A integral de x^2 e outras coisas

Preparado durante
a greve (28/09/23)

A INTEGRAL DE x^2 E OUTRAS COISAS

A integral de x^2 vai demorar um pouco para aparecer. Vamos começar com "outras coisas".

Provamos, usando indução, que, para todo natural $n \in \mathbb{N}$, valem as duas desigualdades:

$$1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2 < \frac{n^3}{3} < 1^2+2^2+\cdots+n^2 \qquad (*)$$

que, usando o símbolo Σ de somatório, é o mesmo que

$$\sum_{k=1}^{n-1} k^2 < \frac{n^3}{3} < \sum_{k=1}^{n} k^2 .$$

Dividindo por n^3, obtemos

$$\frac{\left(\sum_{k=1}^{n-1} k^2\right)}{n^3} < \frac{1}{3} < \frac{\left(\sum_{k=1}^{n} k^2\right)}{n^3} . \qquad (**)$$

No endereço abaixo você encontra uma página onde é possível calcular a primeira e a terceira expressões acima para n variando entre 2 e 100 (lá n é N).

https://www.desmos.com/calculator/2kgehkjwsa

Mexa no botão e veja o que acontece com os valores.

Denotemos

$$\alpha_n = \frac{\left(\sum_{k=1}^{n} k^2\right)}{n^3} \quad \text{e} \quad \beta_n = \frac{\left(\sum_{k=1}^{n-1} k^2\right)}{n^3}$$

de modo que as desigualdades (**) são

$$\beta_n < 1/3 < \alpha_n \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (**)$$

Se $A = \{\alpha_n : n \in \mathbb{N}\}$ e $B = \{\beta_n : n \in \mathbb{N}\}$, as desigualdades acima mostram que A é limitado inferiormente e B é limitado superiormente. Pelo Axioma de Completude, concluímos que existem o ínfimo de A, denotado por α, e o supremo de B:

$$\alpha = \inf A \quad \text{e} \quad \beta = \sup B.$$

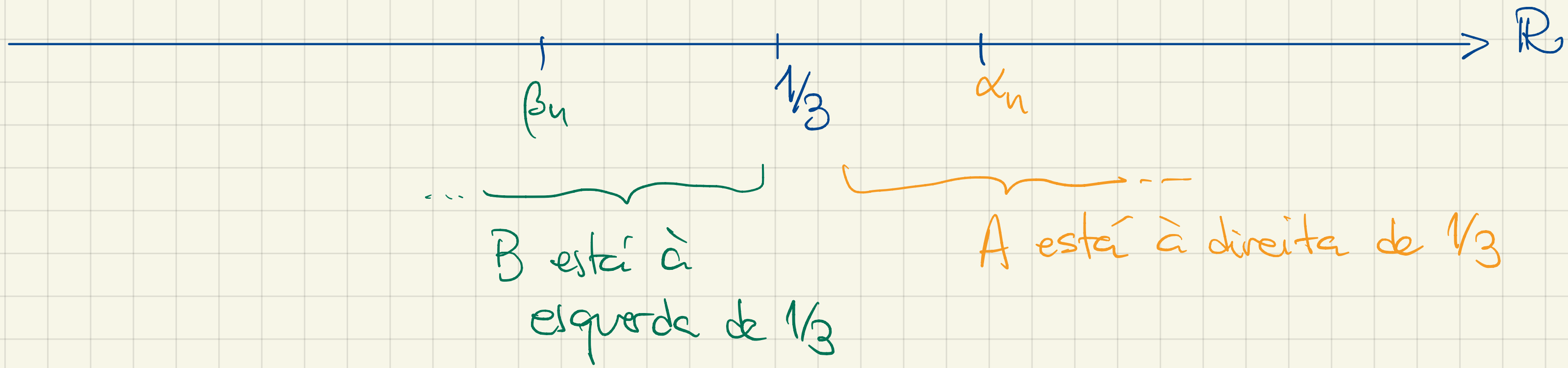
Segue de (**) que

$$\beta \leq 1/3 \leq \alpha. \quad (***)$$

Isso implica, em particular, que $\alpha - \beta \geq 0$.

