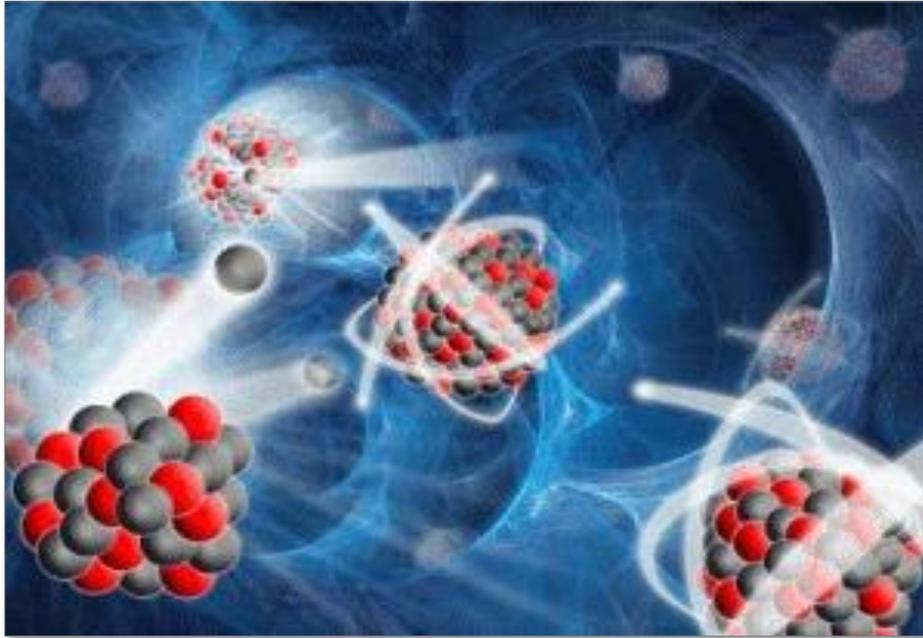


Introdução a Física Nuclear



Prof. Valdir Guimarães

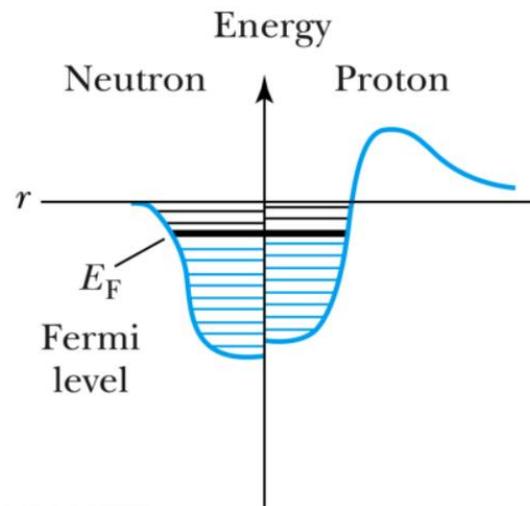
Instituto de Física

Aula 9 – Modelos coletivos

Modelo de camadas

- ❑ Modelo de camadas -> nucleons independentes ligados em um potencial.
- ❑ Parte radial -> Woods-Saxon
- ❑ Parte angular -> Harmônicos esféricos
- ❑ Adicionado a Interação spin órbita.
- ❑ Nesse modelo *não* há interações residuais, ou seja, um nucleon em uma camada não afeta a distribuição dos níveis de energia.
- ❑ Esse modelo é denominado de *Modelo de camadas extremo* ou *Modelo de partícula única*. (*Single-Particle Model*).
- ❑ Potencial Woods-Saxon + spin-orbita reproduziu os números mágicos

$$H = \sum_{k=1}^A \left[\frac{p^2}{2m} + V(r) + V_{so}(r) \mathbf{l} \cdot \mathbf{s} \right]$$

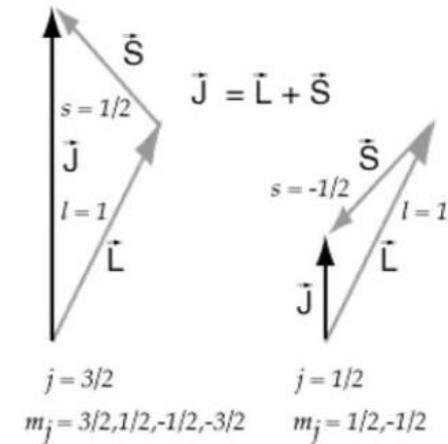


- ❑ O modelo de camadas na sua modalidade ***Extreme Independent Particle model (Modelo de partículas independente extremo)*** as partículas são independentes.
- ❑ Funciona bem para núcleos com um ou dois nucleons fora da camada, ou um ou dois nucleons para fechar a camada.
- ❑ As propriedades das partículas ou buracos (momento angular total) definem as propriedades dos núcleos como momento angular J^π do estado fundamental.
- ❑ Nesse modelo as interações residuais são desprezadas.
- ❑ Os orbitais são preenchidos com base no princípio de exclusão de Pauli.
- ❑ Emparelhamento Spin-Spin (SS) muito forte.

- ❑ No modelo de camadas podemos usar a notação espectroscópica

Table 2.6 Spectroscopic Notation

ℓ value	0	1	2	3	4	5	6
Symbol	s	p	d	f	g	h	i



- ❑ Considerando o acoplamento spin-orbita o número quântico J (momento angular total) se torna importante.

- ❑ No modelo de camadas a paridade de um dado orbital de single-particle é definido como sendo a paridade dos harmônicos esféricos: $\pi_l = (-1)^l$

- ❑ O grande sucesso do modelo de camadas extremo de single-particle foi reproduzir o spin e outra propriedades de núcleos par-ímpar próximos de camadas fechadas.

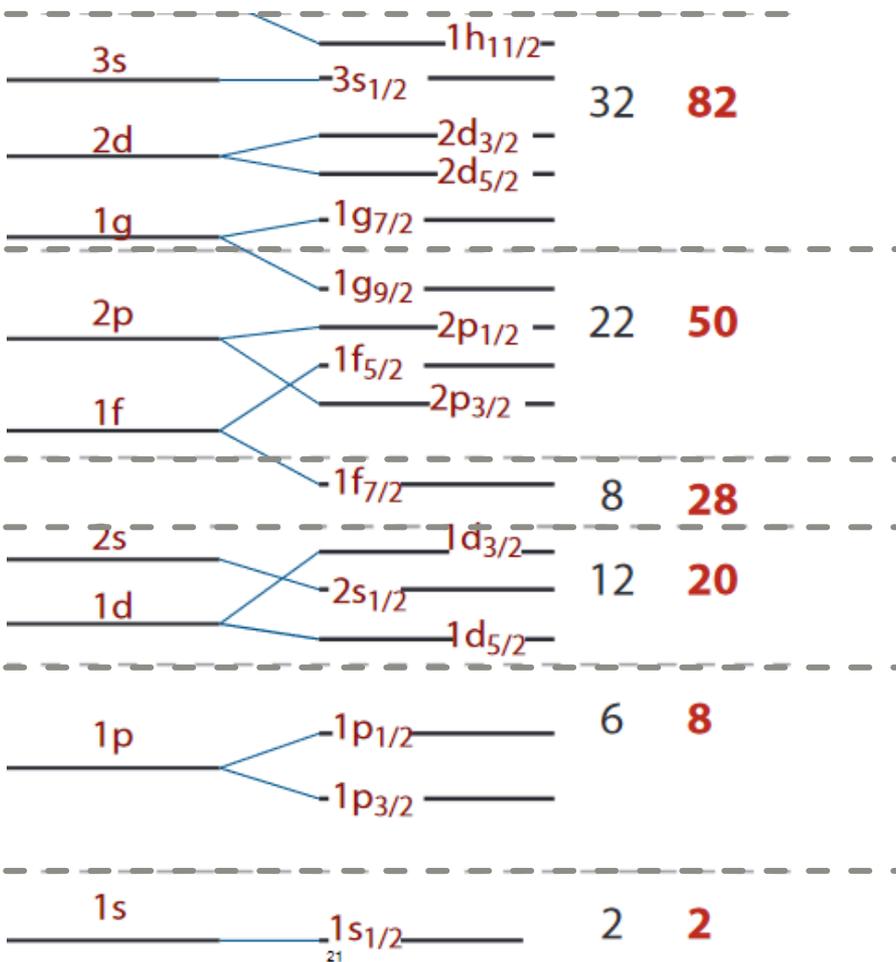
- ❑ O momento angular de um núcleo é definido pelo nucleon de valência.



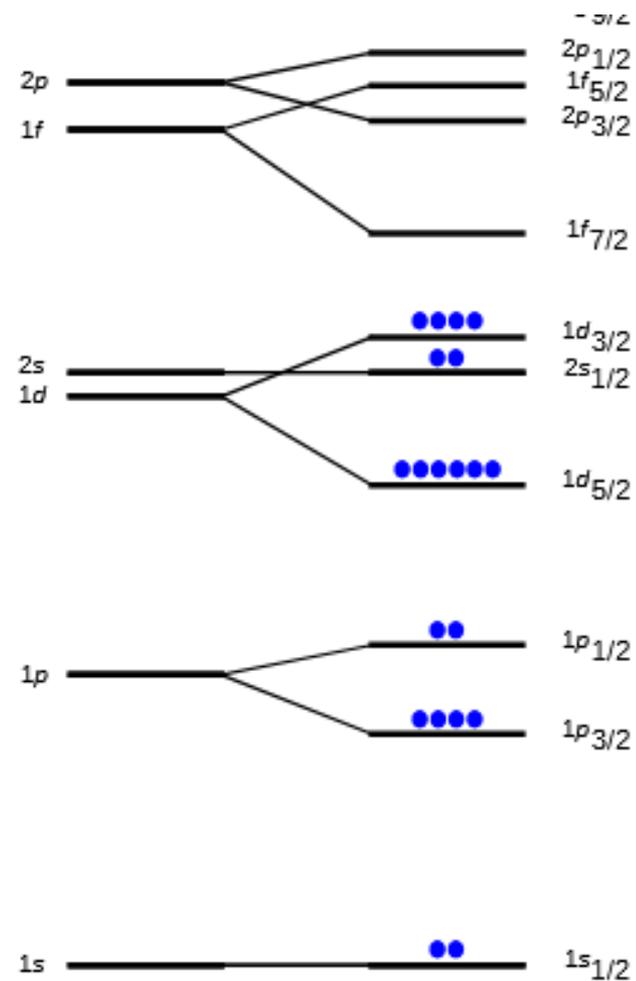
Momento angular total

**Sem Interação
spin órbita.**

**Com Interação
spin órbita.**



Números mágicos.

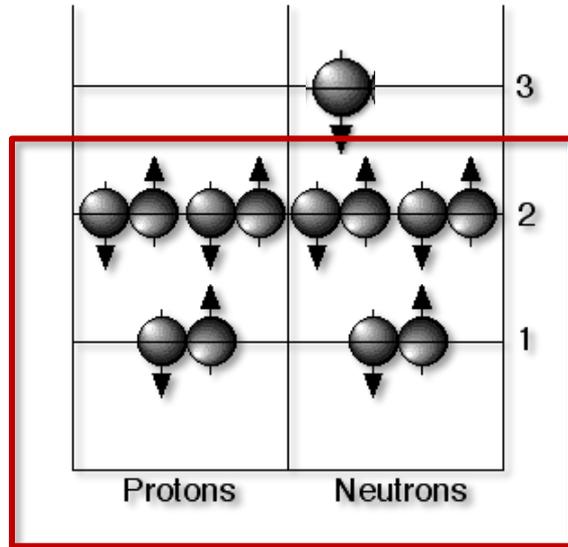


Número de prótons ou nêutrons em cada orbital $(2j + 1)$

Determinação do spin e paridade do estado fundamental

- ❑ Para determinarmos o spin de um determinado núcleo devemos somar o momento angular total de cada nucleon.
- ❑ Cada par de prótons ou neutrons se acoplam formando um momento angular total nulo (emparelhamento).
- ❑ Momento angular total do núcleo é dado pelos prótons ou nêutrons de valência.
- ❑ Core (Momento angular nulo) + nucleon valência

$$J^\pi = J^\pi (\text{core}) + J^\pi (\text{partícula valência})$$



Core
($J^\pi=0^+$)

J^π

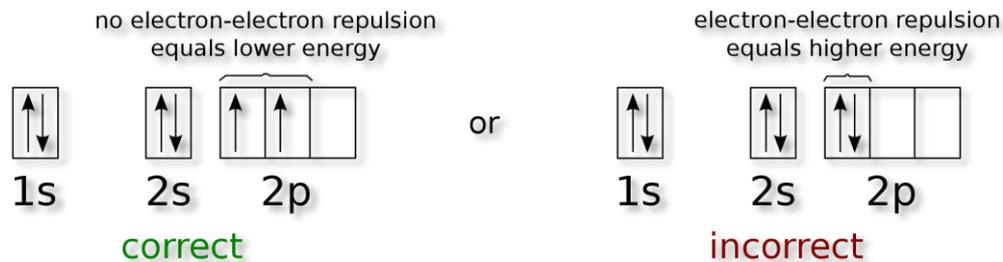
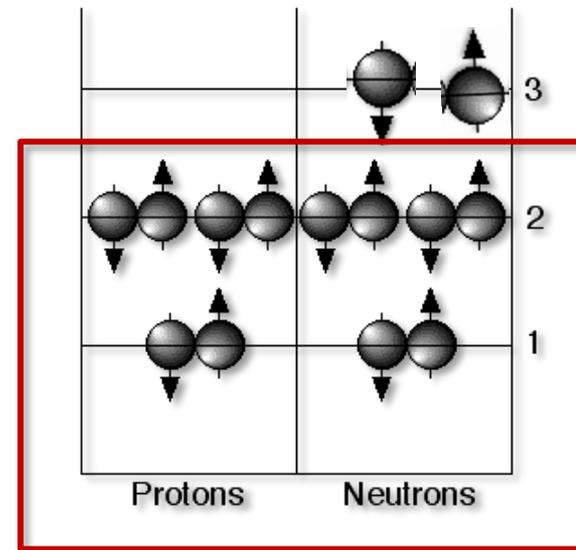
paridade

Momento angular total

par-par	$J^\pi = 0^+$	✓
Par-ímpar	$J^\pi = j_{\text{odd}}^\pi$	✓
ímpar-ímpar	$J^\pi = j_p^\pi \otimes j_n^\pi$	✗

