

Hidrodinâmica I

Reflexão de ondas; Onda estacionária e Energia média de onda



PNV3323 – Hidrodinâmica I

O campo de velocidades

As velocidades do escoamento:

$$\vec{v}(x, z, t) = \nabla\phi(x, z, t) = u(x, z, t)\vec{i} + w(x, z, t)\vec{k}$$

com:

$$u(x, z, t) = \omega A \frac{\cosh k(z + h)}{\sinh(kh)} \cos(kx - \omega t)$$

$$w(x, z, t) = \omega A \frac{\sinh k(z + h)}{\sinh(kh)} \sin(kx - \omega t)$$

Reflexão Total de uma Onda

Considere o problema de uma onda plana regular que incide sobre uma parede vertical em uma região de grande profundidade:



Reflexão Total de uma Onda

O problema pode ser tratado considerando-se a sobreposição da onda incidente com a onda refletida:

$$\phi(x, z, t) = \phi_I(x, z, t) + \phi_R(x, z, t)$$

$$\phi_I(x, z, t) = \frac{gA}{\omega} e^{kz} \sin(kx - \omega t)$$

A determinação de $\phi_R(x, z, t)$ deve ser feita observando-se que há uma condição de impermeabilidade a ser satisfeita na parede ($x=0$)

$$\nabla\phi(0, z, t) \cdot \bar{n} = 0 \rightarrow \nabla\phi_I(0, z, t) \cdot \bar{n} = -\nabla\phi_R(0, z, t) \cdot \bar{n}$$

Reflexão Total de uma Onda

Se escrevemos:

$$\phi_R(x, z, t) = \frac{gA}{\omega} e^{kz} \sin(kx + \omega t + \epsilon_R)$$

A onda se propagará
no sentido x negativo

Teremos, em $x=0$:

$$A_R \cos(\omega t + \epsilon_R) = -A \cos(\omega t)$$

Como a energia da onda se deve conservar ($A_R = A$):

$$\epsilon_R = (2n + 1)\pi, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Podemos escrever:

$$\phi_R(x, z, t) = \frac{gA}{\omega} e^{kz} \sin(kx + \omega t + \pi) = -\frac{gA}{\omega} e^{kz} \sin(kx + \omega t)$$

Reflexão Total de uma Onda

Resultando:

$$\phi(x, z, t) = \frac{2gA}{\omega} e^{kz} \cos(kx) \sin(\omega t)$$

Da condição dinâmica da superfície livre:

$$\zeta(x, t) = -\frac{1}{g} \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right), \quad \text{para } z = 0$$

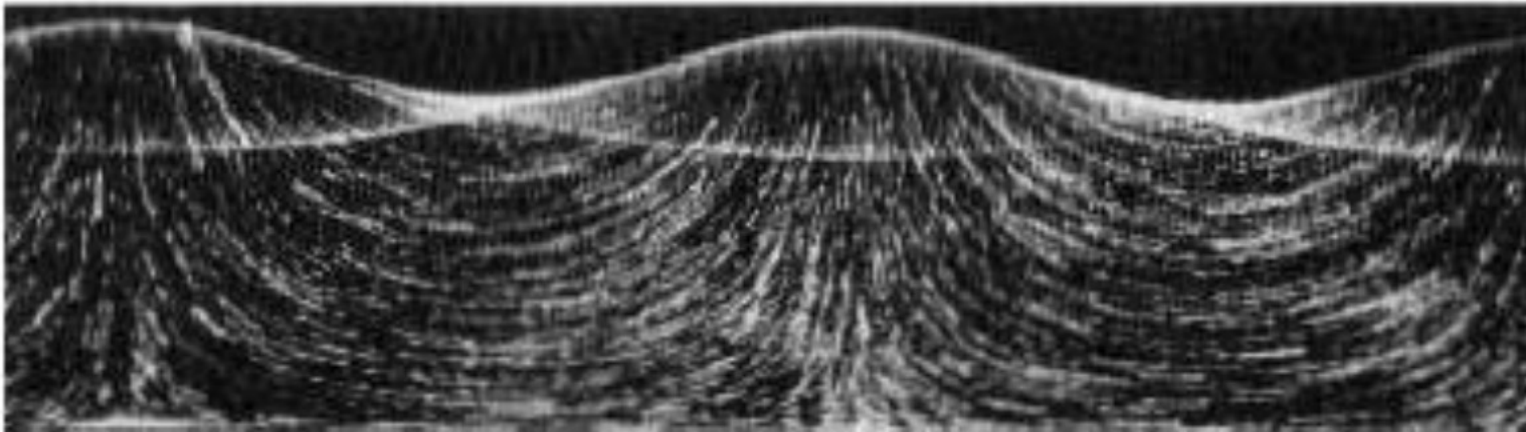
$$\zeta(x, t) = 2A \cos(kx) \sin(\omega t)$$

