Problema 4

Observação: Quando escrevi esta resolução não consegui colocar a seta em cima do AB, então toda vez que aparecer "$\leftrightarrow$ AB" estarei me referindo à reta AB e não ao segmento.

Dados dois pontos A e B, mostre que $\overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{BA} = \leftrightarrow$ AB
Demonstração:

Vamos mostrar primeiramente que $\overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{BA} \subseteq \leftrightarrow$ AB.
Seja P um ponto em $\overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{BA}$, Pela definição de união, temos que P está em $\overrightarrow{AB}$ ou P está em $\overrightarrow{BA}$. Se P está em $\overrightarrow{AB}$, então, pela definição de semirreta, temos quatro possibilidades:
(i) P = A
(ii) P = B
(iii) A * P * B
(iv) A * B * P
Os casos (i) e (ii) são triviais pois, pela definição de reta, os pontos A e B estão em $\leftrightarrow$ AB e, portanto, P está em $\leftrightarrow$ AB.
Nos casos (iii) e (iv) temos que, pelo axioma (B1), os pontos A, B e P são colineares, e como, pelo axioma (I1), a reta $\leftrightarrow$ AB é única, concluímos que para ambos casos, P está em $\leftrightarrow$ AB.

Se P está em $\overrightarrow{BA}$, então, pela definição de semirreta, temos também quatro possibilidades:
(i) P = A
(ii) P = B
(iii) A * P * B
(iv) P * A * B
Os casos (i), (ii), (iii), já foram demonstrados, enquanto (iv) é análogo a (iii). Portanto, mostramos que todo ponto em $\overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{BA}$ também está em $\leftrightarrow$ AB, logo, $\overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{BA} \subseteq \leftrightarrow$ AB.

Agora, mostraremos que $\leftrightarrow$ AB $\subseteq \overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{BA}$. Seja P um ponto que está em $\leftrightarrow$ AB, então, pela definição de reta, temos três possibilidades:
(i) P = A
(ii) P = B
(iii) P é colinear a A e B.
Os casos (i) e (ii) são triviais pois, pela definição de semirreta, A e B estão tanto em $\overrightarrow{AB}$ quanto em $\overrightarrow{BA}$ e, portanto, P está em $\overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{BA}$.
Considerando agora o caso (iii). Se P, A e B são colineares, então, pelo axioma (B3), temos mais três possibilidades:
(iii - a) A * P * B
(iii - b) A * B * P
(iii - c) P * A * B
Considerando o caso (iii - a). Se A * P * B, então, pela definição de semirreta,

P está tanto em $\overrightarrow{AB}$ quanto em $\overrightarrow{BA}$ e, portanto, P está em $\overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{BA}$.
Considerando o caso (iii - b). Se A * B * P, então, pela definição de semirreta, P está em $\overrightarrow{AB}$.
Considerando o caso (iii - c). Se P * A * B, então, pela definição de semirreta, P está em $\overrightarrow{BA}$.
Portanto, mostramos que todo ponto em $\leftrightarrow$ AB, também está em $\overrightarrow{AB}$ ou em $\overrightarrow{BA}$, logo, $\leftrightarrow$ AB $\subseteq$ $\overrightarrow{AB}$ $\cup$ $\overrightarrow{BA}$.

Como $\leftrightarrow$ AB $\subseteq \overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{BA}$ e $\overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{BA} \subseteq$ $\leftrightarrow$ AB, então $\overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{BA} =$ $\leftrightarrow$ AB. CQD