EXERCÍCIOS DA LISTA 4

1. V é soma direta de subespaços U e W se (a) $V = U + W$, (b) $U \cap W = \{0\}$.
Mostrar que $V = U \oplus W$ se, e somente se, todo vetor $v \in V$ se escreve de modo único como $v = u + w$, onde $u \in U$ e $w \in W$.

($\Longrightarrow$) Suponha (a) e (b).

Seja $v \in V$. Por (a), existem $u \in U$ e $w \in U$ tais que $v = u + w$.
Vamos mostrar então que essa maneira de escrever v como soma de um vetor que está em U e um que está em W é única.
Suponha que $v = u + w = u_1 + w_1$, $u, u_1 \in U$ e $w, w_1 \in W$.

Então $\underbrace{u - u_1}_{\in U} = \underbrace{w_1 - w}_{\in W}$. Como $\underset{U}{\underset{\Uparrow}{u - u_1}} = \underset{W}{\underset{\Uparrow}{w - w_1}}$,
temos que $u - u_1 = w_1 - w_1 \in U \cap W = \{0\}$ por (b).
Logo $u = u_1$ e $w = w_1$.

($\Longleftarrow$) Agora vamos supor que todo vetor de V se escreve de modo único como soma de um vetor de U com um de W.

Seja $v \in V$. Como v se escreve como soma de um vetor de U e em de W
$v = u + w \Rightarrow v \in U + W$. Logo $V \subset U + W$.
Como $U + W \subset V$, $U + W = V$.

Logo vale (a), $V = U + W$.

Mostrar que $U \cap W = \{0\}$

Seja $v \in U \cap W \Rightarrow v \in U$ e $v \in W$. Então

$$\underset{U}{v} = \underset{U}{v} + \underset{W}{0} = \underset{U}{0} + \underset{W}{v}$$, a unicidade garante que $v = 0$.

Logo, vale (b). ■

2. $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = V$

$U = \{ f \in V$ tal que f é par $\}$

$W = \{ f \in V$ tal que f é ímpar $\}$

(a) Mostrar que U é subespaço de V.

(1) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad g(x) = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$

$g(x) = 0 = g(-x)$. Logo $g \in U$.

(2) Suponha que $f, g \in U$.

Então $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(-x)$

$g(x) = g(-x)$.

Assim, para todo $x \in \mathbb{R}$

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = f(-x) + g(-x)$$
$$= (f+g)(-x).$$

Logo $f + g \in U$.

(3) Se $a \in \mathbb{R}$ e $f \in U$, então

$$(af)(x) = af(x) = af(-x) = (af)(-x).$$

$\forall x \in \mathbb{R}$.

Logo $af \in U$.

Analogamente, prove que W é subespaço de V.

(b) Mostrar que $V = U \oplus W$

Seja $f \in V$.

Sejam $g \in V$ definida por $\in U$

$$g(x) = \frac{1}{2}\big(f(x) + f(-x)\big)$$ veja que g é par

e $$h(x) = \frac{1}{2}\big(f(x) - f(-x)\big)$$ veja que h é ímpar $\in W$

(1) $f = g + h$

$$(g+h)(x) = g(x) + h(x) =$$

$$\frac{1}{2}f(x) + \cancel{\frac{1}{2}f(-x)} + \frac{1}{2}f(x) \cancel{- \frac{1}{2}f(-x)}$$

$$= f(x).$$

Assim $g + h = f$ e $V = U + W$,

(2) Agora, mostrar que $U \cap W = \{0\}$

Seja $f \in U \cap W$.

Então $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = f(x)$ e

$f(-x) = -f(x)$

Então $2f(x) = f(-x) - f(-x) = 0$

$\Rightarrow f(x) = 0 \ \forall x$, ou

seja f é a função nula.

Logo $V = U \oplus W$. ■

3. (a)

$$W_1 \cap (W_2 + W_3) = W_1 \cap W_2 + W_1 \cap W_3$$

Note que sempre $W_1 \cap W_2 + W_1 \cap W_3 \subset W_1 \cap (W_2 + W_3)$

Se $v \in W_1 \cap W_2 + W_1 \cap W_3 \Rightarrow v = u + w$,

onde $u \in W_1 \cap W_2$ e $w \in W_1 \cap W_3$

Logo $u, w \in W_1 \underset{W_1 \text{ é subespaço}}{\Rightarrow} u + w \in W_1$ (*)

Mas $u \in W_2$ e $w \in W_3$. Então

$u + w \in W_2 + W_3$ (*)

Logo $v = u + w \in W_1 \cap (W_2 + W_3)$.

Entretanto não vale em geral que

$$W_1 \cap (W_2 + W_3) \subset W_1 \cap W_2 + W_1 \cap W_3$$

Considere em $\mathbb{R}^3$ os subespaços:

$W_1 = [(1, 1, 0)] = [(e_1 + e_2)]$

$W_2 = [e_1, e_3]$ e $W_3 = [e_2, e_3]$

$W_2 + W_3 = \mathbb{R}^3$

$W_1 \cap (W_2 + W_3) = W_1$

$e_1 = (1, 0, 0)$ $e_2 = (0, 1, 0)$
$e_3 = (0, 0, 1)$

Prove que: $W_1 \cap W_2 = \{0\}$ e $W_1 \cap W_3 = \{0\}$

Suponha que $v \in W_1 \cap W_2$

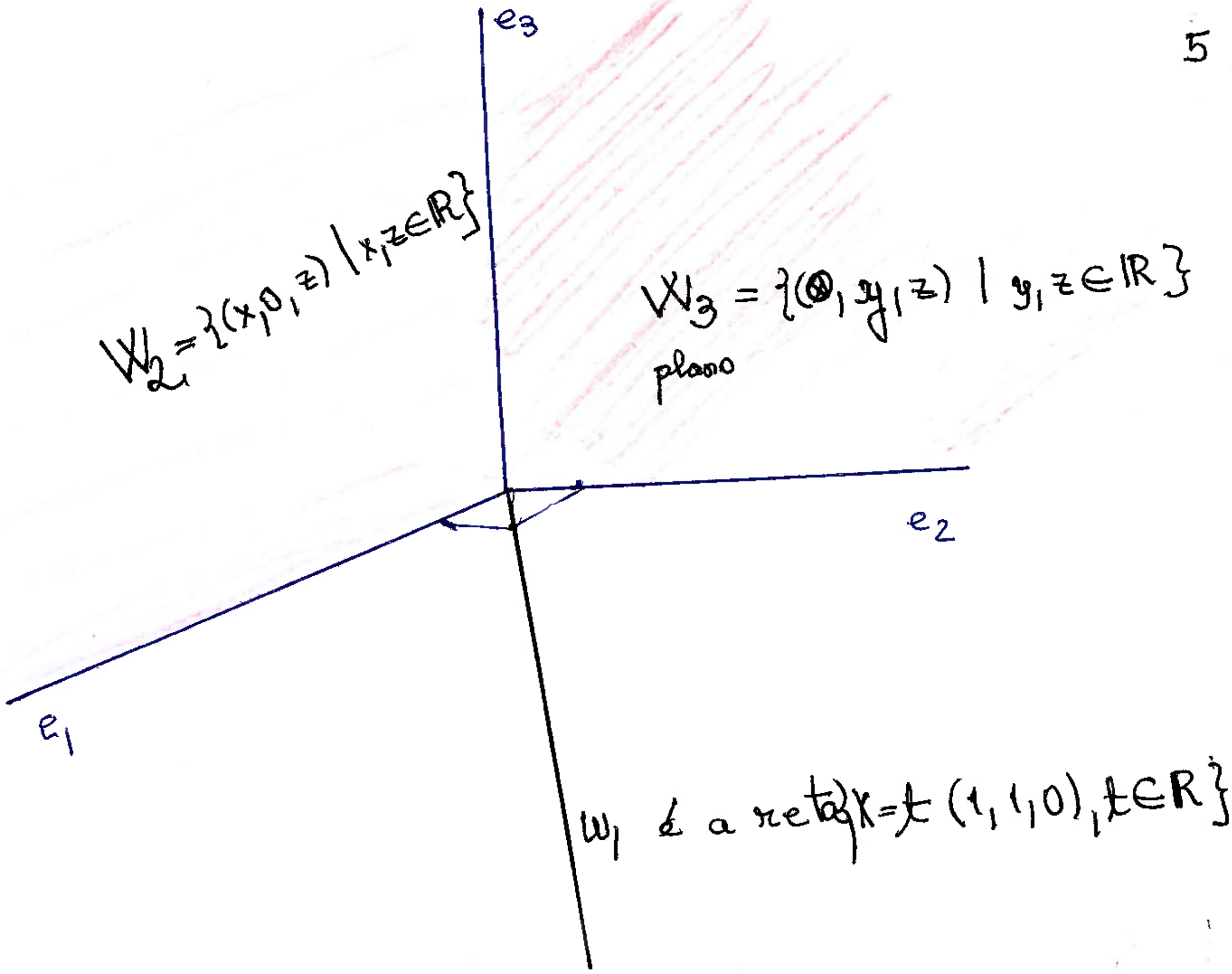
$v = a(e_1 + e_2) = b e_1 + c e_3$

$v = (a, a, 0) = (b, 0, c) \Rightarrow a = b$, $a = 0$ e $c = 0$.

Logo $W_1 \cap W_2 = \{0\}$

Analogamente,
$v \in W_1 \cap W_3$:
$v = (a, a, 0) + (0, b, c)$
$\Rightarrow a = 0$, $b = a$ e $c = 0$

Logo $W_1 \cap W_3 = \{0\}$



Se $v \in W_1 \cap W_2$

$v = (t,t,0)$, pois $v \in W_1$

$v = (x,0,z)$, pois $v \in W_2$

Logo $t = x$ $\quad t = 0$ e $z = 0$

Logo $v = (0,0,0)$

Assim $W_1 \cap W_2 = \{0\}$.

Se $v \in W_1 \cap W_3$

$\left.\begin{array}{l} v = (t,t,0) \\ v = (0,y,z) \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} t = 0 \\ t = y \\ z = 0 \end{array}$ $\quad$ Logo $v = (0,0,0)$

Assim, $W_1 \cap W_3 = W_1 \cap W_2 = \{(0,0,0)\}$

e $W_1 \cap W_3 \cup W_1 \cap W_2 = \{(0,0,0)\}$

Provar que $W_2 + W_3 = \mathbb{R}^3$

$v \in \mathbb{R}^3$ $\quad v = (x,y,z) = \underset{\substack{\cap \\ W_2}}{(x,0,z)} + \underset{\substack{\cap \\ W_3}}{(0,y,0)}$