Onda estacionária
(standing wave)

Reflexão Total de uma Onda

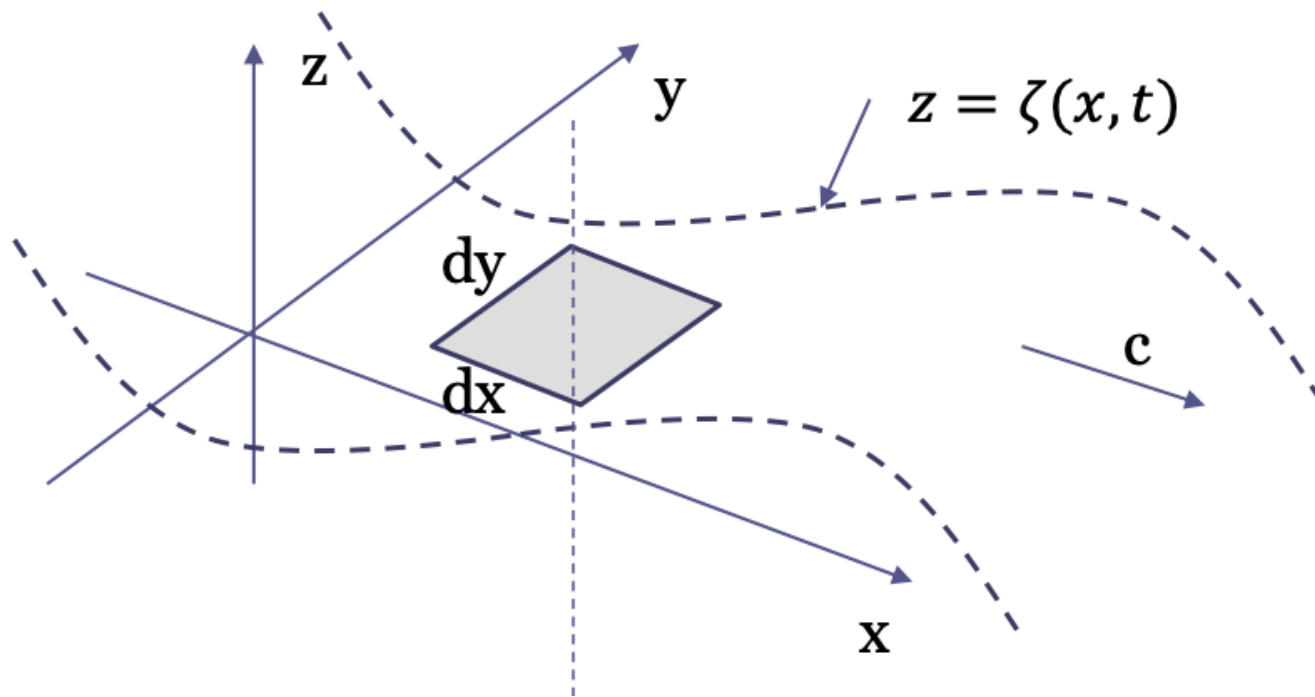
Podemos escrever, então:

$$\phi(x, z, t) = -\frac{gA}{\omega} e^{kz} \cos(kx) \sin(\omega t)$$



Energia média das ondas

A energia de ondas é composta por energia cinética e energia potencial do fluido:



$$E(t) = K(t) + P(t)$$

Energia média das ondas

Consideremos uma área elementar da superfície do mar ($dS = dxdy$) na condição de *águas profundas*

