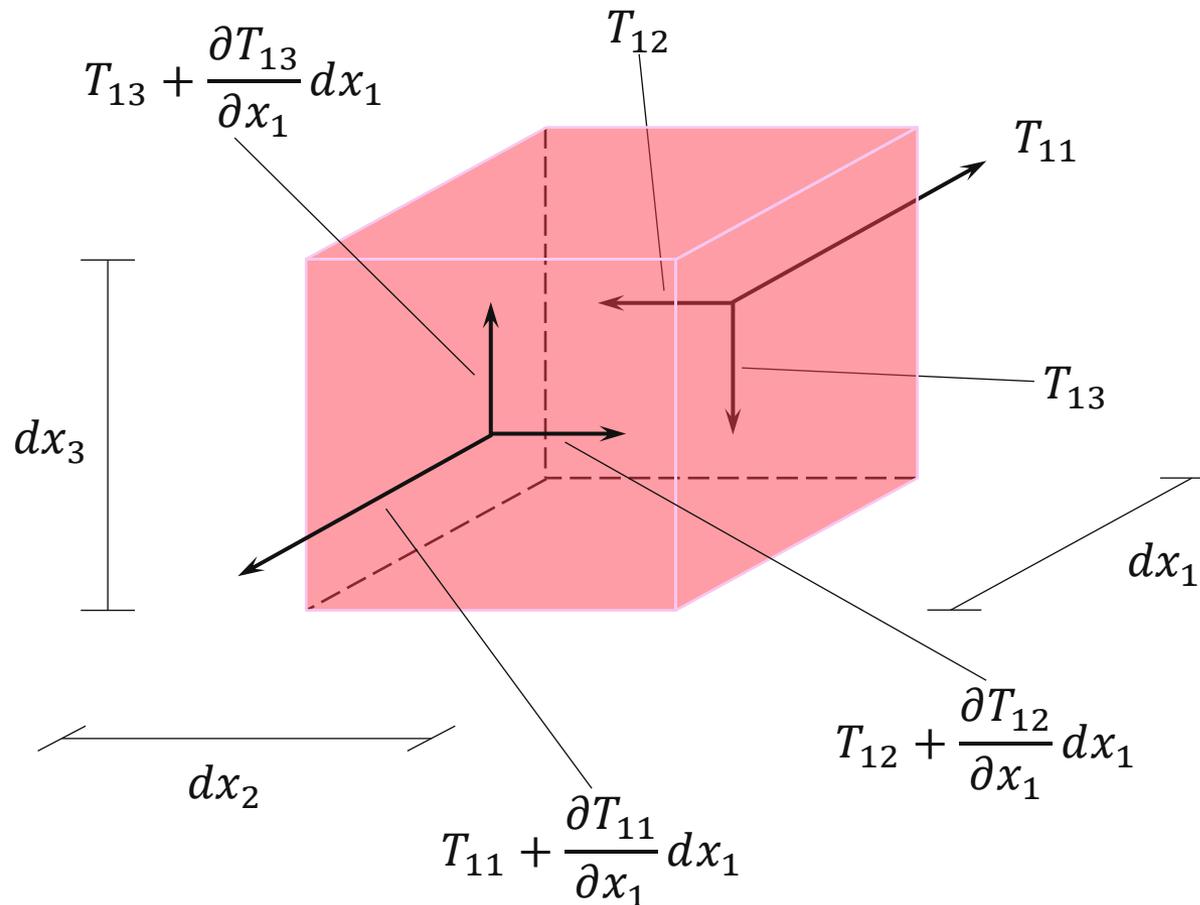
- ▶ Agora o interesse não é mais estudar o estado de tensão em um ponto, mas estudar como a tensão varia entre pontos vizinhos
- ▶ Dessa forma representaremos um pequeno volume do sólido (um paralelepípedo)



- ▶ É necessário considerar:
 - Variação de tensão entre faces paralelas (derivadas)
 - Forças de volume

