MAT0225 - Funções Analíticas

Lista 2

1º Semestre de 2023

(1) Dado $z = x + yi$, escreva cada função $f(z)$ abaixo na forma $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$:

(a) $f(z) = |z|$; (b) $f(z) = \overline{z}$; (c) $f(z) = \sqrt{z}$;
(d) $f(z) = e^z$; (e) $f(z) = z^2 - 2z + 7$; (f) $f(z) = z^3 + z + 1$;
(g) $f(z) = \dfrac{4z - 5i}{z + 2i}$; (h) $f(z) = z + \dfrac{1}{z}$; (i) $f(z) = \left|z^2\right| - \overline{z^2 + i}$.

(2) A definição de limite nos diz que, se Ω for um aberto de $\mathbb{C}$, $z_0 \in \Omega$ e $f\colon \Omega \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ for uma função, dizemos que $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = w$, se: para todo $\varepsilon > 0$ existir um $\delta > 0$ tal que

$$\forall z \in \Omega, 0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - w| < \varepsilon.$$

Se $f(z) = u(z) + iv(z)$, e $w = a + bi$, mostre que

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w \Leftrightarrow \lim_{z \to z_0} u(z) = a \text{ e } \lim_{z \to z_0} v(z) = b$$

(3) Calcule, caso existam, os seguintes limites, justificando sua resposta:

(a) $\lim\limits_{z \to 0} \dfrac{z^2 - 2}{z + i}$ (b) $\lim\limits_{z \to 1+i} \dfrac{z + i}{z^2 + 2}$ (c) $\lim\limits_{z \to 0} \dfrac{z}{|z|}$ (d) $\lim\limits_{z \to i} \dfrac{iz^3 + 1}{z - i}$
(e) $\lim\limits_{z \to -2i} \dfrac{z^3 - 81}{z + 2i}$ (f) $\lim\limits_{z \to 0} \dfrac{e^z - e^{\overline{z}}}{\operatorname{Im}(z)}$

(4) Seja $f(z) = \dfrac{2z^2 - 3iz + 2}{z - 2i}$.

(a) Calcule $\lim\limits_{z \to 2i} f(z)$.

(b) Usando a definição, mostre que $\lim\limits_{z \to 2i} f(z) = 5i$.

(5) Mostre que o limite $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\overline{h}}{h}$ não existe. Prove que, dado $\omega \in S^1$, temos

$$\lim_{h \to 0} \frac{\overline{h}}{h} = \omega$$

se o limite for feito por um caminho retilíneo adequado.

(6) Mostre que as funções abaixo são contínuas nos pontos especificados:

(a) $f(z) = z^2 - iz + 3 - 2i$ e $z_0 = 2 - i$;

(b) $f(z) = \dfrac{z^3}{z^3 + 3z^2 + z}$ e $z_0 = i$;

(c) $f(z) = \dfrac{z - 3i}{z^2 + 2z - i}$ e $z_0 = 1 + i$;

(d) $f(z) = \begin{cases} \dfrac{z^3 - 1}{z - 1}, \text{ se} |z| \neq 1, \\ 3, \text{ se } |z| = 1 \end{cases}$ e $z_0 = 1$;

(e) $f(z) = \begin{cases} \dfrac{z^3 - 1}{z^2 + z + 1}, \text{ se} |z| \neq 1, \\ \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \text{se } |z| = 1 \end{cases}$ e $z_0 = \dfrac{1 + i\sqrt{3}}{2}$.

(7) Seja $f\colon \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uma função e $z_0 \in \Omega$, com Ω aberto em $\mathbb{C}$. Se f for holomorfa em z_0,, mostre que f é contínua em z_0. Se g estiver definida em Ω e for holomorfa em z_0, mostre que $(f + g)$ será holomorfa em z_0 e

$$(f + g)'(z_0) = f'(z_0) + g'(z_0).$$

(8) Sejam $f, g\colon \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ funções holomorfas em $z_0 \in \Omega$ (com Ω aberto). Prove que a função produto $f(z)g(z)$ será holomorfa em z_0 e vale a regra de Leibniz:

$$(fg)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0)$$

(9) Sejam Ω um aberto de $\mathbb{C}$, $z_0 \in \Omega$ e $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ uma função holomorfa em z_0 com $f(z_0) \neq 0$. Prove que a função $\frac{1}{f(z)}$ está definida numa vizinhança aberta de z_0 e é holomorfa em z_0, com:

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(z_0) = -\frac{f'(z_0)}{(f(z_0))^2}$$

(10) Determine onde $f'(z)$ existe e calcule seu valor quando

(a) $f(z) = z^3 - (4 + 3i)z - 5i$;

(b) $f(z) = \dfrac{3\bar{z}}{z^2 + 3i}$;

(c) $f(z) = z^3 e^{iz}$;

(d) $f(z) = \dfrac{1}{z}$;

(e) $f(z) = x^2 + iy^2$;

(f) $f(z) = z\mathrm{Im}(z)$;

(g) $f(z) = (x^2 - y^2 - y) + i(x + 2xy)$.