Na coluna vertical de seção elementar dS , a energia cinética será dada por:

$$K(t) = \int_{-\infty}^{\zeta(x,t)} \frac{1}{2} \rho \nabla \phi \cdot \nabla \phi dz$$

e a energia potencial será:

$$P(t) = \int_{-\infty}^{\zeta(x,t)} \rho g z dz$$

Energia média das ondas

Então:

$$E(t) = \int_{-\infty}^{\zeta(x,t)} \frac{1}{2} \rho \nabla \phi \cdot \nabla \phi dz + \int_{-\infty}^{\zeta(x,t)} \rho g z dz$$

$$\nabla \phi \cdot \nabla \phi = u^2(x, z, t) + w^2(x, z, t) = \omega^2 A^2 e^{2kz}$$

$$E(t) = \frac{1}{4} \frac{\rho \omega^2 A^2}{k} e^{2k\zeta(x,t)} + \frac{1}{2} \rho g \zeta(x, t)$$

Mas ainda,

$$e^{2k\zeta(x,t)} = 1 + 2k\zeta(x, t) + \dots$$

Energia média das ondas

E retendo apenas termos até segunda-orden:

$$E(t) = \frac{1}{4}\rho g A^2 + \frac{1}{2}\rho g A^2 \cos^2(kx - \omega t)$$

Tomaremos, então, o valor médio desta energia por ciclo de onda:

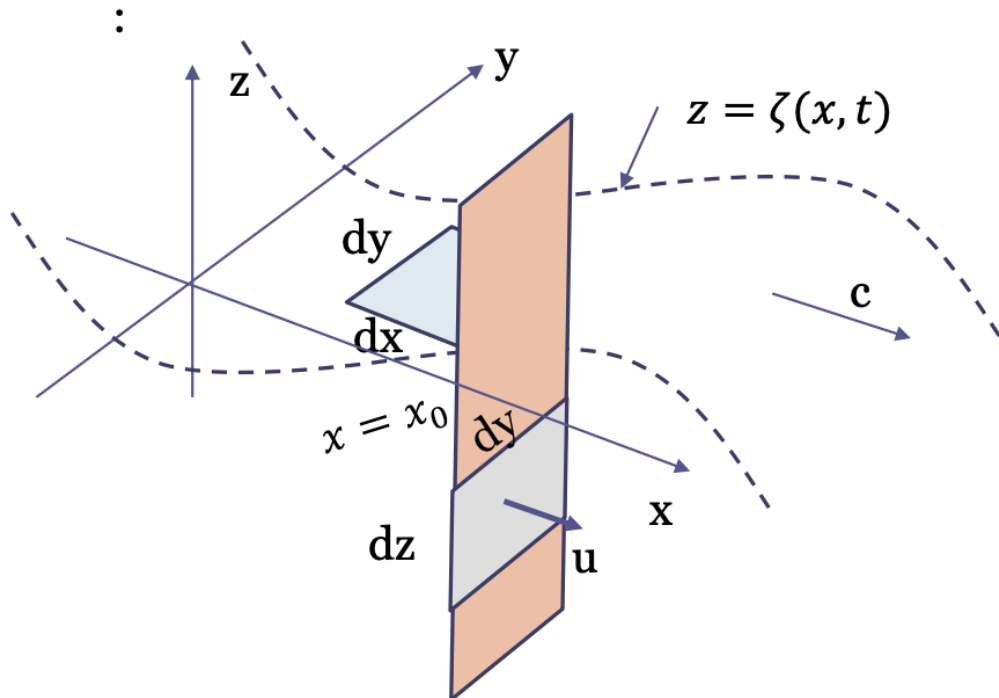
$$\bar{E} = \frac{1}{4}\rho g A^2 + \frac{1}{4}\rho g A^2 = \frac{1}{2}\rho g A^2$$