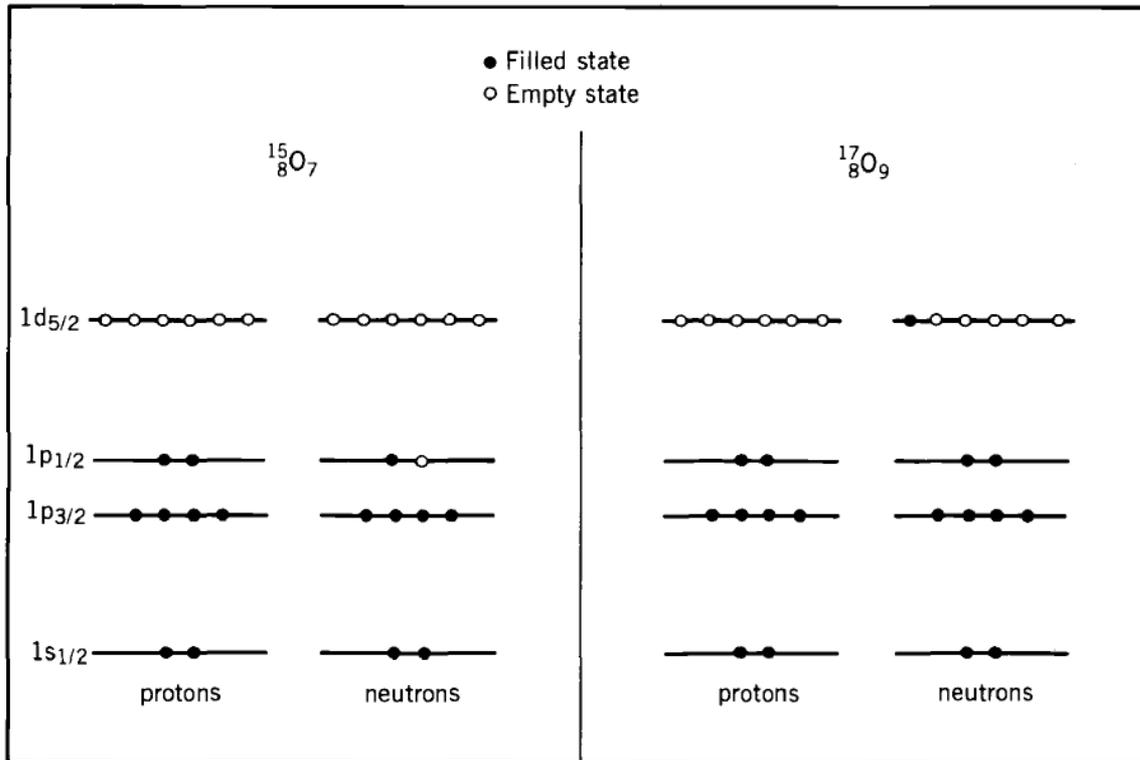
Núcleos par-par (emparelhamento)

- ❑ Nucleons são férmions e deve obedecer o princípio de exclusão de Pauli mas a regra de Hund para preenchimento é diferente do que para elétrons.



- ❑ A regra de Hund para o núcleo é diferente. Função de onda anti-simétrica em spin e simétrica espacialmente são favorecidos (emparelhamento). Os núcleos par-par tem portanto sempre spin e paridade positiva e o emparelhamento spin-spin é muito forte.
- ❑ O momento angular total (spin do núcleo) para núcleos par-par é sempre $J^\pi=0^+$

Momento angular para núcleos par-ímpar



$^{15}_8\text{O}_7$: The last neutron $\rightarrow 1p_{1/2}$

- $j = \frac{1}{2}$
- $\ell = 1$ (from p orbital)
- \Rightarrow parity: $\pi = (-1)^\ell = -$

• $\therefore J^\pi_{\text{gs}}(^{15}\text{O}) = \frac{1}{2}^-$

$^{17}_8\text{O}_9$: The last neutron $\rightarrow 1d_{5/2}$

- $j = \frac{5}{2}$
- $\ell = 2$ (from d orbital)
- \Rightarrow parity: $\pi = (-1)^\ell = +$

• $\therefore J^\pi_{\text{gs}}(^{17}\text{O}) = \frac{5}{2}^+$

Spin para o estado fundamental é dado pelo nucleon desemparelhado.

Número de prótons ou nêutrons em cada orbital = $(2j + 1)$

Paridade dada pelo orbital da partícula de valência $(-1)^\ell$

☐ Determine J^π para:

☐ ^{13}O , ^{17}Ne , ^{19}Ne , ^{20}Ne , ^{23}Mg

$$J^\pi = \frac{3}{2}^-$$

$$J^\pi = \frac{1}{2}^-$$

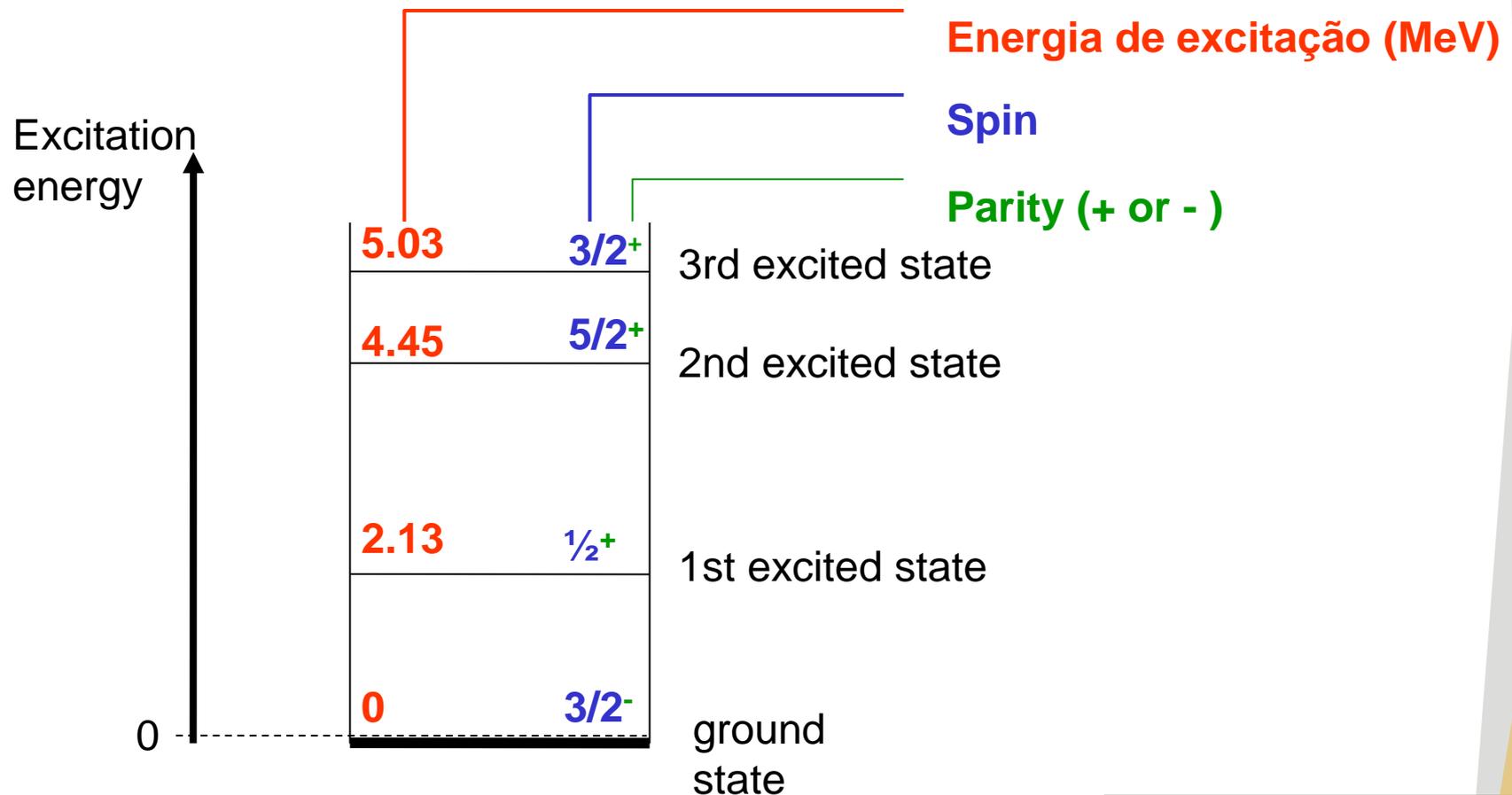
$$J^\pi = \frac{5}{2}^+$$

$$J^\pi = 0^+$$

$$J^\pi = \frac{5}{2}^+$$

Estados Excitados

- ❑ Nucleos só podem ser excitados em estados discretos.
- ❑ Propriedades desses estados ou ressonâncias são importantes na determinação das taxas de reações em estrelas.



Estados Excitados de single-particle

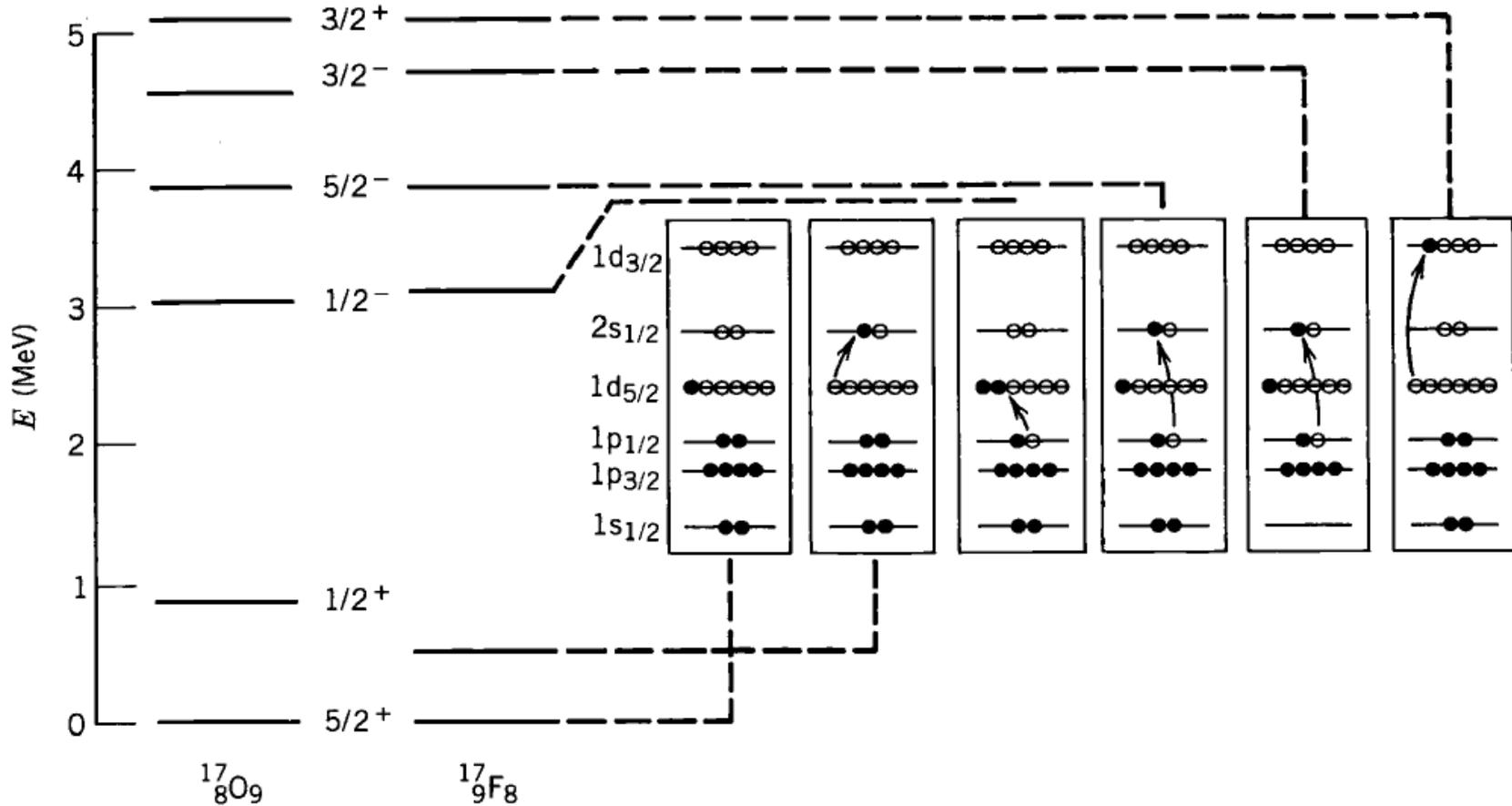
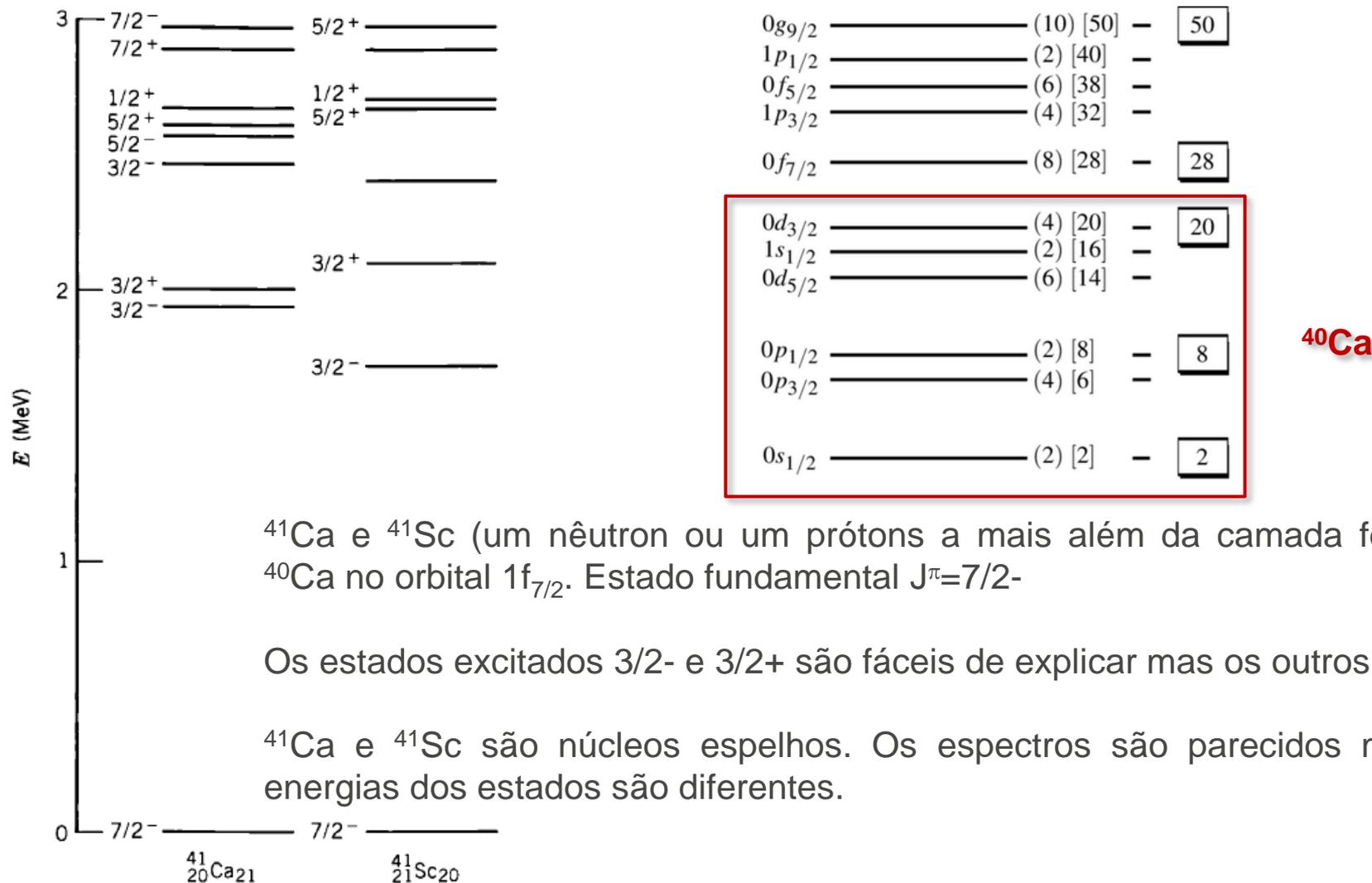


