MAT6682 - Tópicos de Análise Funcional - 2023
Lista 5

1. Bases de Schauder

1. Sejam X um espaço de Banach, $(x_n)_{n\geq 1}$ uma base de Schauder de X e Y um subespaço fechado de dimensão infinita de X. Dado $m \geq 1$, mostre que existe $y \in Y$ tal que $\|y\| = 1$ e $y \in \overline{\text{span}}\{x_n : n \geq m\}$.

2. Sejam X um espaço de Banach *complexo* e X_r o espaço de Banach *real* obtido através da restrição da multiplicação por escalar a $\mathbb{R} \times X$. Mostre que uma sequência $(x_n)_{n\geq 1}$ em X é uma base de Schauder de X se, e somente se, a sequência $(x_1, ix_1, x_2, ix_2, \ldots, x_n, ix_n, \ldots)$ é uma base de Schauder de X_r.

3. Mostre diretamente que a base canônica de ℓ_1 não é contrátil e que a base canônica de c_0 não é limitadamente completa.

4. A *base somante* de c_0 é a sequência $(x_n)_{n\geq 1}$ definida por $x_n = \sum_{i=1}^{n} e_i$.

a) Mostre que $(x_n)_{n\geq 1}$ é base de Schauder de c_0.

b) Mostre diretamente que $(x_n)_{n\geq 1}$ não é contrátil nem limitadamente completa.

5. Sejam X um espaço de Banach, $(x_n)_{n\geq 1}$ uma base de Schauder de X e $(P_n)_{n\geq 1}$ a sequência de projeções canônicas de $(x_n)_{n\geq 1}$.

a) Mostre que $(P_n)_{n\geq 1}$ converge para a identidade uniformemente sobre os compactos de X, isto é, dados K um subconjunto compacto de X e $\varepsilon > 0$, existe $N \geq 1$ tal que $\|P_n(x) - x\| < \varepsilon$ para todos $x \in K$ e $n \geq N$.

b) Mostre que $(x_n)_{n\geq 1}$ é contrátil se, e somente se, $(P_n)_{n\geq 1}$ converge fracamente para a identidade uniformemente sobre os limitados de X, isto é, dados A um subconjunto limitado de X, $x^* \in X^*$ e $\varepsilon > 0$, existe $N \geq 1$ tal que $|x^*(P_n(x) - x)| < \varepsilon$ para todos $x \in A$ e $n \geq N$.

6. Dados X um espaço de Banach e $(x_n)_{n\geq 1}$ uma base de Schauder de X, considere o espaço vetorial

$$Y = \left\{(\alpha_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \sup_{m\geq 1} \left\| \sum_{n=1}^{m} \alpha_n x_n \right\| < +\infty \right\}$$

e a função $\|\cdot\|_Y : Y \to [0, +\infty)$ dada por $\|(\alpha_n)_n\|_Y = \sup_{m\geq 1} \left\| \sum_{n=1}^{m} \alpha_n x_n \right\|$. Prove as seguintes afirmações:

a) $\|\cdot\|_Y$ é uma norma completa em Y.

b) $T : X^{**} \to Y$ dado por $T(x^{**}) = (x^{**}(x_n^*))_{n\geq 1}$ é um operador linear contínuo bem definido.

c) $T \circ J_X$ é um isomorfismo de X sobre $Z = \left\{(\alpha_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n \text{ converge em } X\right\}$.

d) $(x_n)_{n\geq 1}$ é contrátil se, e somente se, T é isomorfismo de X^{**} sobre Y.

7. Sejam X um espaço de Banach e $(x_n)_{n\geq 1}$ uma base de Schauder limitadamente completa de X.

a) Mostre que a série $\sum_{n=1}^{\infty} x^{**}(x_n^*) x_n$ é convergente em X para todo $x^{**} \in X^{**}$.

b) Mostre que o operador linear $P : X^{**} \to X^{**}$ dado por $P(x^{**}) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{**}(x_n^*) J_X(x_n)$ é uma projeção contínua tal que $\text{Ker}(P) = Y^{\perp}$, onde $Y = \overline{\text{span}}\{x_n^* : n \geq 1\}$.

8. (Teorema de James) Dado X um espaço de Banach com base de Schauder, mostre que as seguintes afirmações são equivalentes:

a) X é reflexivo.

b) Toda base de Schauder de X é contrátil e limitadamente completa.

c) Existe uma base de Schauder de X contrátil e limitadamente completa.