Obs: Como todos os elementos do conjunto B são menores que $1/3$, seu supremo não pode ser maior que $1/3$, mas pode, muito bem, ser igual a $1/3$. Uma observação análoga vale para A.

Na reta real, podemos desenhar os conjuntos da seguinte forma:



Assim, temos as seguintes desigualdades:

$$\beta_n \le \sup B = \beta \le 1/3 \le \inf A = \alpha \le \alpha_n .$$

Delas segue que

$$0 \le \alpha - \beta \le \alpha_n - \beta_n \,{}^{(*)} \qquad (\star)$$

e isso vale $\forall n \in \mathbb{N}$.

(*) <u>Exercício</u>: Se $s \le b \le a \le r$, então $0 \le a-b \le r-s$.

Mas vejamos o que acontece com a diferença $\alpha_n - \beta_n$:

$$\alpha_n - \beta_n = \frac{1}{n^3}\left(\sum_1^n k^2 - \sum_1^{n-1} k^2\right)$$

$$= \frac{1}{n^3} \cdot n^2 = \frac{1}{n}.$$

De (⋆) segue então que

$$0 \leq \alpha - \beta \leq \alpha_n - \beta_n = 1/n$$

e isso vale para todo $n \in \mathbb{N}$. Mas $\alpha - \beta$ é um número real: qual é o único número real que é, ao mesmo tempo, ≥ 0 e $\leq 1/n$, para todo $n \in \mathbb{N}$? A resposta é 0, isto é,

$$\alpha - \beta = 0 \iff \alpha = \beta$$

e, usando (∗∗∗) novamente, concluímos que

$$\alpha = \beta = 1/3.$$

Se você olhou para a página do Desmos que recomendei, ou se fez você mesmo experimentos numéricos para calcular valores de α_n e β_n, deve ter notado que dizer apenas que $\sup\{\beta_n\} = \inf\{\alpha_n\} = 1/3$, embora verdade, é menos do que toda a verdade. Olhando os pontos na tela ao variarmos n, fica bem claro que a sequência β_n é crescente, isto é

$$\beta_1 < \beta_2 < \beta_3 < \cdots < \beta_n < \beta_{n+1} < \cdots$$

e, analogamente, a sequência α_n é decrescente, isto é,

$$\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 > \cdots > \alpha_n > \alpha_{n+1} > \cdots$$

Exercício: Prove, usando indução (por exemplo), que

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1).$$

$$\boxed{\alpha_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}}$$

Vamos usar o exercício para provar que α_n é decrescente.

$$\alpha_n = \left(\sum_1^n k^2\right)\Big/ n^3 = \left(\frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)\right)\Big/ n^3 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}$$

Portanto

$$\alpha_n - \alpha_{n+1} = \underbrace{\left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2(n+1)}\right)}_{>0} + \underbrace{\left(\frac{1}{6n^2} - \frac{1}{6(n+1)^2}\right)}_{>0} > 0$$

isto é,

$$\alpha_n > \alpha_{n+1}$$

e isso vale para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

<u>Exercício</u>: Prove que $\beta_n < \beta_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

LIMITES DE SEQUÊNCIAS NUMÉRICAS

O que vimos fazendo acima é parte de uma história interessante por si só: sequências numéricas e limites. Vamos antes falar um pouco desses assuntos antes de voltar a áreas e integrais (que aparece no título).

Uma <u>sequência numérica</u> é uma ..., bem, uma sequência de números:

$$a_1, a_2, a_3, \ldots \in \mathbb{R}.$$

Exemplos: (i) A sequência de números naturais: $1, 2, 3, \dots$

(ii) Os números ímpares: $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $a_3 = 5$, $\dots$, $a_n = 2n-1$, $\dots$

(iii) A sequência de inversos dos naturais: $a_n = 1/n$, $n \in \mathbb{N}$.