Figura 5.11 do Krane pg. 131

O modelo extremo de partícula independente, funciona bem para núcleos com apenas um nucleon de valência (nucleon a mais além da camada fechada).

Figura 5.12 do Krane pg. 132

^{41}Ca e ^{41}Sc (um nêutron ou um prótons a mais além da camada fechada ^{40}Ca no orbital $1f_{7/2}$..



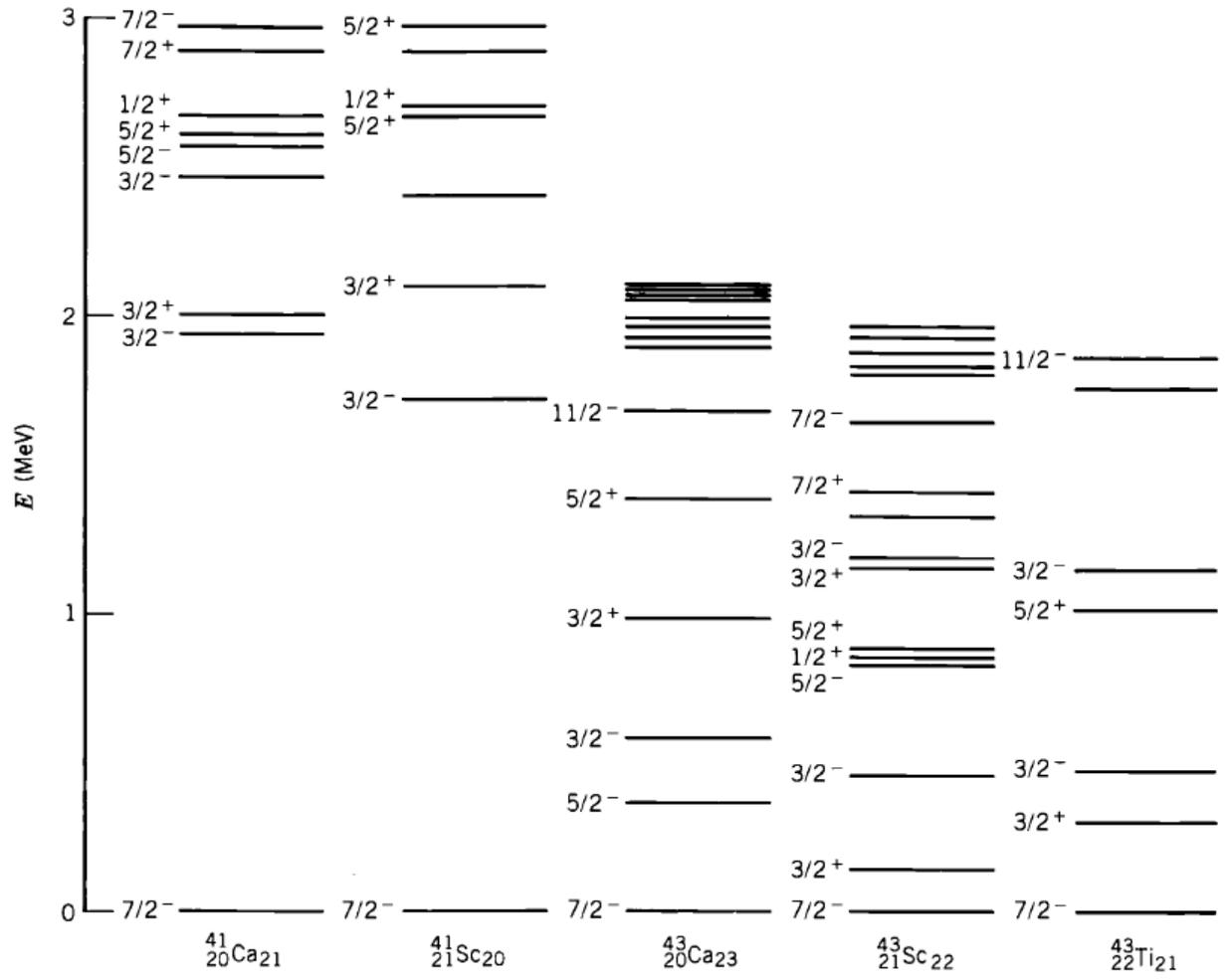


Figura 5.12 do Krane pg. 132

^{43}Ca (3 nêutrons + ^{40}Ca)

^{43}Ti (2 prótons e um nêutron + ^{40}Ca)

Acoplamento dos 3 nucleons

Acoplamento JJ para núcleos par-par

^{120}Sn : Estado fundamental $J^\pi = 0^+$

50 prótons: preenchidos até o orbital $1g_{9/2}$

80 nêutrons: o orbital $1h_{11/2}$ pode ter 12 nêutrons mas é preenchido com 10 nêutrons (faltando 2 para completar a camada 82).

Então temos dois buracos de valência para neutrons.

Como gerar o estado excitado com $J^\pi=2^+$ de energia baixa com o modelo de acoplamento JJ ?

$11/2+11/2 = 0^+, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11^+$

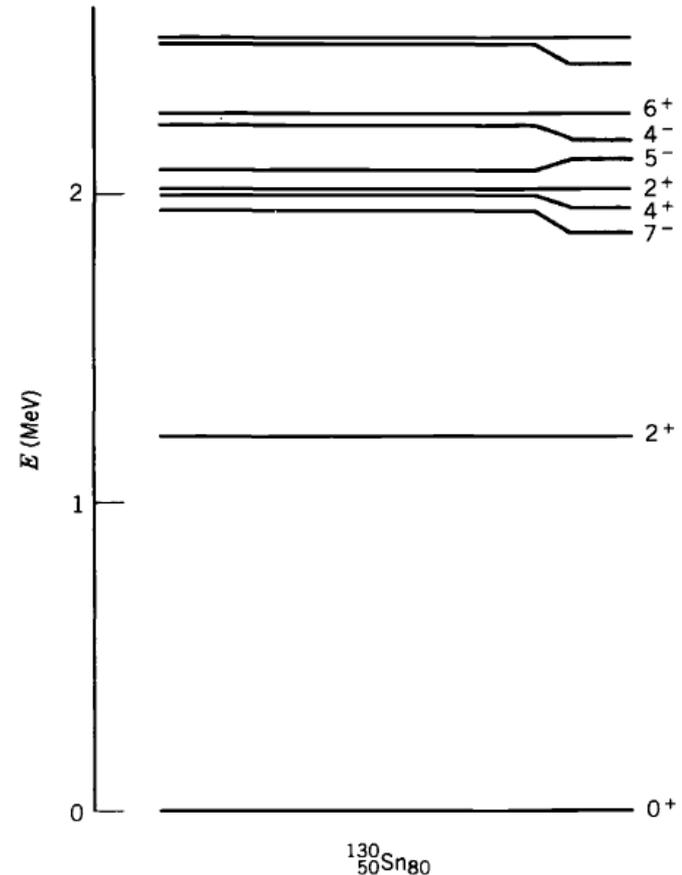
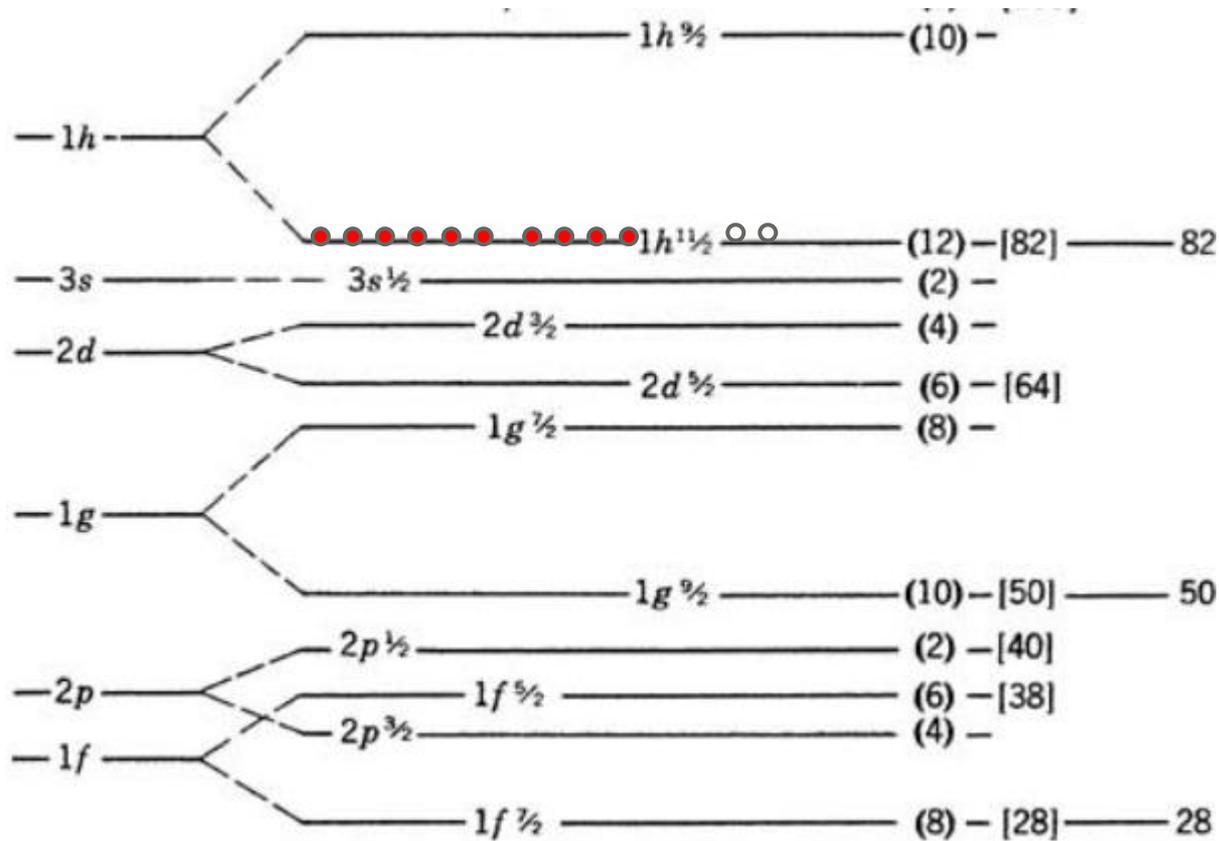


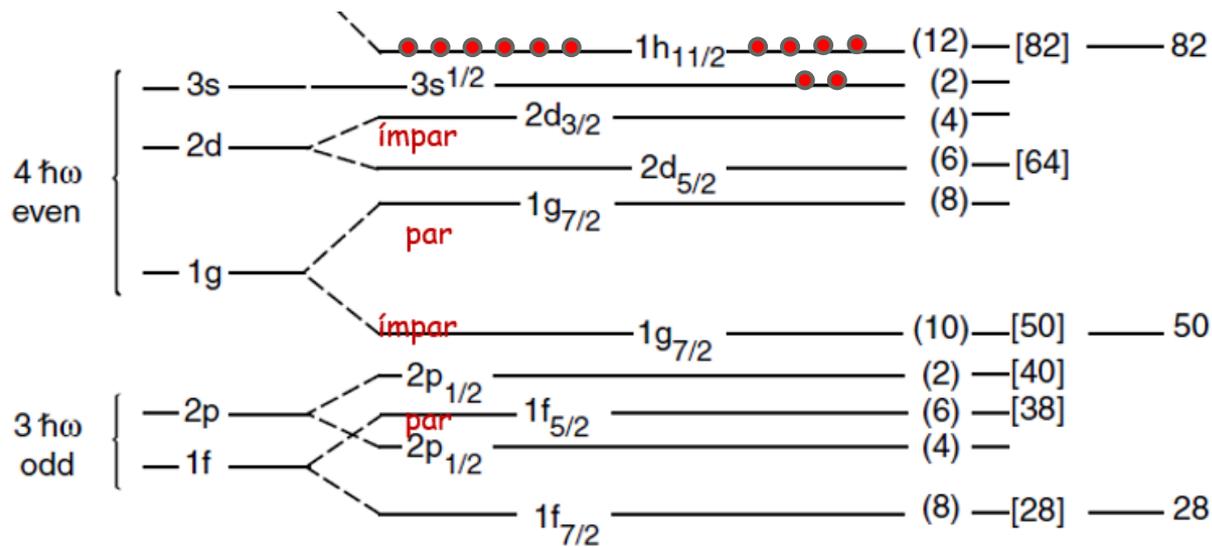
Figure 5.14 The low-lying energy levels of ^{130}Sn .