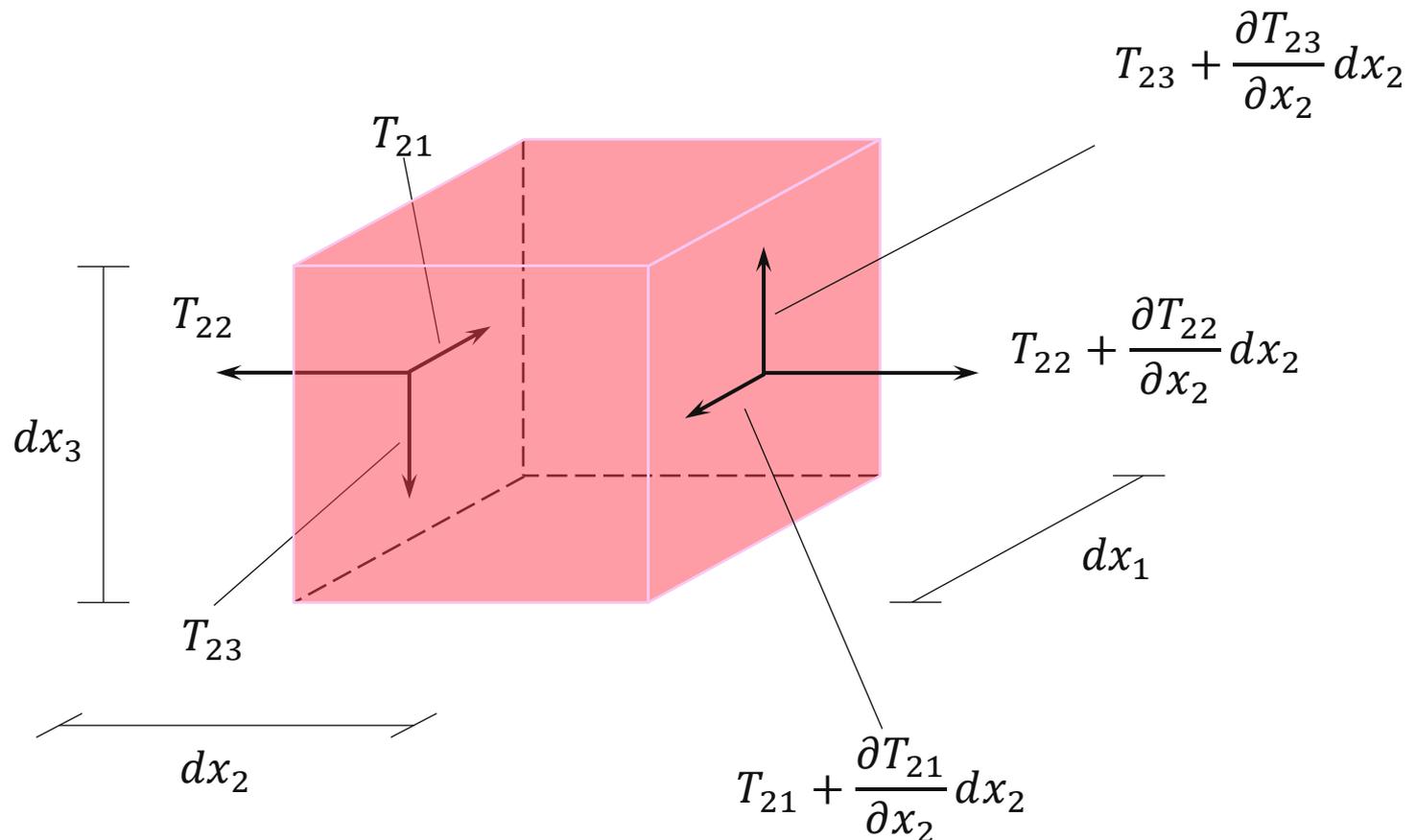
Representação dos esforços nas faces (componentes)