(iv) As sequências α_n e β_n que vimos anteriormente:

$$\alpha_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}, \qquad \beta_n = ? \quad (\text{Exercício})$$

(v) A sequência de somas

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k^2$$

$\boxed{\textbf{LIMITES}}$ Dizemos que uma sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para um número $a \in \mathbb{R}$, denotado por

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \qquad \text{ou} \qquad a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a,$$

se $\boxed{\text{para todo } \varepsilon > 0, \text{ existe } N \in \mathbb{N}, \text{ tal que, para todo } n \geq N, \quad |a_n - a| < \varepsilon.}$

Em português, isso quer dizer o seguinte: a_n converge para a se para qualquer distância $\varepsilon > 0$, por menor que seja, é sempre possível encontrar um momento N a partir do qual todos os pontos da sequência a_n, com $n \geq N$, estão ε-próximos de a, isto é,

$$\underbrace{|a_n - a|}_{\text{"distância" de } a_n \text{ a } a} < \varepsilon.$$

Exemplo 1: $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$

Prova: Dado qualquer $\varepsilon > 0$, queremos encontrar N tal que $|1/n - 0| < \varepsilon$.

Mas $|1/n - 0| = 1/n$ e $1/n < \varepsilon \iff n > 1/\varepsilon$. Isto é, tomando (qualquer) natural $N > 1/\varepsilon$, se $n \geq N$, então $1/n \leq 1/N < \varepsilon$.

Assim, se tomamos $\varepsilon = 0{,}001$, podemos tomar $N = 1001$:

$$n \geq N = 1001 \implies \frac{1}{n} \leq \frac{1}{1001} < \frac{1}{1000} = 0{,}001 \quad \text{e portanto}$$

$$\left| 1/n - 0 \right| = 1/n < \varepsilon. \qquad \blacksquare$$

Observe que $N = 1001$ funciona, mas $N = 2000$ ou $N = 10^{23}$ também funcionam!

<u>Exemplo</u> 2: $\alpha_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} \xrightarrow[n \to \infty]{} 1/3$

<u>Prova</u>: Podemos ver isso diretamente(*). Dado $\varepsilon > 0$, precisamos encontrar $N \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall n \geq N$

$$\left| \alpha_n - 1/3 \right| < \varepsilon.$$

(*) Veremos mais tarde outras maneiras de fazê-lo.

Mas

$$\left| \alpha_n - 1/3 \right| = \left| \left(1/3 + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} \right) - \frac{1}{3} \right| = \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}$$

e, portanto, precisamos encontrar N tal que, se $n \geq N$, então

$$\frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} < \varepsilon.$$

Como para todo natural n, $n^2 \geq n$, $1/6n^2 \leq 1/6n \leq 1/2n$.

Assim

$$\frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} \leq \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} = \frac{1}{n}$$

e, portanto, se fizermos $n > 1/\varepsilon$, $1/n < \varepsilon$, o que implica que $1/2n + 1/6n^2 < \varepsilon$.

Concluímos então que podemos escolher qualquer $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$N > \frac{1}{\varepsilon}. \qquad \blacksquare$$

Exemplo 3: A sequência $0, 1, 0, 1, 0, 1, \ldots$ não converge.

Intuitivamente isso é claro: uma sequência converge para um número a se seus elementos chegam cada vez mais perto de a quando n cresce, mas a sequência acima fica pulando pra lá e pra cá o tempo todo. Mas como PROVAR isso?