^{130}Sn ($Z=50$ $N=80$) 3 nêutrons + ^{40}Ca

Camada fechada para prótons

Faltando 2 nêutrons para fechar camada $N=82$





Para formar o estado excitado 2+ podemos:

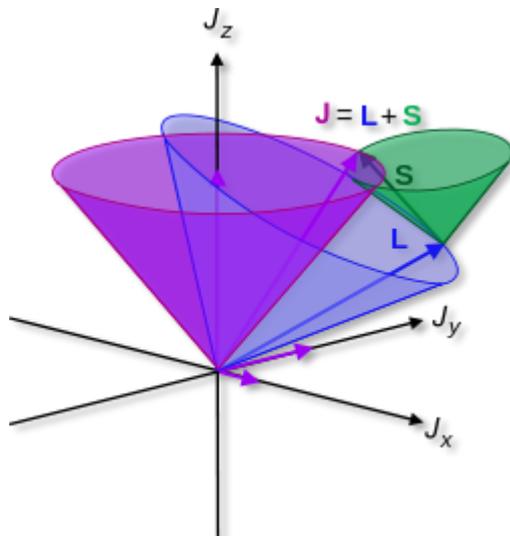
- 1) quebrar o par em 3s_{1/2} e excitar um dos nêutrons para o orbital 1h_{11/2}
- 2) quebrar um par em 2d_{3/2} e excitar um dos nêutrons para o orbital 1h_{11/2}
- 3) Muitas outras combinações de acoplamento JJ gerando o spin J

$$J = J_1 + J_2 \dots J_1 - J_2 \quad J = 11/2 + 1/2 = 6, \quad 11/2 - 1/2 = 5 \quad 11/2 + 3/2, \quad 11/2 - 3/2 \text{ etc...}$$

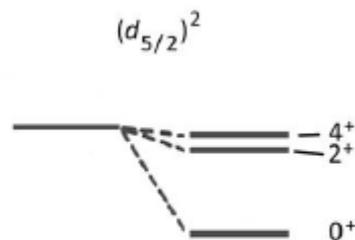
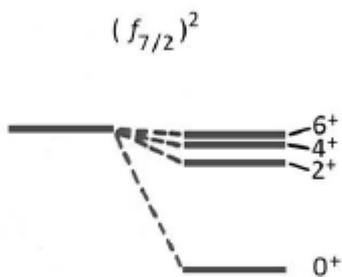
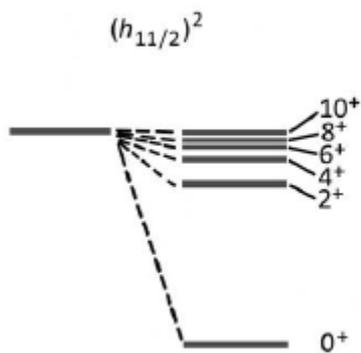
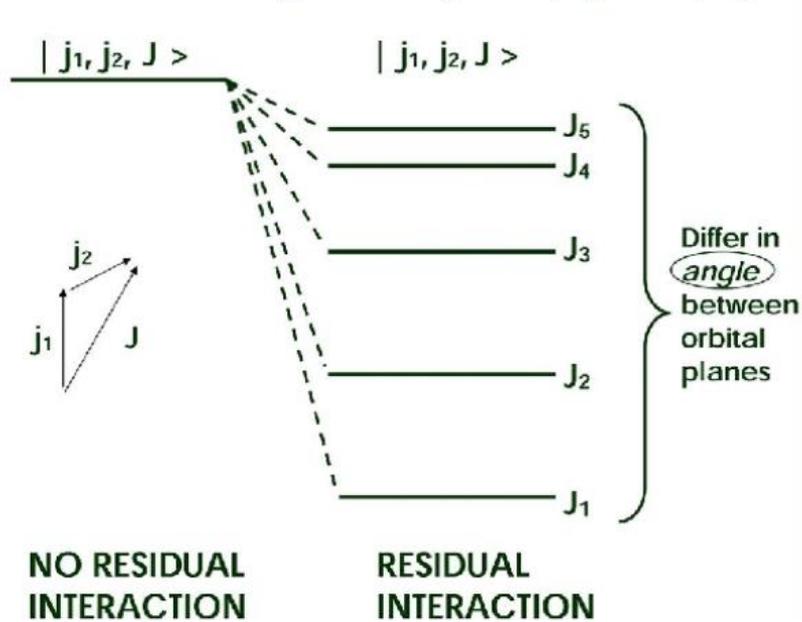
A função de onda é dada por uma combinação dessas possibilidades

$$\begin{aligned} \psi(2^+) = & a\psi(\nu h_{11/2} \oplus \nu h_{11/2}) + b\psi(\nu d_{3/2} \oplus \nu d_{3/2}) \\ & + c\psi(\nu d_{3/2} \oplus \nu s_{1/2}) + \dots \end{aligned}$$

- ❑ Para dois nucleons no mesmo orbital $\vec{J}_1 = \vec{J}_2 = \vec{J}$
- ❑ Os possíveis momentos angulares totais seriam: $0 < J < 2J$
- ❑ No entanto, apenas paridades positivas (devido ao acoplamento dos momentos angulares, do mesmo orbital) seriam permitidas
- ❑ Veja o caso para $\vec{J}_1 = \vec{J}_2 = \frac{7}{2}$
- ❑ A princípio poderíamos ter $J=0+, 1-, 2+, 3-, 4+, 5-, 6+$ e $7-$.
- ❑ Mas como apenas os momentos angulares com paridade positiva são possíveis teremos então apenas os momentos angulares $0+, 2+, 4+$ e $6+$ como possíveis.



For same nucleons in a single orbit $J_1 = 0^+$, $J_2 = 2^+$, $J_3 = 4^+$, etc.

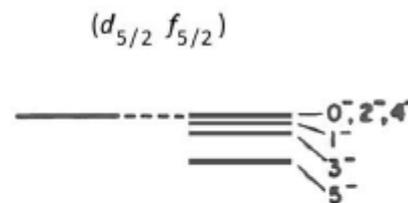
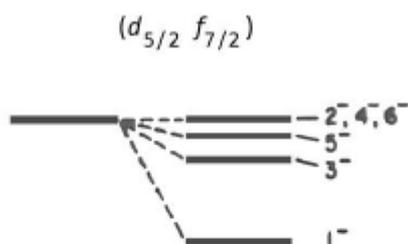
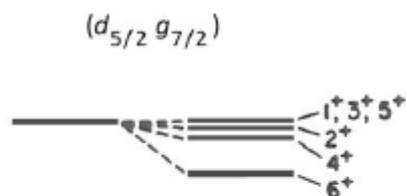


EQUIVALENT ORBITS

Núcleos ímpar-ímpar (emparelhamento JJ)

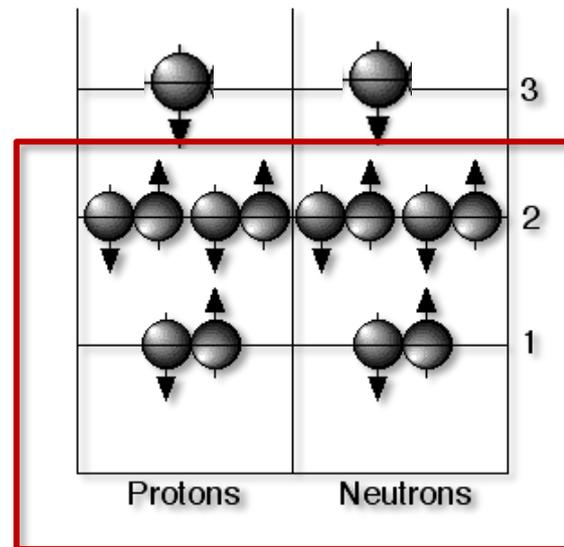
- ❑ O acoplamento JJ deve prevalecer.
- ❑ Como são nucleons de tipos diferentes não precisamos nos preocupar com o Princípio de Pauli.
- ❑ Podemos ter todas possíveis combinações.

$$\vec{J}_1 - \vec{J}_2 \text{ até } \vec{J}_1 + \vec{J}_2$$



NON-EQUIVALENT ORBITS

- ❑ Modelo de camadas não funciona muito bem para núcleos ímpar-ímpar pois as interações residuais começam a ficar importantes.
- ❑ As interações residuais e configurações espaciais definem qual momento angular teria menor energia. Regra de Nordheim funciona relativamente bem.



Regra de Nordheim

- ❑ Para definir momento angular total de núcleos ímpar-ímpar
- ❑ Dado um próton e um nêutron desemparelhado com momento angular L_1 e L_2 e momento angular total J_1 e J_2 temos:
 - ❑ Se $J_1 + J_2 + L_1 + L_2 = \text{par}$ então $J = |J_1 - J_2|$
 - ❑ Se $J_1 + J_2 + L_1 + L_2 = \text{ímpar}$ então $J = J_1 + J_2$

Momento de quadrupolo no modelo de camadas

Na mecânica quântica o valor esperado para o momento de quadrupolo é dado por:

$$\langle Q \rangle = \int d\vec{x} \psi_N^*(\vec{x})(3z^2 - r^2)\psi_N(\vec{x})$$

Onde o eixo z é o eixo de simetria.

Para um próton de valência num núcleo ímpar-par (um próton a mais numa camada fechada) a equação para o momento de quadrupolo de “single-particle” fica:

$$\begin{aligned}\langle Q_{sp} \rangle &= \langle R_{nl}Y_{l,m_l=l} | 3z^2 - r^2 | R_{nl}Y_{l,m_l=l} \rangle \\ &= \langle r^2 \rangle \langle Y_{ll} | 3 \cos^2 \theta - 1 | Y_{ll} \rangle \\ &= \langle r^2 \rangle \langle Y_{ll} | 2 - 3 \sin^2 \theta | Y_{ll} \rangle\end{aligned}$$

Considerando a função de onda de harmônicos esféricos para l) :

$$Y_{ll} = \sqrt{\frac{(2l_1)!}{4\pi} \frac{1}{2^l l!}} e^{il\phi} \sin^l \theta$$

Isso fornece:
$$\langle Q_{sp} \rangle = -\frac{2j-1}{2(j+1)} \langle r^2 \rangle .$$

Com o raio quadrático médio de uma esfera carregada:
$$\langle r^2 \rangle = \frac{3}{5} R^2 = \frac{3}{5} R_0^2 A^{2/3} .$$

O momento de quadrupolo considerando o momento angular do núcleo para apenas um próton de valência é dado por:

$$\langle Q_{sp} \rangle = - \frac{2j - 1}{2(j + 1)} \langle r^2 \rangle$$

Para mais de um próton de valência

$$\langle Q \rangle = \langle Q_{sp} \rangle \left[1 - 2 \frac{n - 1}{2j - 1} \right]$$

Sendo n o número de prótons no mesmo orbital, que no máximo pode ser $2j+1$

Table 5.1 Shell-Model Quadrupole Moments

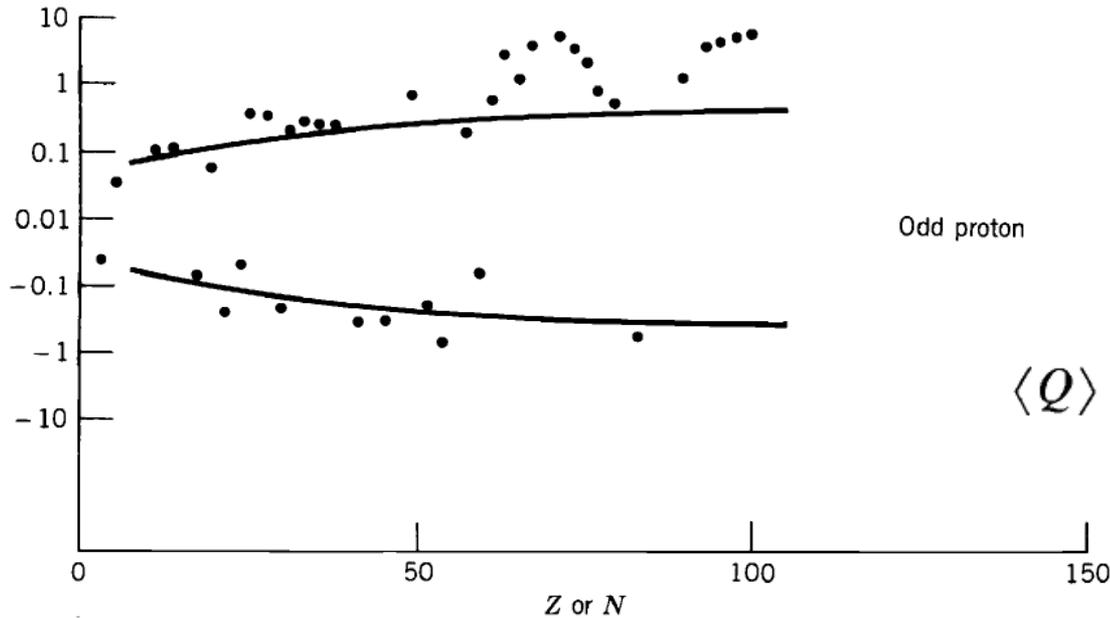
Shell-Model State	Calculated Q (single proton)	Measured Q			
		Single Particle		Single Hole	
		p	n	p	n
$1p_{3/2}$	-0.013	-0.0366(^7Li)		+0.0407(^{11}B)	+0.053(^9Be)
$1d_{5/2}$	-0.036	-0.12(^{19}F)	-0.026(^{17}O)	+0.140(^{27}Al)	+0.201(^{25}Mg)
$1d_{3/2}$	-0.037	-0.08249(^{35}Cl)	-0.064(^{33}S)	+0.056(^{39}K)	+0.45(^{35}S)
$1f_{7/2}$	-0.071	-0.26(^{43}Sc)	-0.080(^{41}Ca)	+0.40(^{59}Co)	+0.24(^{49}Ti)
$2p_{3/2}$	-0.055	-0.209(^{63}Cu)	-0.0285(^{53}Cr)	+0.195(^{67}Ga)	+0.20(^{57}Fe)
$1f_{5/2}$	-0.086		-0.20(^{61}Ni)	+0.274(^{85}Rb)	+0.15(^{67}Zn)
$1g_{9/2}$	-0.13	-0.32(^{93}Nb)	-0.17(^{73}Ge)	+0.86(^{115}In)	+0.45(^{85}Kr)
$1g_{7/2}$	-0.14	-0.49(^{123}Sb)		+0.20(^{139}La)	
$2d_{5/2}$	-0.12	-0.36(^{121}Sb)	-0.236(^{91}Zr)		+0.44(^{111}Cd)

Data for this table are derived primarily from the compilation of V. S. Shirley in the *Table of Isotopes*, 7th ed. (New York: Wiley, 1978). The uncertainties in the values are typically a few parts in the last quoted significant digit.