- ▶ Esforços nas faces cuja normal é e_1



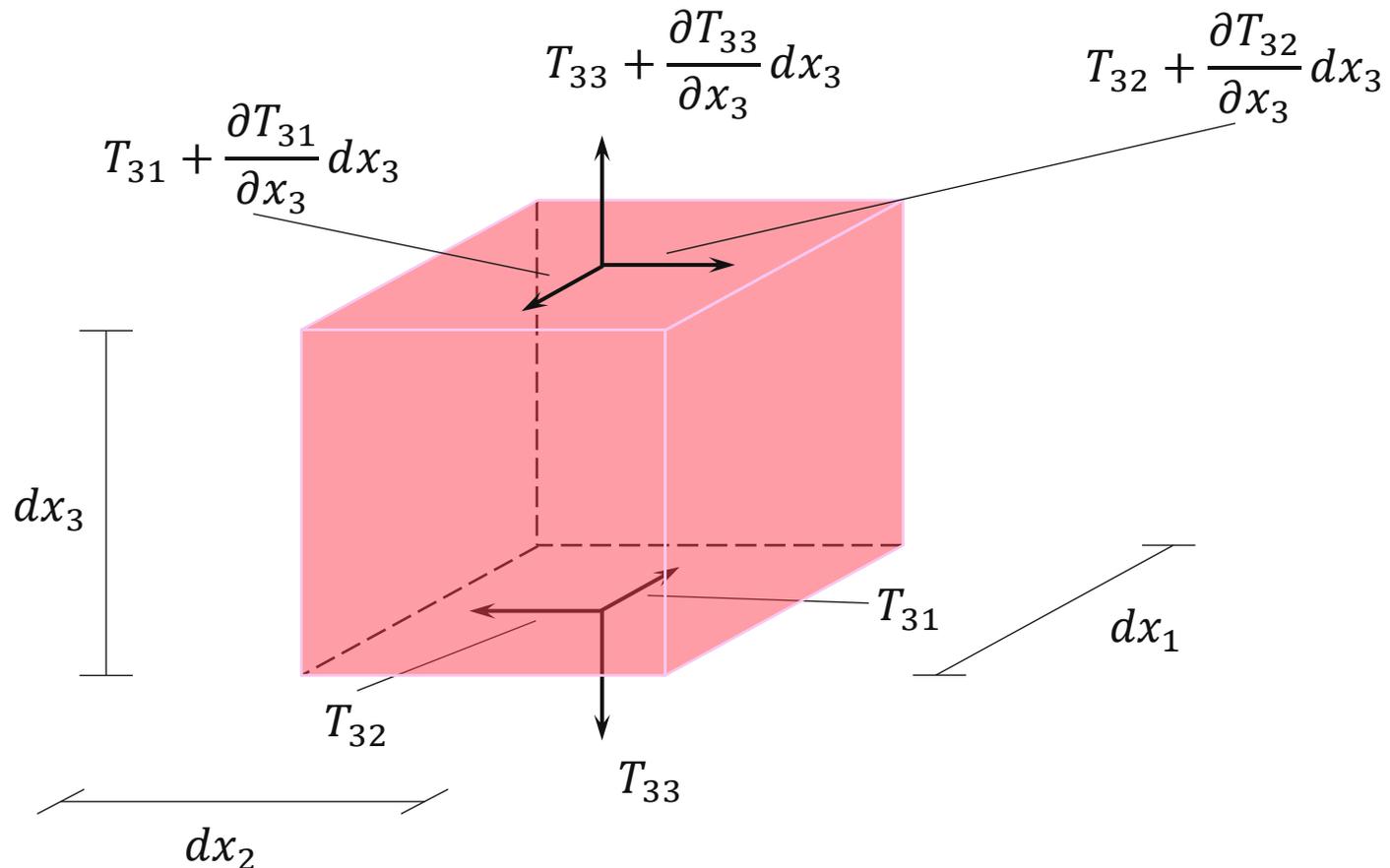
Representação dos esforços nas faces (componentes)