← Energia média de onda por unidade de área de superfície do mar (densidade de energia) [J/m²]

Transporte de Energia

Podemos agora avaliar com que velocidade essa energia média de onda deve ser transmitida.

Consideremos, então, qual será o fluxo de energia (potência) pela seção vertical definida abaixo, posicionada em $x = x_0$:



$$W(t) = \int_{-\infty}^{\zeta(x_0, t)} (p dz) u(x_0, z, t)$$

Potência por unidade de largura (em y) na seção
[W/m]

Transporte de Energia

Então:

$$W(t) = \int_{-\infty}^{\zeta(x_0,t)} p(x_0, z, t) u(x_0, z, t) dz$$

E, considerando águas profundas:

$$W(t) = \rho g \omega A^2 \cos^2(kx_0 - \omega t) \int_{-\infty}^{\zeta(x_0,t)} e^{2kz} dz$$

$$W(t) = \frac{1}{2} \rho g \frac{\omega}{k} A^2 \cos^2(kx_0 - \omega t)$$

Transporte de Energia

E tomando o valor médio:

$$\bar{W} = \frac{1}{4} \rho g A^2 \frac{\omega}{k} = \frac{1}{4} \rho g A^2 c$$

Observando que o fluxo médio de energia pode ser escrito na forma:

$$\bar{W} = \bar{E} \cdot C_g$$

Concluimos que:

$$C_g = \frac{c}{2} \quad \text{velocidade de grupo da onda linear em águas profundas.}$$

Para o caso mais geral de profundidade finita e constante h (mostre):

$$\bar{E} = \frac{1}{2} \rho g A^2 \quad C_g = \frac{c}{2} \left(1 + \frac{2kh}{\sinh(2kh)} \right)$$

Transporte de Energia

Exercício: Considere um conversor de energia de ondas instalado junto à costa, em uma região de profundidade $h=10\text{m}$. Calcule qual a máxima potência elétrica por metro de crista de onda que esse conversor poderia extrair quando por ele passa uma onda com amplitude $A=1\text{m}$ e período $T=10\text{s}$.

Considere: $\rho = 1025 \text{ kg/m}^3$; $g=9.8 \text{ m/s}^2$

R. 40.52 kW/m

Conceito de grupo de ondas

Consideremos duas ondas regulares com mesma amplitude (A) e frequências próximas ($\omega + \delta\omega$) e ($\omega - \delta\omega$), sendo $\frac{\delta\omega}{\omega} \ll 1$, as quais se propagam no mesmo sentido. A elevação resultante é dada por:

$$\zeta(x, t) = A \cos[(k + \delta k)x - (\omega + \delta\omega)t] + A \cos[(k - \delta k)x - (\omega - \delta\omega)t]$$

Ou:

$$\zeta(x, t) = 2A \cos(\delta kx - \delta\omega t) \cos(kx - \omega t)$$

← Modulação envoltória $\eta(x, t)$

Conceito de grupo de ondas

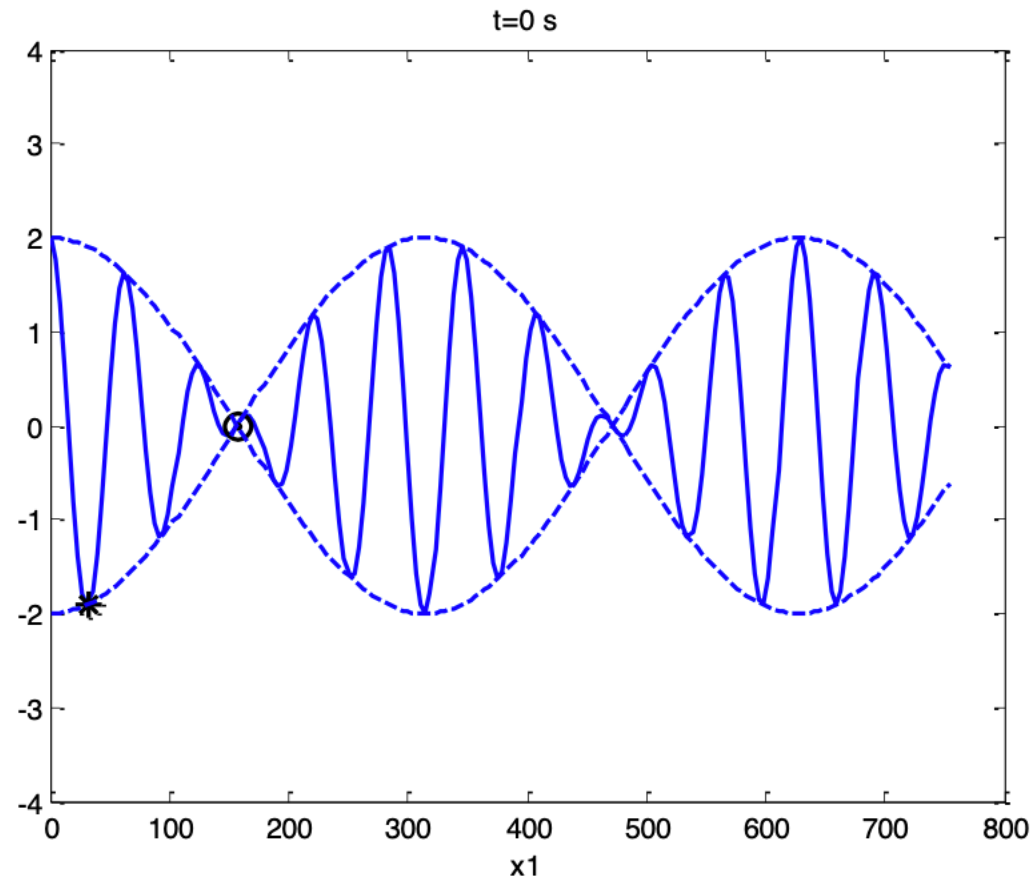
Mas, devemos perceber que a envoltória $\eta(x, t)$ também é, ela própria, uma onda *progressiva*, com:

$$\lambda_{\eta} = \frac{2\pi}{\delta k} \gg \lambda$$

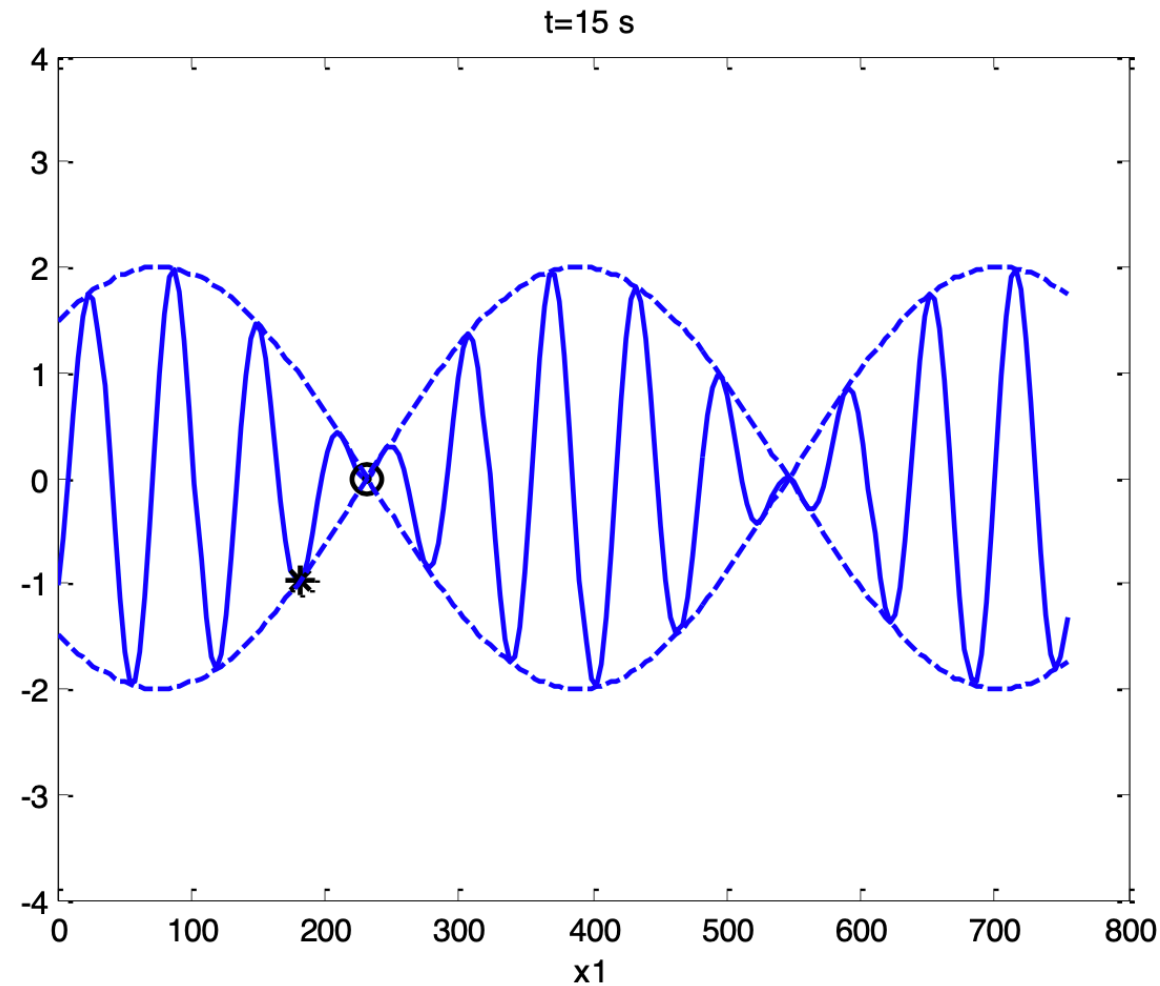
$$c_{\eta} = \frac{\delta \omega}{\delta k}$$

O processo de propagação dessa onda pode, então, ser ilustrado visualmente através das figuras a seguir (exemplo considerando $A=1\text{m}$; $\omega=1.0\text{rad/s}$; $\delta\omega/\omega = 1/20$) :