Note o sinal trocado entre Q_{sp} e Q_{sh}

$$Q(\text{particle}) = -Q(\text{hole})$$

Comparação entre valores calculados (curva solidas) com experimentais



Odd proton $Q(\text{particle}) = -Q(\text{hole})$

$$\langle Q \rangle = \langle Q_{\text{sp}} \rangle \left[1 - 2 \frac{n-1}{2j-1} \right]$$

- Temos mais núcleos com momento positivos do que negativo
- O modelo não prevê os momentos de quadrupolo muito grandes
- Falha para núcleos com $60 < Z < 80$ e $Z > 90$.

- ❑ O modelo de camadas na sua modalidade ***Extreme Independent Particle model (Modelo de partículas independente extremo)*** tem problemas para reproduzir o momento de quadrupolo dos núcleos.
- ❑ Prevê momento de quadrupolo diferente de zero para nêutrons de valência.
- ❑ Neutrons são nêutrons e não deveríamos observar nenhum momento de quadrupolo.
- ❑ Falha para reproduzir momentos de quadrupolo núcleos com $60 < Z < 80$ e $Z > 90$.
- ❑ Explicações:
 - Possível existência de uma componente não central para força spin-orbita.
 - Importância de forças residuais.
 - Efeitos devido a um comportamento coletivo dos nucleons.

- ❑ Estado excitado $J^\pi = 2^+$ em núcleos par-par
- ❑ Esse estado excitado é comum em todos nucleos par-par
- ❑ Para maioria está em energia muito baixa e muitas vezes é o primeiro estado excitado.
- ❑ É difícil acreditar que seja devido a excitações e combinações de nucleons independentes



Deu origem a ideia de modelos coletivos.

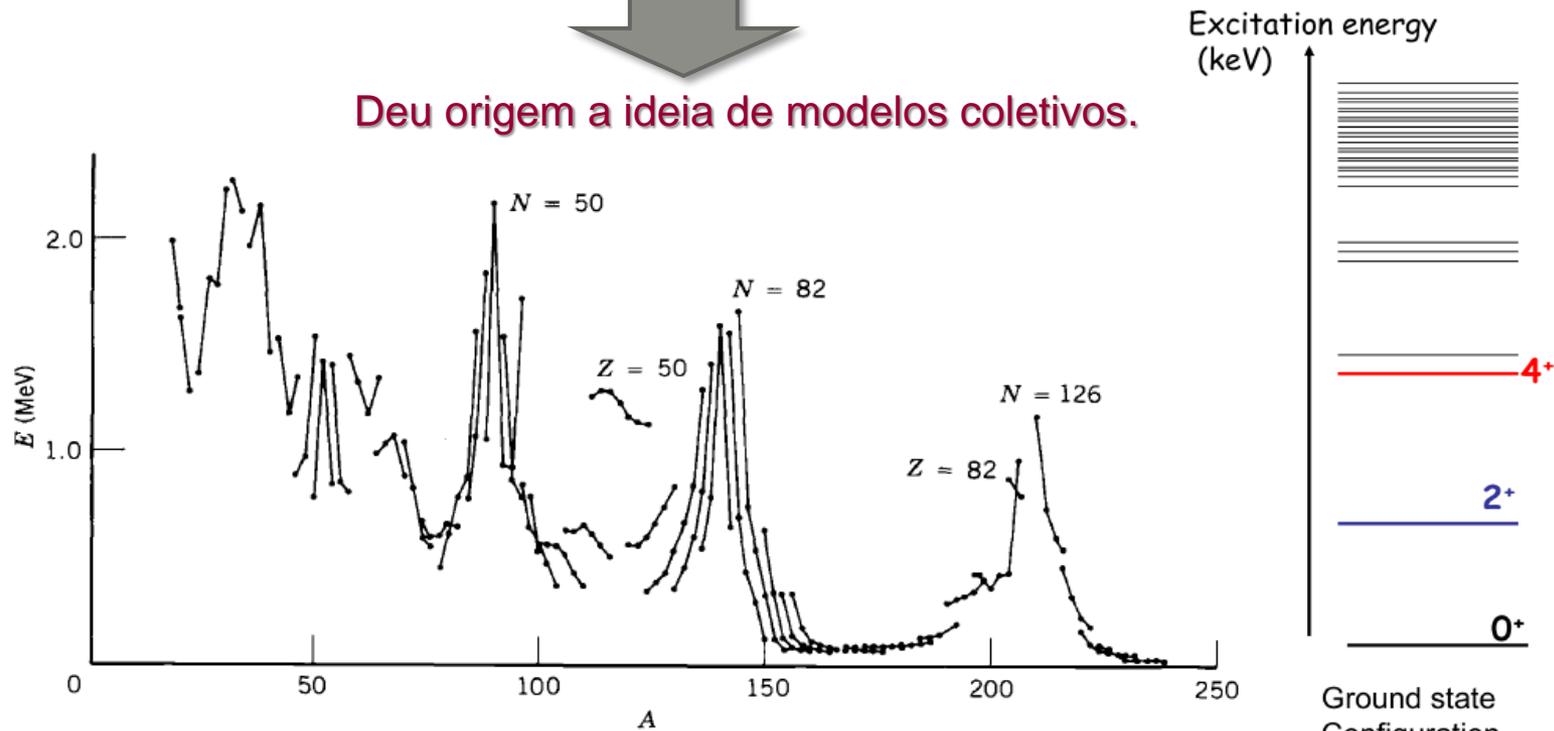
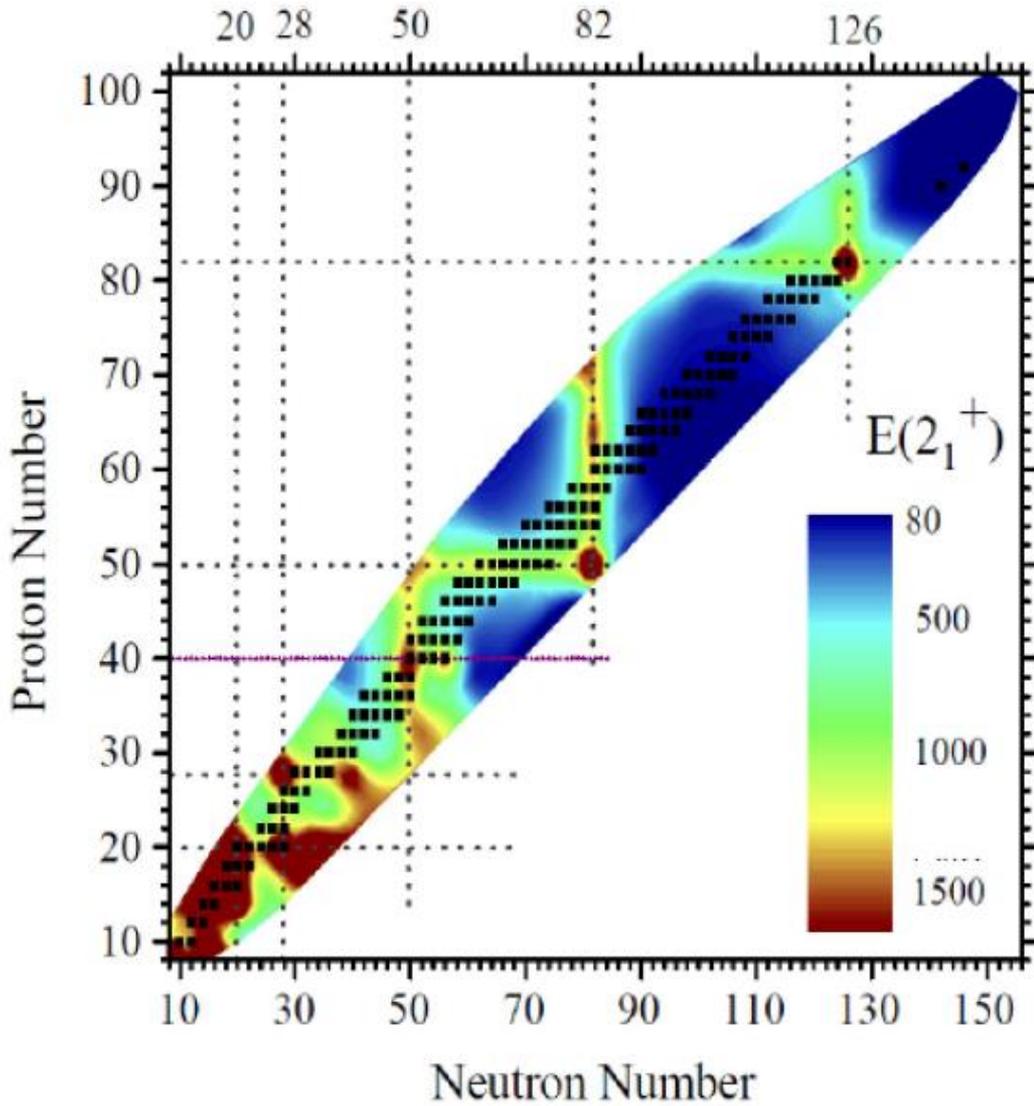


Figure 5.15a Energies of lowest 2^+ states of even- Z , even- N nuclei. The lines connect sequences of isotopes.

Ground state Configuration.
Spin/parity $I^\pi=0^+$;
 $E_x = 0$ keV



Excitation energy (keV)



Ground state
Configuration.
Spin/parity $I^\pi=0^+$;
 $E_x = 0$ keV

This figure thanks to Prof. Patrick (Paddy) Regan of the University of Surrey - Guildford

- ❑ Razão entre energias do estado $J^\pi = 4^+$ e $J^\pi = 2^+$ em núcleos par-par
- ❑ Note o comportamento dos núcleos com $A=150$ e 190 e $A>220$

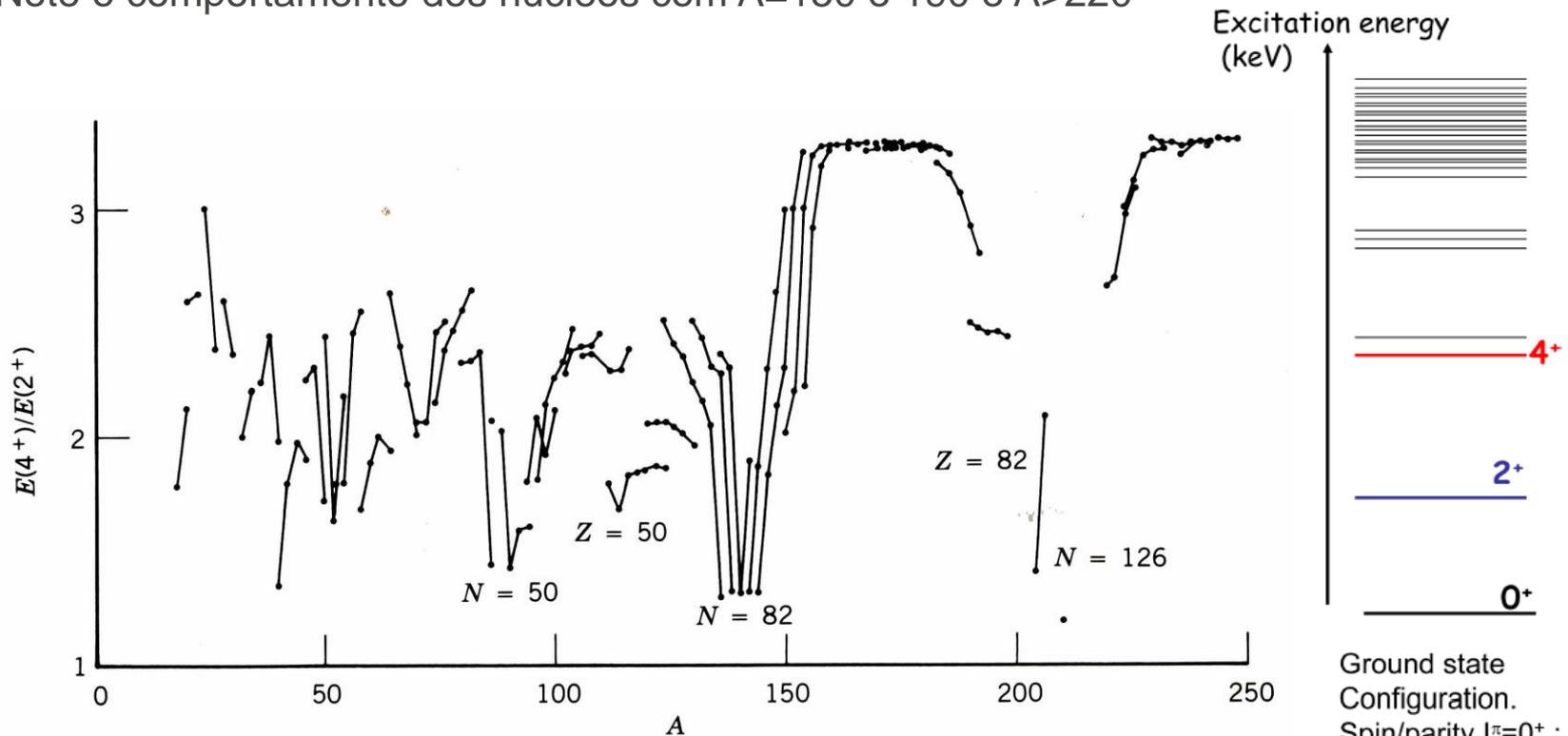
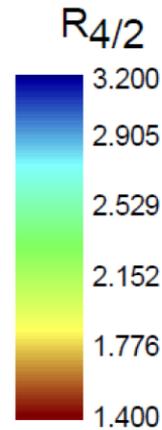
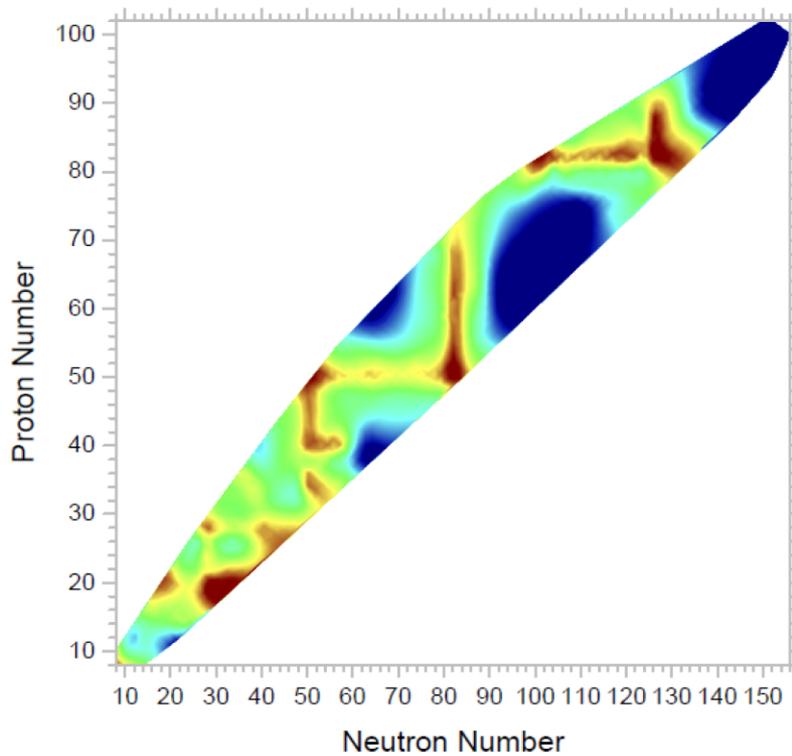


Figure 5.15b The ratio $E(4^+) / E(2^+)$ for the lowest 2^+ and 4^+ states of even- Z , even- N nuclei. The lines connect sequences of isotopes.