Vamos reescrever o que quer dizer $\lim_{n\to\infty} a_n = a$:

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \text{ tal que } \forall n \geq N,\ |a_n - a| < \varepsilon.}$$

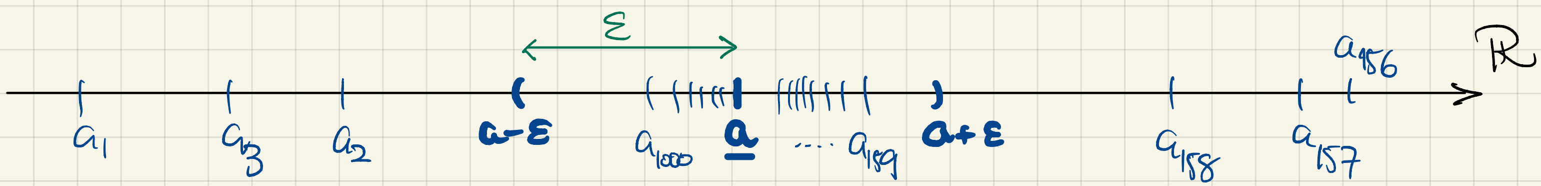
Negar essa afirmação pode ser feito mecanicamente, trocando os quantificadores $\underline{\underline{\forall}}$ e $\underline{\underline{\exists}}$ e trocando $\underline{\underline{<}}$ por $\underline{\underline{\geq}}$:

$$\boxed{\exists \varepsilon > 0 \text{ tal que},\ \forall N \in \mathbb{N},\ \exists n \geq N \text{ tal que } |a_n - a| \geq \varepsilon.}$$

Essa última afirmação é o que deve ser verificado se queremos mostrar que a_n NÃO CONVERGE para a. Em português, o que ela diz é que existe uma distância ($\exists \varepsilon > 0$) para a qual é sempre possível encontrar pontos a_n cuja distância a $\underline{a}$ é maior ou igual a ε, arbitrariamente "longe na sequência", isto é, não importa quão grande N seja, existe $n \geq N$ com a_n mais que ε-distante de $\underline{a}$.

Antes de voltar ao exemplo, vejamos figuras.

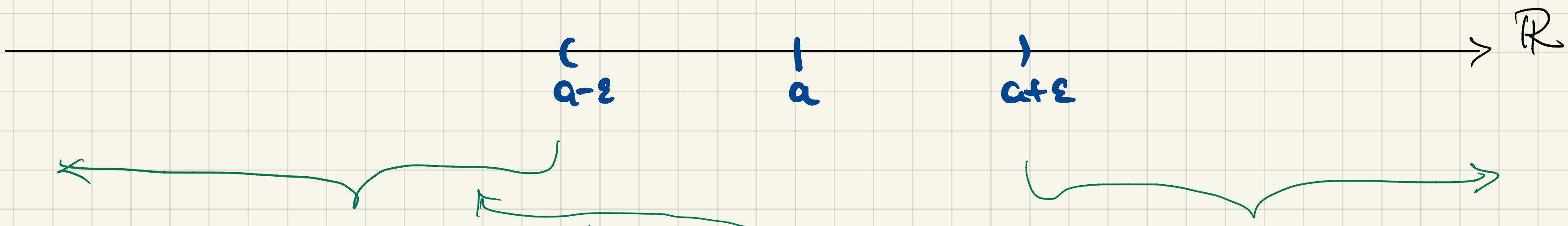
$\boxed{a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a}$



Todos os a_n estão ε-próximos de a, exceto um número finito deles, nesse caso $a_1, a_2, \dots, a_{158}$.

$\boxed{a_n \not\xrightarrow[n\to\infty]{} a}$

Negar o que está dito aqui é dizer que existe uma distância $\varepsilon > 0$ para a qual existe um número infinito de elementos da sequência que não estão no intervalo $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$:



Há um número infinito de elementos da sequência aqui ou aqui.

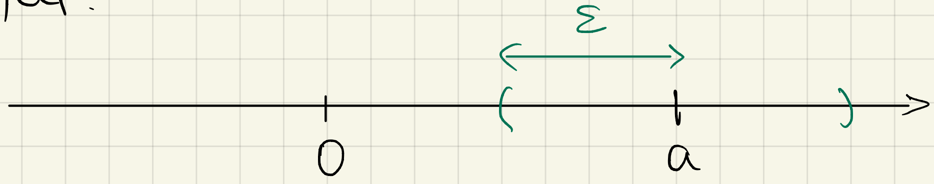
Vejamos como verificar isso no caso da sequência $0, 1, 0, 1, 0, 1, \ldots$, que também pode ser descrita como

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ 1 & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}$$

<u>Teorema</u>: A sequência a_n acima não converge.