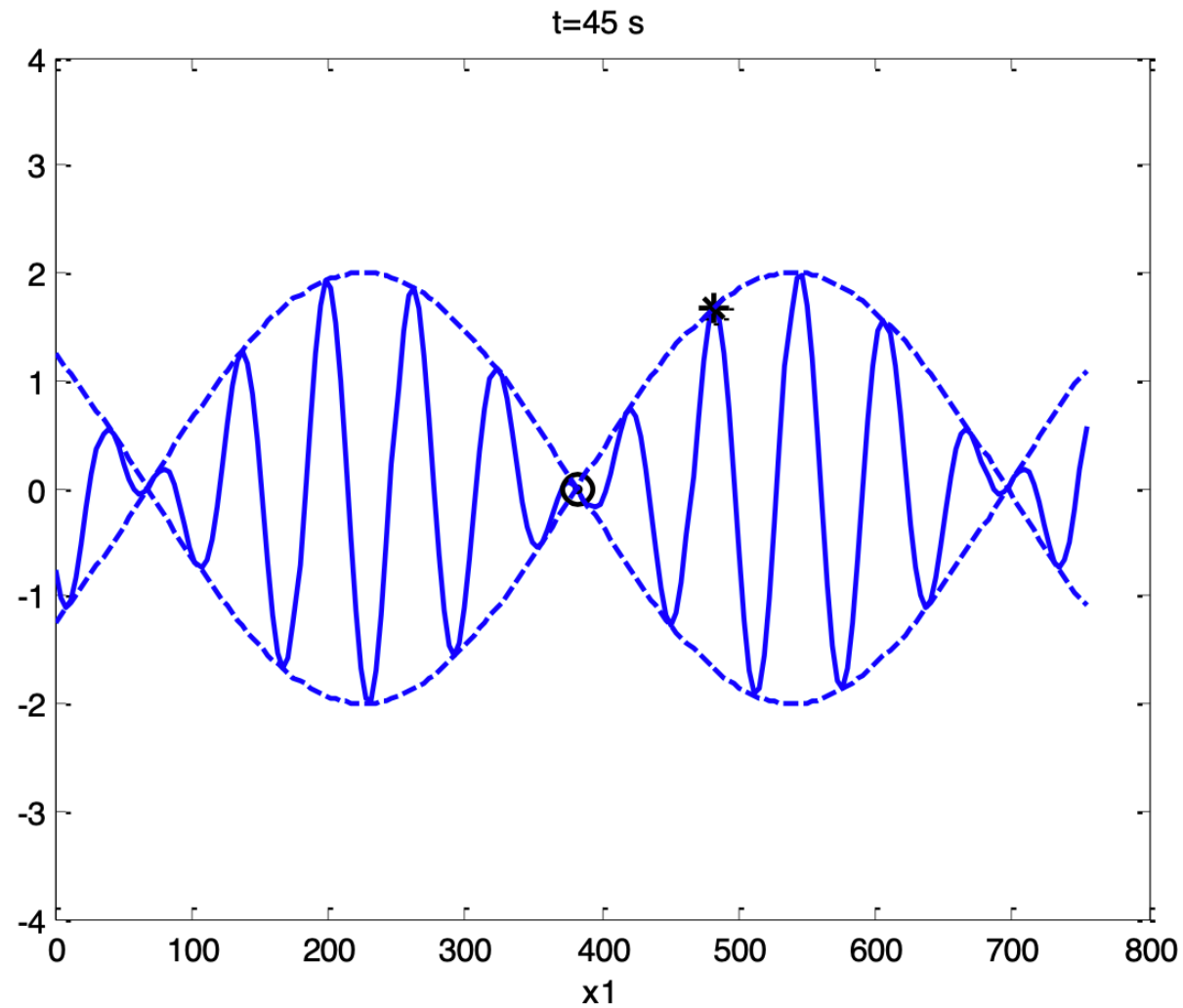
Conceito de grupo de ondas



Conceito de grupo de ondas



Conceito de grupo de ondas



Conceito de grupo de ondas

No caso em que $\delta\omega \rightarrow 0$ ($\delta k \rightarrow 0$), recuperamos a situação de uma onda regular, e então:

$$\lambda_\eta \rightarrow \infty$$

$$c_\eta = \frac{\partial\omega}{\partial k} = c_G$$

No caso de águas profundas:

$$k = \frac{\omega^2}{g} \rightarrow \frac{\partial\omega}{\partial k} = \frac{c}{2}$$