Ground state Configuration.
Spin/parity $I^\pi=0^+$;
 $E_x = 0$ keV

4+/2+ energy ratio:
mirrors 2+ systematics.



Excitation energy (keV)



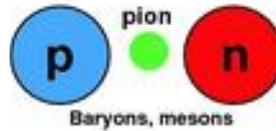
Ground state
Configuration.
Spin/parity $I^\pi=0^+$;
 $E_x = 0$ keV

QCD

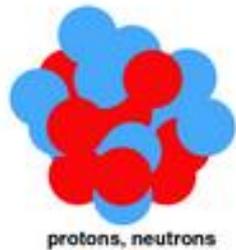


Ab Initio

Few-body theories

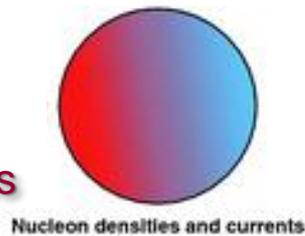


Modelo de Camadas
Single-particle



Modelo de gota Liquida

Densidades e correntes nucleonicas



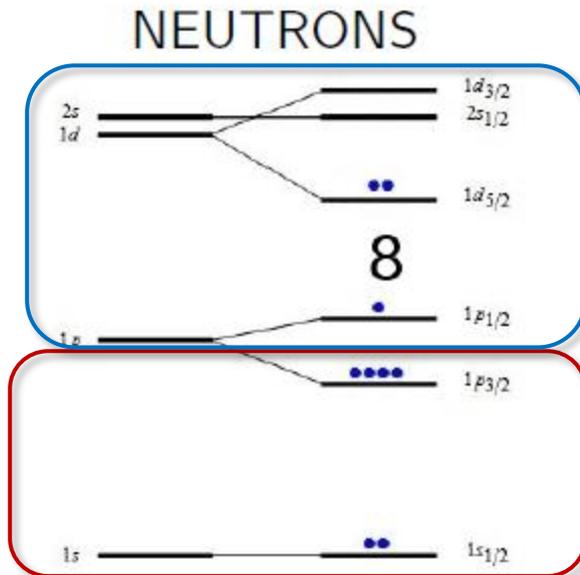
Modelos coletivos



Modelos alternativos

Caroço inerte e espaço de configurações em núcleos leves

- ❑ Podemos então considerar que o caroço inerte seriam os orbitais: $1s_{1/2}$ e $1p_{3/2}$.
- ❑ O espaço de configurações seria então dado pelos orbitais: $1p_{1/2}$ $1d_{5/2}$ $2s_{1/2}$ e $1d_{3/2}$
- ❑ Teríamos 3 nêutrons ativos e 4 quatro possíveis orbitais.
- ❑ O número de configurações possíveis seria: $\sim 4^3 = 64$
- ❑ Se consideramos apenas o orbital $1s_{1/2}$ como caroço inerte teríamos 7 nêutrons ativos e 5 orbitais, $5^7 = 78.125$ configurações.
- ❑ E se ainda levássemos em conta a possibilidade dos prótons também se excitarem ?



Espaço de configurações

Caroço inerte

Como tratar interações residuais

- ❑ A ideia é então considerar o caroço inerte e as interações residuais sejam dadas pelos nucleons livres no espaço de configurações.
- ❑ A questão seria apenas como lidar com as interações residuais dos nucleons de valência (nucleons fora da caroço).
- ❑ Duas possibilidades:
 - 1) usando modelos empíricos, onde as interações seriam ajustadas para reproduzir os níveis de energia experimentais. Funciona bem para a região de energia onde que foram utilizados no ajuste mas falha para prever os outros estados.

 - 2) Ab-initio models (Modelos de primeiros princípios). Nesse modelo as interações residuais seriam dadas pelo que se conhece da força nuclear. Esse modelo tem sido desenvolvido e está melhorando.

GFMC (Green Function Monte Carlo) Ab initio

- Cálculos de No-core ab-initio

$$H = \sum_i K_i + \sum_{i<j} v_{ij} + \sum_{i<j<k} V_{ijk}$$

- Potencial NN Argonne V 18 com interação nn-np-pp, isospin, componente tensorial, spin-spin etc.

AV18 is a direct fit to the Nijmegen data base:

1787 pp, 2514 pn, 1 nn data for $E_{Lab} < 350$ MeV ~ 40 parameters; $\chi^2/\text{d.o.f.} = 1.09$

Typical of 1990's NN potentials

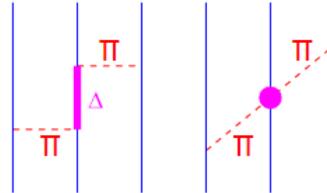
R.B. Wiringa, V.G.J. Stoks, and R. Schiavilla, Phys. Rev. C 51, (1995)



- Potencial de três corpos Illinois-7

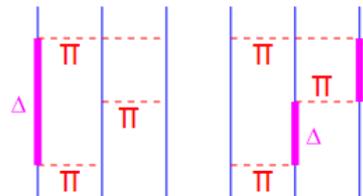
$V_{ijk}^{2\pi}$: Fujita-Miyazawa + s-wave term; in most V_{ijk}

- Longest ranged V_{ijk}
- Attractive in all nuclei studied.



$V_{ijk}^{3\pi}$: 3π rings with Δ's; new in Illinois V_{ijk}

- Extra p-shell, $|N - Z|$ attraction
- One Δ in energy denominator
- 2 Δ , 3 Δ denominators not yet considered
- $\langle V_{ijk}^{3\pi} \rangle \lesssim 0.1 \langle V_{ijk}^{2\pi} \rangle$



V_{ijk}^R : represents all else including relativistic effects – purely central and repulsive

3-4 Couplings adjusted to fit 17 nuclear levels for $A \leq 8$

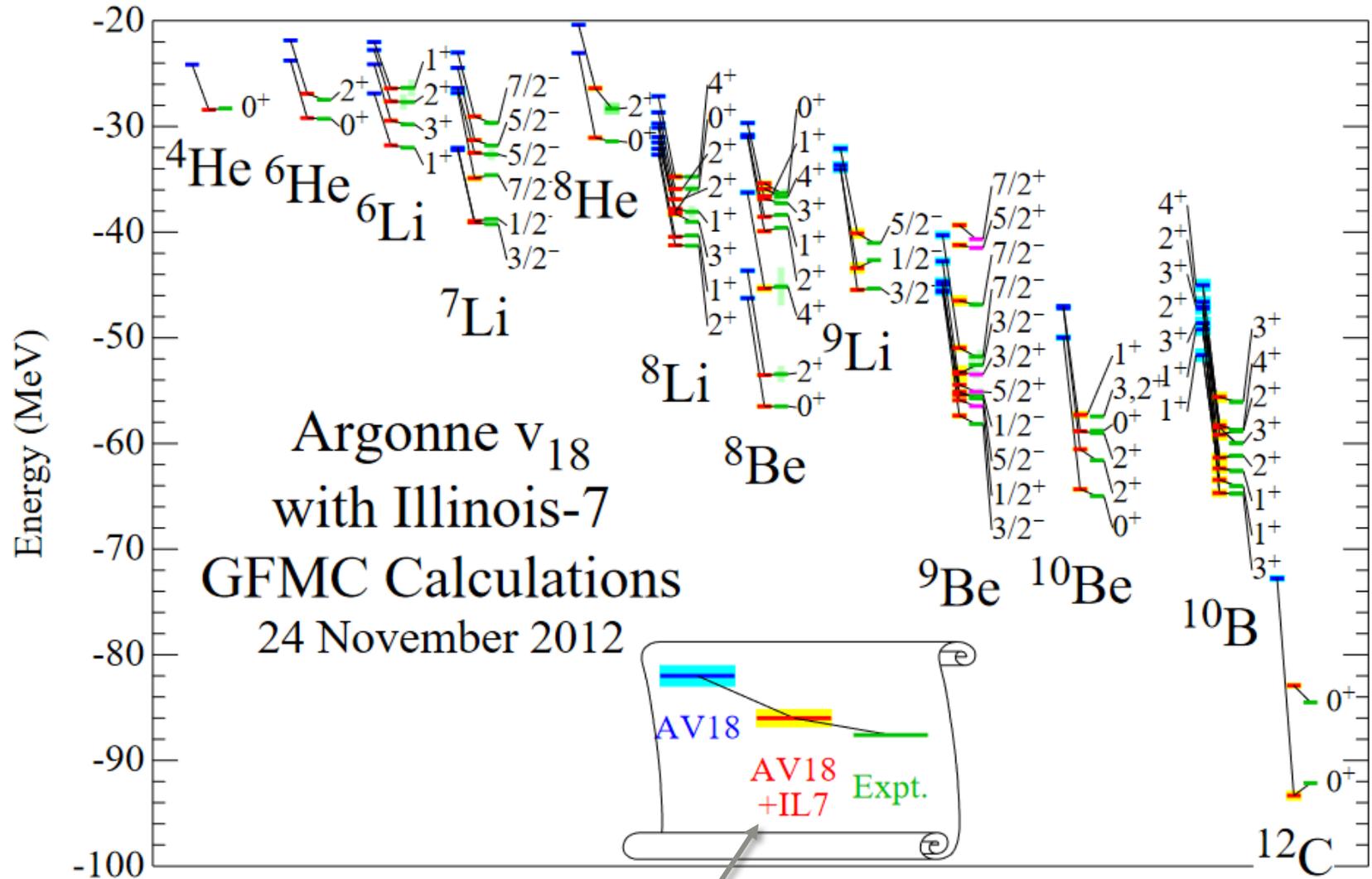
131,072 PROCESSORS OF BG/P

Argonne's IBM Blue Gene/P



GFMC Calculations of Carbon

Steven C. Pieper, Physics Division, Argonne National Laboratory



Importância da interação residual de 3 e 4 corpos

- ❑ Núcleos com $A > 80$, devem ser tratados como sistemas de muitos corpos e a ideia o modelo de gota líquida deve mais razoável do que o modelo de single-particle.
- ❑ Se pudermos tratar o núcleo como gota líquida, é de se esperar que a superfície dos núcleos pesados possam se movimentar quando excitamos esses núcleos.
- ❑ Temos dois tipos de movimentos coletivos quando os núcleos são excitados:
Vibracional e Rotacional



Modelo Coletivo nuclear

- ❑ Proposto por Bohr & Mottelson em 1953
- ❑ Nesse modelo o núcleo é considerado como um líquido incompressível que pode ter movimento de rotações e vibrações.
- ❑ Esses movimentos geram novos níveis de energias (estados excitados)
- ❑ A validade desse modelo depende se cada modo de movimento coletivo pode ser tratado como independentes.
- ❑ Funciona melhor para núcleos bastante deformados.



James Rainwater
(1917 – 1986)
U.S.A



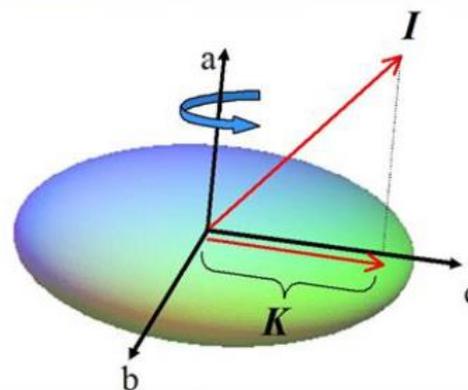
Aage Bohr
(1922 –
Denmark



Ben Mottelson
(1926 –
USA / Denmark



Premio nobel
em 1975



- ❑ Excitação por Vibração: Também conhecido como excitação de fónon (phonon).
- ❑ Todos nucleons participam de um movimento vibracional com modos específicos de vibração.
- ❑ Excitação por Rotação: Também conhecida como excitação de róton.
- ❑ Movimento de rotação com a participação coletiva dos nucleons ou de poucos nucleons de valência.