<u>Prova</u>: Temos que mostrar que, qualquer que seja $a \in \mathbb{R}$, a_n não converge para a. Suponha primeiro que $a \neq 0$. Nesse caso, podemos escolher qualquer $\varepsilon > 0$ com $\varepsilon < |a|$.

Assim, para todo n ímpar, $a_n = 0$, e portanto, se n é ímpar temos



$$|a_n - a| = |0 - a| = |a| > \varepsilon.$$ Isto é, $|a_{2k+1} - a| > \varepsilon \quad \forall k \in \mathbb{N}$.

A outra possibilidade é $a = 0$. Nesse caso, tomamos $0 < \varepsilon < 1$ e, para todo n par, vale

$$|a_n - a| = |1 - 0| = 1 > 0.$$

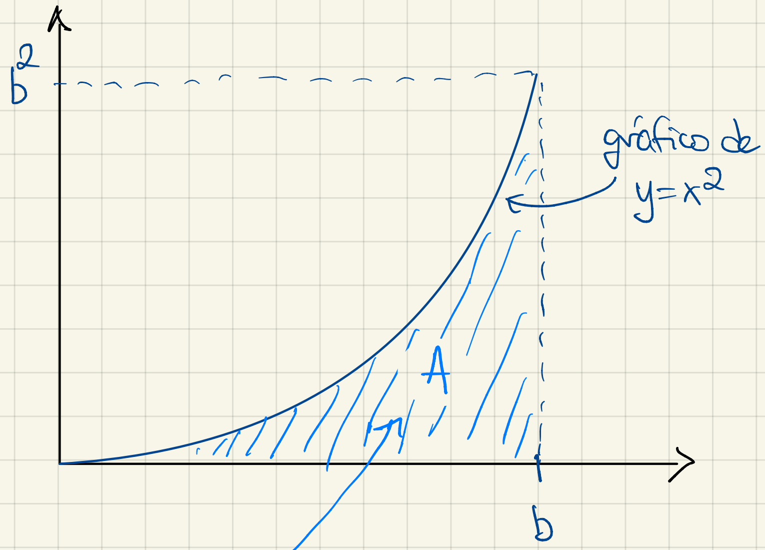
Isso mostra que a_n não converge para nenhum $a \in \mathbb{R}$. ∎

Exercícios: (i) Mostre que a sequência $a_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$ converge.

(ii) Mostre que a sequência $b_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$ não converge.

(iii) Mostre que a sequência $\beta_n = \frac{\left(\sum_{k=1}^{n-1} k^2\right)}{n^3}$ converge para $1/3$ quando $n \to \infty$.

Voltemos agora ao início dessas notas para encontrar a área da região no plano cartesiano limitada pelo eixo horizontal positivo e a parábola $y = x^2$, entre $x = 0$ e $x = b$. A afirmação é que essa área é $1/3$ da área do retângulo que a contém na figura, isto é,

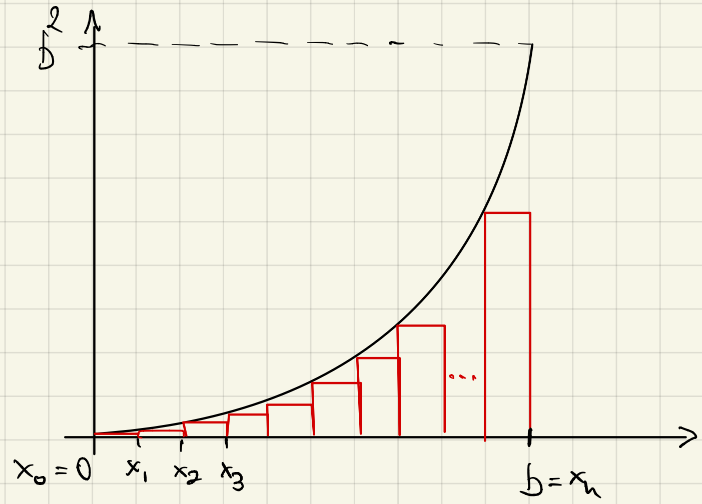


$$\text{Área} = \frac{1}{3} b^3$$

Dividimos o intervalo $[0,b]$ em n partes iguais, isto é, definimos

$$x_0 = 0\ ,\quad x_1 = \frac{b}{n}\ ,\ \dots\ ,\ x_k = \frac{kb}{n}\ ,\ \dots\ x_n = b$$