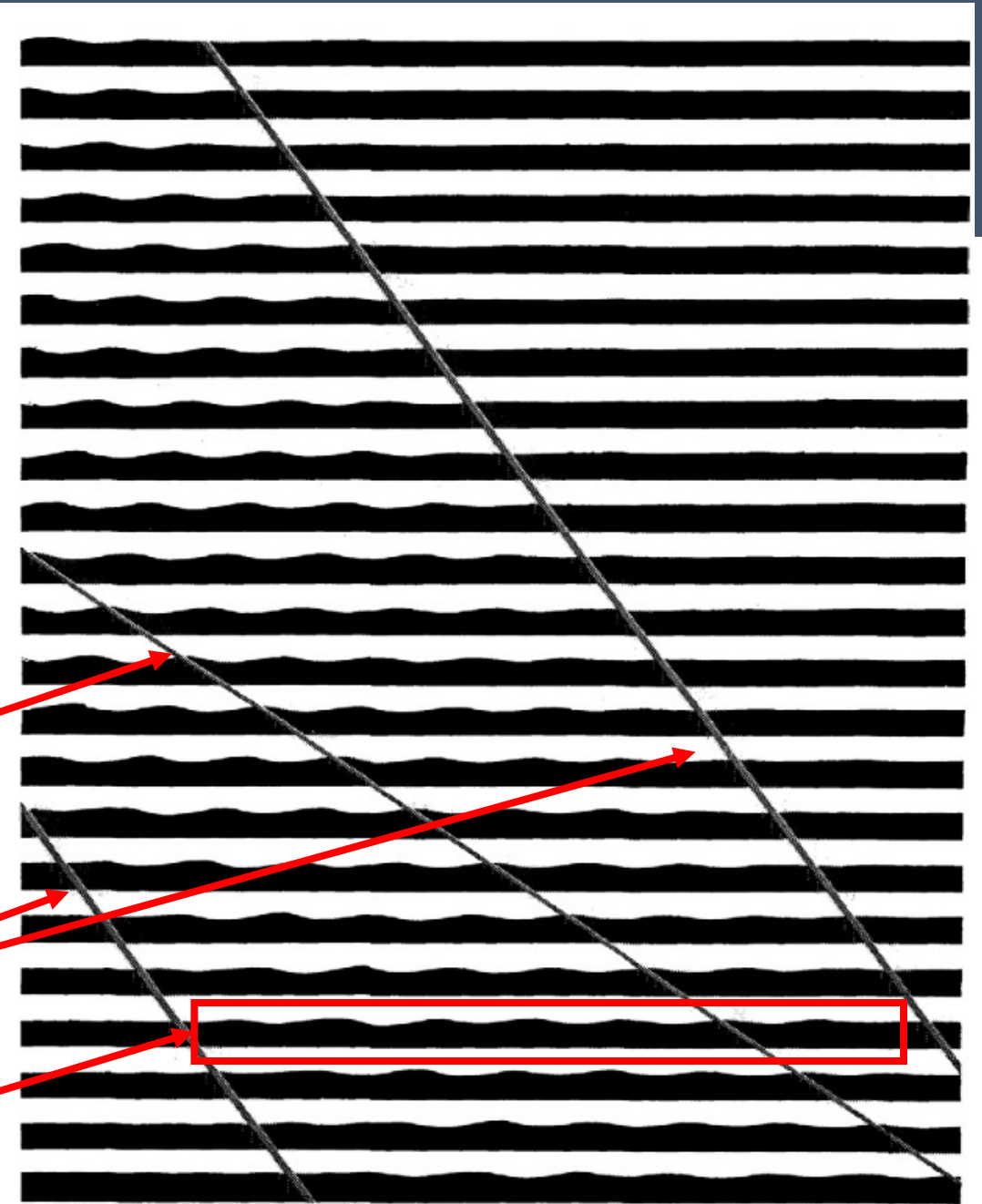
Conceito de grupo de ondas

O processo da evolução do grupo de ondas pode ser facilmente identificado em um canal de ondas, onde a frente e o final do grupo são *observáveis*:

Velocidade de fase

Velocidade de grupo

Grupo de ondas



fonte: Newman, J.N., Marine Hydrodynamics (1977)