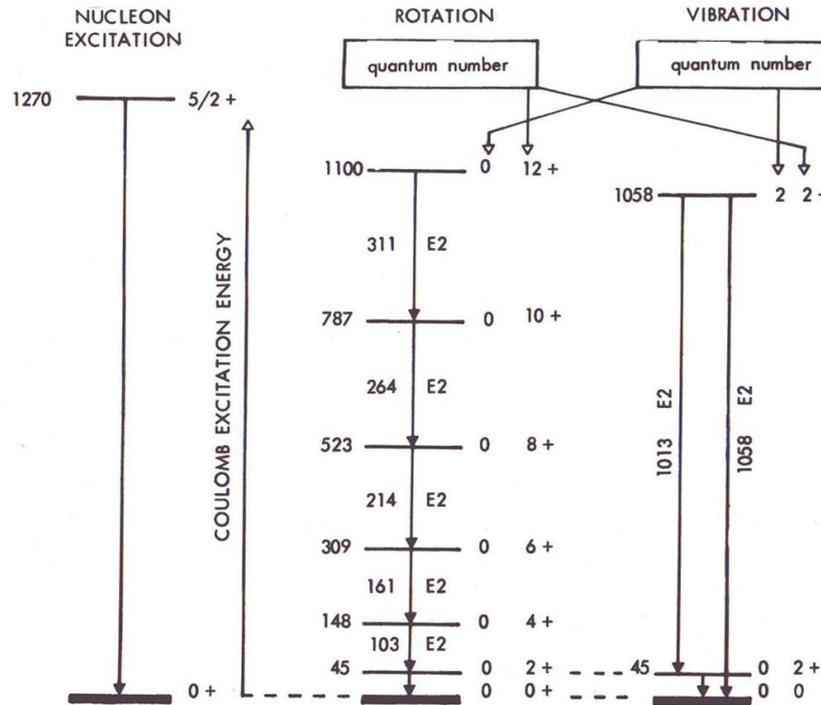


FIG. 11.7. Nucleonic, rotational, and vibrational levels observed in ^{238}U ; energy in keV. (From E. K. Hyde.)

Vibração nuclear (excitação de fônon)

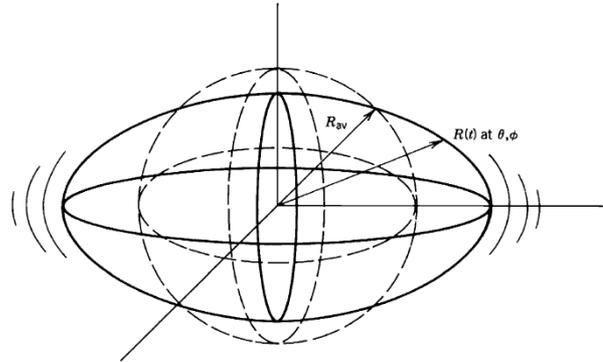


Figure 5.17 A vibrating nucleus with a spherical equilibrium shape. The time-dependent coordinate $R(t)$ locates a point on the surface in the direction θ, ϕ .

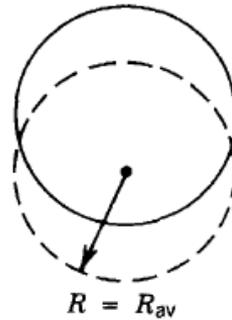
- ❑ No movimento coletivo de vibração o raio do núcleo varia com o tempo em torno de um raio médio.

$$R(\theta, \phi, t) = R_{avg} + \sum_{\lambda=1}^{\Lambda} \sum_{\mu=-\lambda}^{\lambda} \alpha_{\lambda\mu}(t) Y_{\lambda\mu}(\theta, \phi)$$

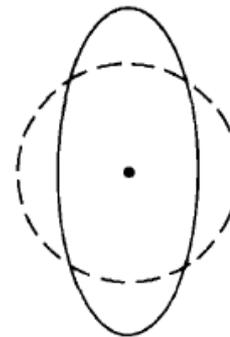
- ❑ λ são momentos angulares relacionados aos modos de vibração:
- ❑ Os coeficientes podem variar com o tempo (movimento multipolares)
- ❑ Assim como a unidade de energia eletromagnética é chamada de fóton, a unidade de energia de vibração é chamada de fônon.
- ❑ Vibrações mecânicas podem estar associadas a vibrações de fônons.
- ❑ Adicionar $\lambda = 2$ corresponderia a adicionar um fônon de quadrupolo.

Vibração nuclear (excitação de fônon)

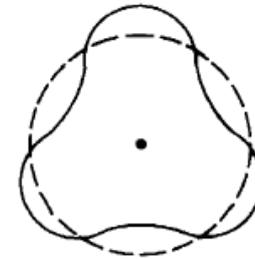
- As deformações com diferentes fônons:



$\lambda = 1$
(Dipole)



$\lambda = 2$
(Quadrupole)

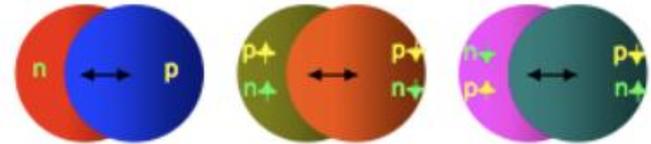


$\lambda = 3$
(Octupole)

$\lambda = 1$

Vibração de dipolo: Observada em situações especiais.

Núcleos exóticos ricos em nêutrons ou prótons :



$\lambda = 2$

Vibração quadrupolo: É a mais comum. Adiciona-se duas unidades de fônons. Como $\pi = (-1)^\lambda$, então a paridade é sempre positiva.

$\lambda = 3$

Vibração Octopolar: A paridade é sempre negativa.

Vamos adicionar um fónon quadrupolar a outro fónon quadrupolar: dois fónons:

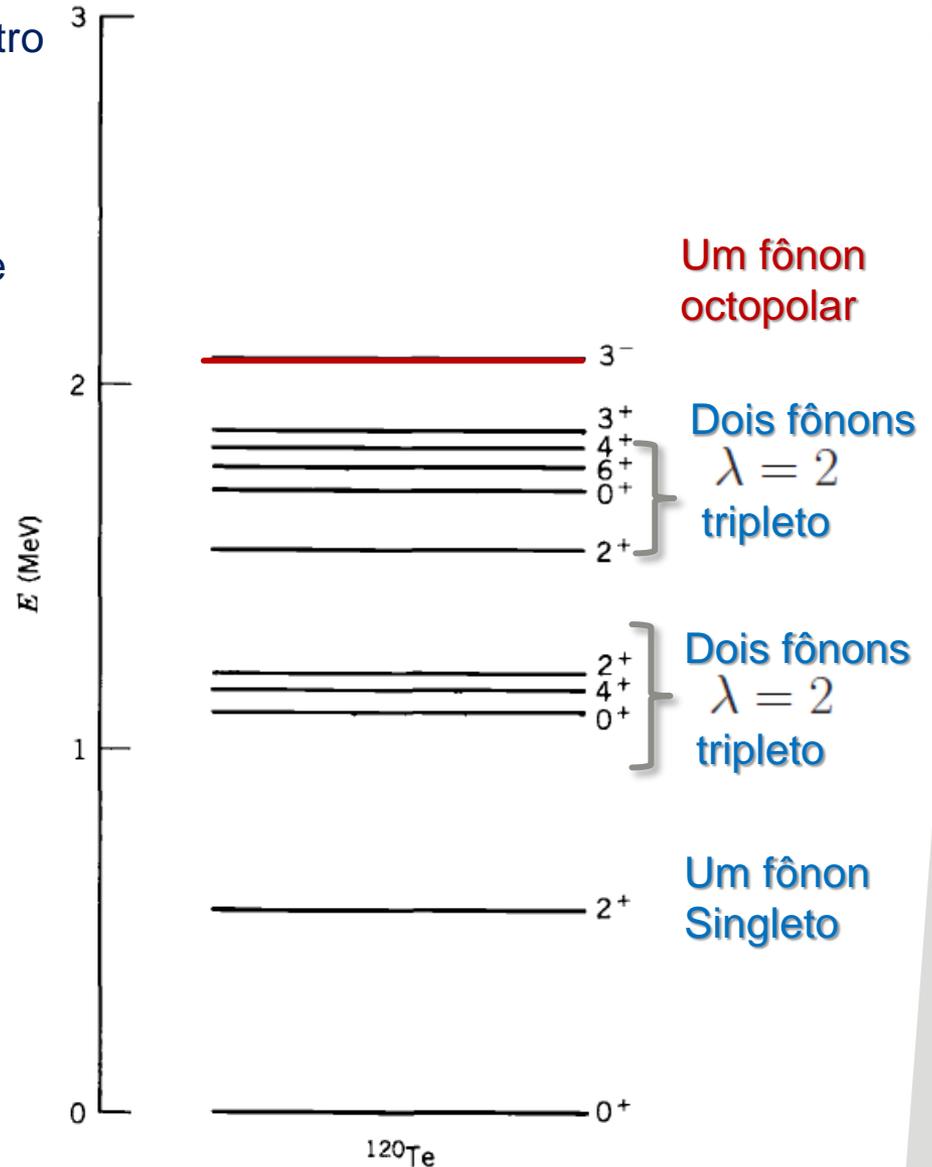
$$\vec{\lambda} = \vec{\lambda}_1 + \vec{\lambda}_2 = \vec{2} + \vec{2}$$

Teremos então as possíveis combinações de estados excitados:

$$I^\pi = 4^+, 3^-, 2^+, 1^-, 0^+$$

Mas para fónons de quadrupolo apenas as paridades positivas são possíveis

$$I^\pi = 4^+, 2^+, 0^+$$



Deformação e momento de quadrupolo

- Podemos expandir o Raio médio em série polinomiais nas coordenadas esféricas (polinômios de Legendre).
- Para deformações permanentes esses coeficientes não variam com o tempo.
- O que corresponde a uma expansão em multipolos (dipolo, quadrupolo, octopolo)

$$R(\theta, \phi, t) = R_{\text{avg}} + \sum_{\lambda=1}^{\Lambda} \sum_{\mu=-\lambda}^{\lambda} \alpha_{\lambda\mu}(t) Y_{\lambda\mu}(\theta, \phi) \quad \rightarrow \quad R = R_o(1 + \beta_2 Y_{20} + \beta_4 Y_{40})$$

quadrupole: $\beta_2 \rightarrow [3\cos^2(\theta) - 1] \approx Y_{20}$

octupole: $\beta_3 \rightarrow [5\cos^3(\theta) - 3\cos(\theta)]$

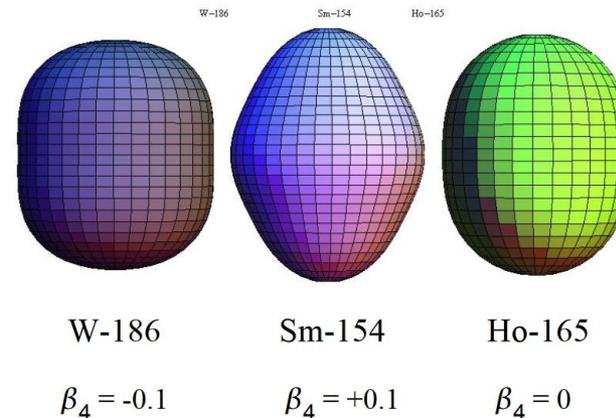
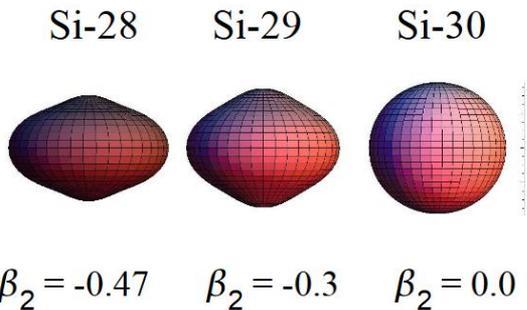
higher order: $\beta_4 \rightarrow [35\cos^4(\theta) - 30\cos^2(\theta) + 3] \approx Y_{40}$

$\beta_2 > 0$

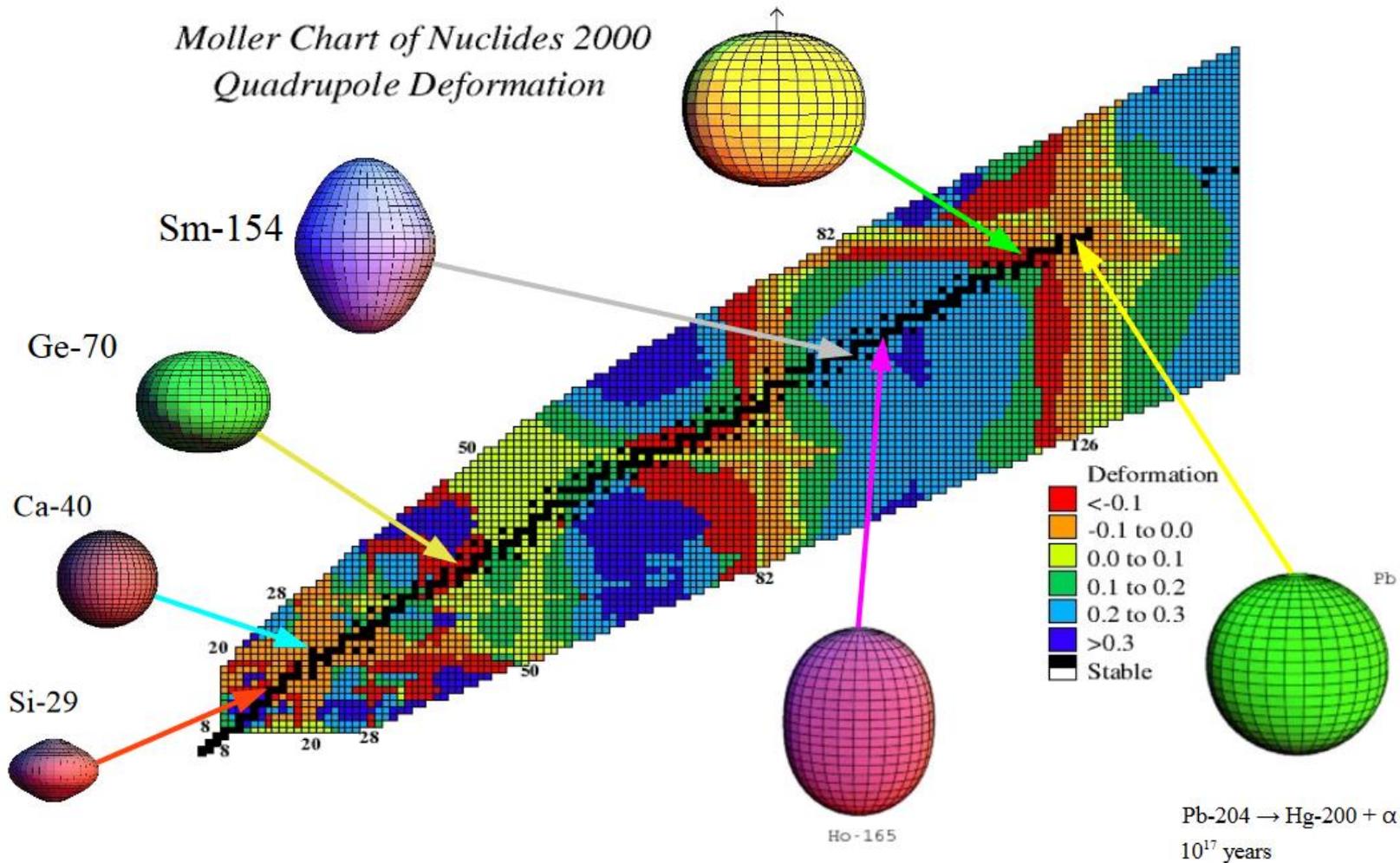
$\beta_2 < 0$

Prolato

Oblato



*Moller Chart of Nuclides 2000
Quadrupole Deformation*



Valor máximo observado para $\beta = \pm 0.6$

Rotação nuclear

- ❑ Para núcleos com $150 < A < 190$ rotação é um importante movimento coletivo pois esses núcleos são bastante deformados já no seu estado fundamental.