e consideramos a soma das áreas dos retângulos vermelhos, cujas bases são os intervalos $[x_{k-1}, x_k]$ e cujas alturas são $(x_{k-1})^2 = \left(\frac{(k-1)b}{n}\right)^2$.



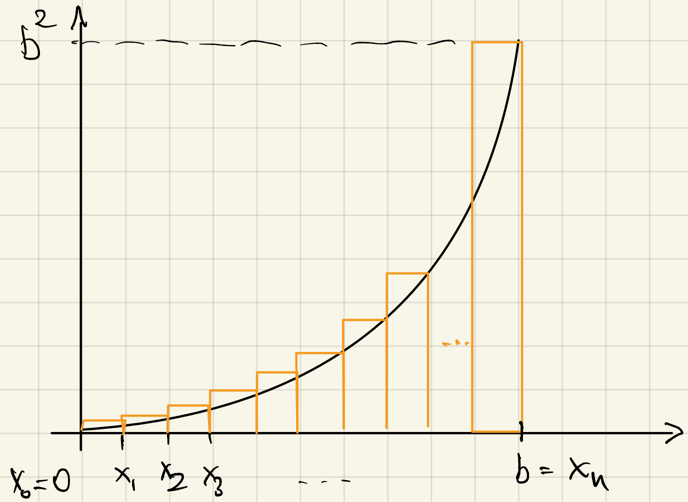
Essa soma é claramente menor (ou igual) à Área de A que queremos calcular, já que a união dos retângulos vermelhos está contida na região A. Como todas as bases têm o mesmo comprimento b/n, a soma das áreas vermelhas é

$$S_n = \frac{b}{n}\left[0 + \left(\frac{b}{n}\right)^2 + \left(\frac{2b}{n}\right)^2 + \dots + \left(\frac{(n-1)b}{n}\right)^2\right]$$

β_n definido anteriormente.

$$= \left(\frac{b}{n}\right)^3 \cdot \left(\sum_{k=0}^{n-1} k^2\right) = b^3 \cdot \frac{\left(\sum_{k=1}^{n-1} k^2\right)}{n^3} = b^3 \cdot \beta_n \leq \text{Área de } A$$

Por motivos análogos, a soma das áreas dos retângulos amarelos, cujas bases são $[x_{k-1}, x_k]$ e alturas são $(x_k)^2 = \left(\frac{kb}{n}\right)^2$, é maior que a Área de A:



$$S_n = \frac{b}{n}\left[\left(\frac{b}{n}\right)^2 + \left(\frac{2b}{n}\right)^2 + \dots + \left(\frac{nb}{n}\right)^2\right]$$

$$= b^3 \cdot \frac{\left(\sum_{k=1}^{n} k^2\right)}{n^3} = b^3 \cdot \alpha_n > \text{Área de } A$$

α_n definido anteriormente

Mas agora observamos que esse raciocínio vale para qualquer $n \in \mathbb{N}$ e portanto as desigualdades a seguir valem para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$s_n = b^3 \cdot \beta_n \leq \text{Área de } A \leq b^3 \cdot \alpha_n = S_n$$

$$\boxed{\text{Área de } A = \frac{b^3}{3}}$$

Disso segue que

$$\sup s_n = b^3 \cdot \sup \beta_n = \frac{b^3}{3} \leq \text{Área de } A \leq \frac{b^3}{3} = b^3 \cdot \inf \alpha_n = \inf S_n.$$