(11) Dado $z = x + yi$, verifique, em cada caso, se são satisfeitas as equações de Cauchy-Riemann. Se sim, apresente um domínio apropriado.

(a) $f(z) = \bar{z}$

(b) $g(z) = y + ix$

(c) $h(z) = |z|^2$

(d) $k(z) = e^y(\cos x + i\mathrm{sen} y)$;

(e) $f(z) = \dfrac{x - 1}{(x-1)^2 + y^2} - i\dfrac{y}{(x-1)^2 + y^2}$

(12) Mostre que as funções $f(z) = \dfrac{x}{x^2 + y^2} + i\dfrac{y}{x^2 + y^2}$ e $g(z) = \dfrac{i}{z^2}$ são analíticas para todo $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

(13) Mostre que a funções $f(z)=\dfrac{x}{x^2+y^2}-i\dfrac{y}{x^2+y^2}$,$g(z)=|z|^2$ e $h(z)=e^{\bar{z}}$ não são analíticas em nenhum ponto do plano complexo.

(14) Seja Ω um aberto conexo de $\mathbb{C}$ e $g\in\mathcal{H}(\Omega)$ (o conjunto das funções analíticas em Ω) com $g'(z)=0$ para todo $z\in\Omega$. Mostre que g é uma função constante. Suponhamos que $f(z)$ seja uma função holomorfa em Ω, satisfazendo:

(1) f', f'' e f''' existem em Ω;

(2) $f'''(z)=0$ para todo $z\in\Omega$.

Mostre que $f(z)$ é um polinômio de grau ≤ 2 na variável z..

(15) Sejam $u(x,y), v(x,y)\in\mathbb{R}[x,y]$ (ou seja, dois polinômios nas variáveis x e y com coeficientes reais). Suponhamos que u e v satisfaçam as equações de Cauchy-Riemann, isto é: $u_x=v_y$ e $u_y=-v_x$, em todo ponto de $\mathbb{C}$. Será que $f(x+iy):=u(x,y)+iv(x,y)$ é um polinômio na variável $z=x+iy$, com coeficientes complexos?

(16) Sejam Ω um aberto conexo de $\mathbb{C}$.

(a) Se $f\in\mathcal{H}(\Omega)$ é tal que $f(\Omega)\subset\mathbb{R}$, mostre que f é constante.

(b) Mostre que $g\in\mathcal{H}(\Omega)$ tal que $g(\Omega)\subset i\mathbb{R}$ é constante.

(c) Se $h\in\mathcal{H}(\Omega)$ tal que $h(\Omega)\subset\{x+ix : x\in\mathbb{R}\}$, mostre que h é constante.

(d) Sejam ℓ uma reta qualquer de $\mathbb{C}$ e $f\in\mathcal{H}(\Omega)$ tal que $f(\Omega)\subset\ell$. Mostre que f é constante.

(e) Sejam $\ell_1,\ell_2,\ldots,\ell_m$ retas quaisquer de $\mathbb{C}$ e $f\in\mathcal{H}(\Omega)$ tal que $f(\Omega)\subset\ell_1\cup\ell_2\cup\ldots\cup\ell_m$. Mostre que f é constante.

(17) Seja $f\in\mathcal{H}(\mathbb{C})$ tal que $|f(z)|=10$ para todo $z\in\mathbb{C}$. Mostre que $f(z)$ tem que ser constante em $\mathbb{C}$.

(18) Sejam Ω um aberto conexo de $\mathbb{C}$ e $h\in\mathcal{H}(\Omega)$ uma função tal que $(h(z))^2=\overline{h(z)}$ para todo $z\in\Omega$. Encontre essas $h(z)$'s.

(19) Encontre todas as funções $f(z)$ holomorfas num aberto conexo Ω de $\mathcal{C}$ que satisfazem a seguinte propriedade: para todo $z_0\in\Omega$, ou $f(z_0)=0$ ou $f'(z_0)=0$.

(20) Sejam Ω um aberto conexo de $\mathbb{C}$ e $f(z)\in\mathcal{H}(\Omega)$. Suponhamos que $g(z)=\overline{f(z)}$ também seja holomorfa em Ω. Mostre que f tem que ser constante.

(21) Encontre todos os valores de $z\in\mathbb{C}$ tais que

(a) $e^z=1+i\sqrt{3}$ (b) $e^z=1+i$ (c) $e^{2z+1}=1$

(d) $e^{e^z}=1$

(22) Considere a função $f(z)=e^z$. Desenhe a imagem, sob $f(z)$,

(a) das retas verticais $x=c$ e das retas horizontais $y=d$.

(b) dos lados do triângulo de vértices 0, 1 e $1+i$.

(c) dos lados do quadrado de vértices $1+i, -1-i, 1-i$ e $-1+i$.

(d) da circunferência de raio 2 centrada na origem.