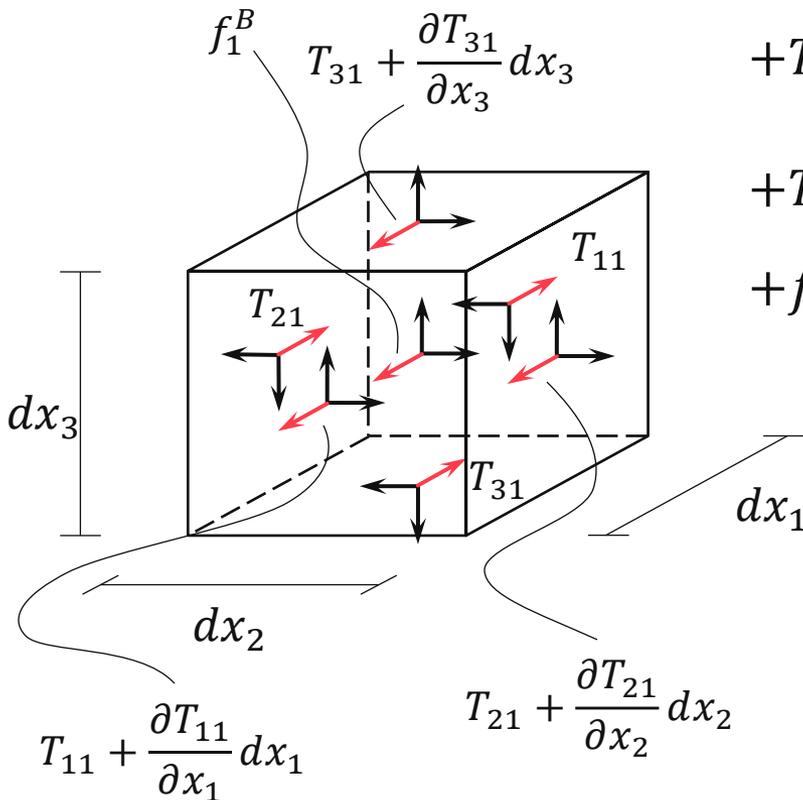
- ▶ Esforços nas faces cuja normal é e_2



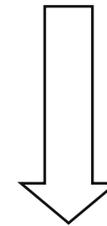
Representação dos esforços nas faces (componentes)

- ▶ Esforços nas faces cuja normal é e_3





$$\begin{aligned}
 & T_{11} dx_2 dx_3 + \frac{\partial T_{11}}{\partial x_1} dx_1 dx_2 dx_3 - T_{11} dx_2 dx_3 \\
 & + T_{21} dx_1 dx_3 + \frac{\partial T_{21}}{\partial x_2} dx_2 dx_1 dx_3 - T_{21} dx_1 dx_3 \\
 & + T_{31} dx_1 dx_2 + \frac{\partial T_{31}}{\partial x_3} dx_3 dx_1 dx_2 - T_{31} dx_1 dx_2 \\
 & + f_1^B dx_1 dx_2 dx_3 = 0
 \end{aligned}$$



$$\frac{\partial T_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{31}}{\partial x_3} + f_1^B = 0$$

- ▶ Analogamente para as outras direções:

$$\frac{\partial T_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{32}}{\partial x_3} + f_2^B = 0$$

$$\frac{\partial T_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{33}}{\partial x_3} + f_3^B = 0$$

É possível reescrever as mesmas equações vetorialmente utilizando-se do tensor das tensões da forma:

$$\operatorname{div} \mathbf{T} + \mathbf{f}^B = \mathbf{0}$$

Em que $\operatorname{div} \mathbf{T}$ é o divergente do tensor das tensões

- O divergente de um tensor de segunda ordem é um vetor

$$\mathbf{T} = [\boldsymbol{\rho}(\mathbf{e}_1) \quad \boldsymbol{\rho}(\mathbf{e}_2) \quad \boldsymbol{\rho}(\mathbf{e}_3)]$$

$$\operatorname{div} \mathbf{T} = \frac{\partial}{\partial x_1} \boldsymbol{\rho}(\mathbf{e}_1) + \frac{\partial}{\partial x_2} \boldsymbol{\rho}(\mathbf{e}_2) + \frac{\partial}{\partial x_3} \boldsymbol{\rho}(\mathbf{e}_3)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \boldsymbol{\rho}(\mathbf{e}_1) = \frac{\partial}{\partial x_1} (T_{11} \mathbf{e}_1 + T_{12} \mathbf{e}_2 + T_{13} \mathbf{e}_3)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \boldsymbol{\rho}(\mathbf{e}_2) = \frac{\partial}{\partial x_2} (T_{21} \mathbf{e}_1 + T_{22} \mathbf{e}_2 + T_{23} \mathbf{e}_3)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_3} \boldsymbol{\rho}(\mathbf{e}_3) = \frac{\partial}{\partial x_3} (T_{31} \mathbf{e}_1 + T_{32} \mathbf{e}_2 + T_{33} \mathbf{e}_3)$$