- ❑ O raio para uma deformação permanente é dado por:

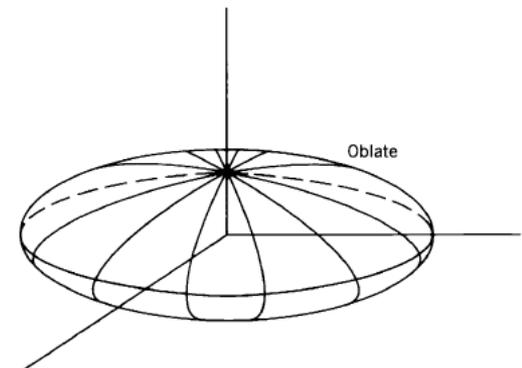
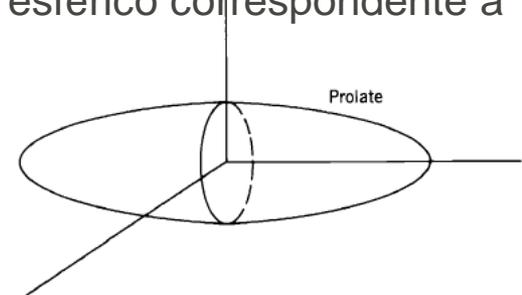
$$R_N(\theta) = R_{\text{avg}}[1 + \beta Y_{20}(\theta)]$$

- ❑ Onde β é o parâmetro de deformação e Y_{20} é o harmônico esférico correspondente a uma deformação quadrupolar (elipsoide).

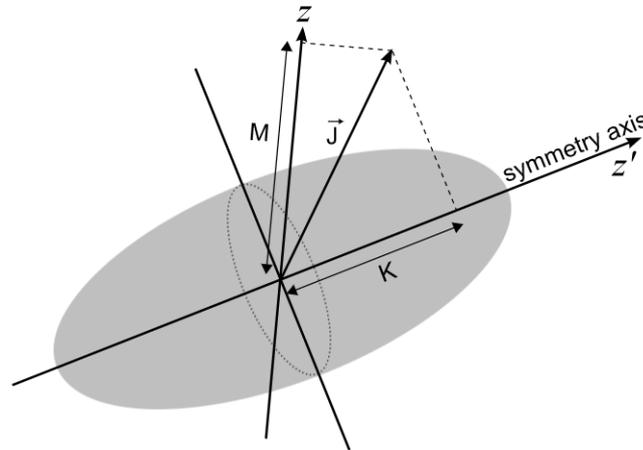
$$\beta = \frac{4}{3} \sqrt{\frac{\pi}{5}} \frac{\Delta R}{R_{\text{avg}}},$$

- ❑ ΔR é a diferença entre o eixo menor e maior.
- ❑ O momento de quadrupolo em termos de beta para essa forma elipsoide (quadrupolar) é então dado por:

$$Q = \frac{3}{\sqrt{5\pi}} R_{\text{avg}}^2 Z \beta \left[1 + \frac{2}{7} \left(\frac{5}{\pi} \right)^{1/2} \beta + \frac{9}{28\pi} \beta^2 \right]$$



- ❑ O núcleo tem uma deformação intrínseca mas pode girar em outro eixo de referência do laboratório.



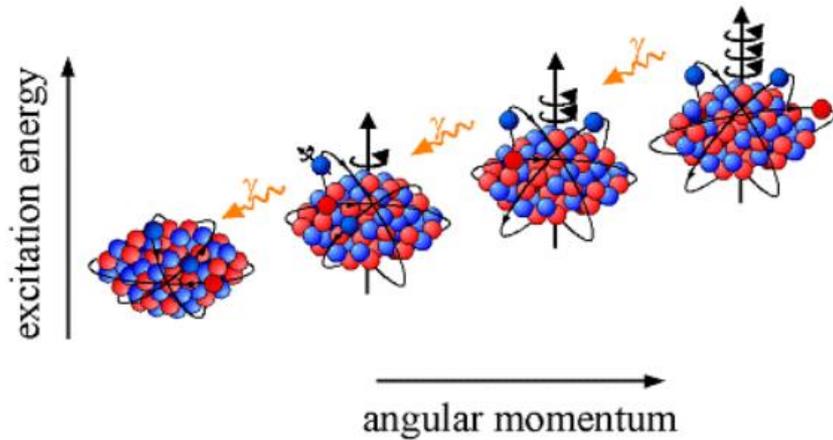
classicamente energia de rotação é dada por: $E_{rot} = \frac{1}{2} I \omega^2$ $L = I \omega$

(I é o momento de inércia e L é o momento angular)

Na mecânica quântica:

$$E_{rot}^{QM} = \frac{1}{2} \frac{\vec{I} \cdot \vec{I}}{I} \omega^2 = \frac{1}{2} \frac{(\vec{I}\omega) \cdot (\vec{I}\omega)}{I} = \frac{1}{2} \frac{\langle (\vec{I}\hbar) \cdot (\vec{I}\hbar) \rangle}{I} = \frac{\hbar^2}{2I} \langle \vec{I} \cdot \vec{I} \rangle = \frac{\hbar^2}{2I} I(I+1)$$

Exemplo núcleo par-par com estado fundamental J=0+



$$E(I) = \frac{\hbar^2}{2\mathcal{I}} I(I+1)$$

Estados excitados devido a rotação aumentam $\Delta J=2$

$$E(0^+) = 0$$

$$E(2^+) = 6(\hbar^2/2\mathcal{I})$$

$$E(4^+) = 20(\hbar^2/2\mathcal{I})$$

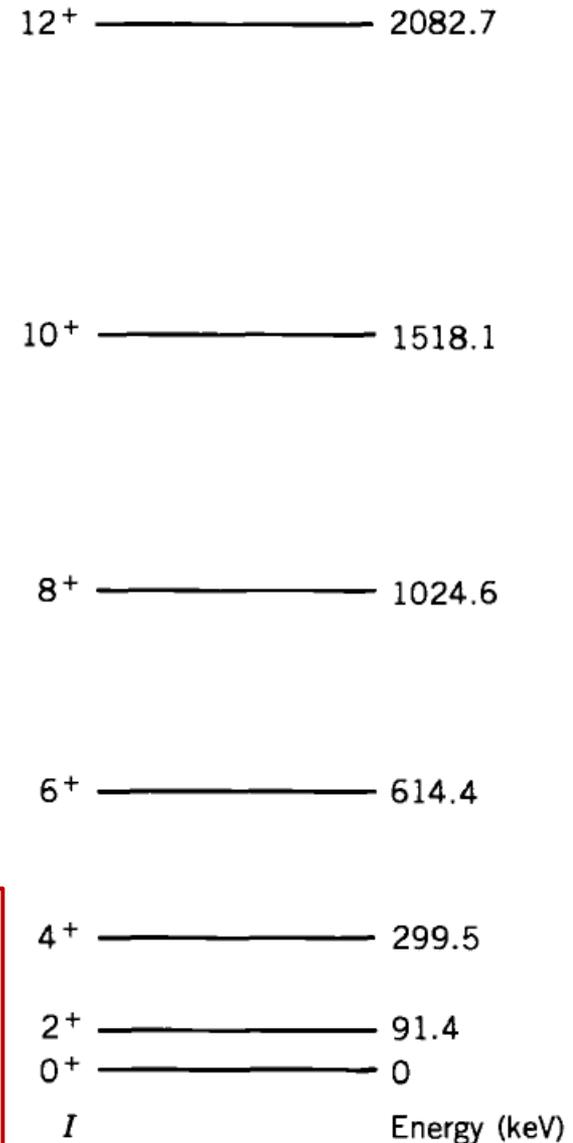
$$E(6^+) = 42(\hbar^2/2\mathcal{I})$$

$$E(8^+) = 72(\hbar^2/2\mathcal{I})$$

Podemos estudar o momento de inércia de um núcleo.

Usando os valores de energia encontramos que:

$$\hbar^2/2\mathcal{I} = 15.2 \text{ keV}$$



Considere um núcleo como sendo um elipsoide rígido de massa $A=170$ e deformação 0.1 :

$$\mathcal{I}_{\text{rigid}} = \frac{2}{5}MR_{\text{av}}^2(1 + 0.31\beta) \quad R_{\text{av}} = R_0A^{1/3}.$$



$$\frac{\hbar^2}{2\mathcal{I}_{\text{rigid}}} \cong 6 \text{ keV}$$

Considerando agora que um núcleo é um fluido dentro de uma casca elipsoide rígido de massa $M=170$ e deformação 0.1

$$\mathcal{I}_{\text{fluid}} = \frac{9}{8\pi}MR_{\text{av}}^2\beta$$



$$\frac{\hbar^2}{2\mathcal{I}_{\text{fluid}}} \cong 90 \text{ keV}$$

Conclusão: O núcleo é algo intermediário entre um fluido e um corpo rígido.

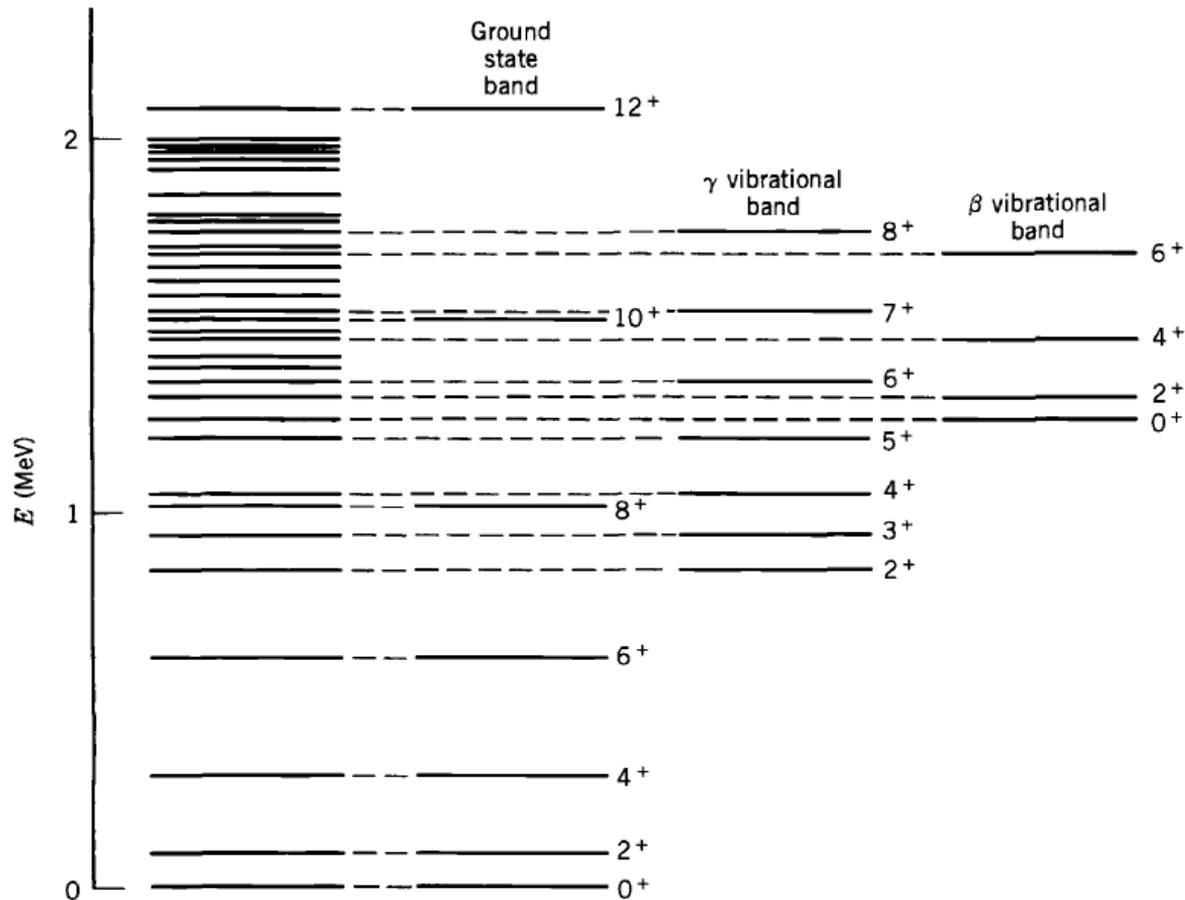


Figure 5.23 The states of ^{164}Er below 2 MeV. Most of the states are identified with three rotational bands: one built on the deformed ground state, a second built on a γ -type vibration (in which the surface vibrates transverse to the symmetry axis), and a third built on a β -type vibration (in which the surface vibrates along the symmetry axis). Many of the other excited states originate from pair-breaking particle excitations and their associated rotational bands.

- ❑ Para estudar os estados excitados coletivos devemos excitar os núcleos.
- ❑ Os núcleos podem ser produzidos em estados excitados por reações nucleares.
- ❑ Os núcleos excitados decaem por emissão de raios gamas.
- ❑ Esses raios gamas são detectados por detectores específicos (Germanio).

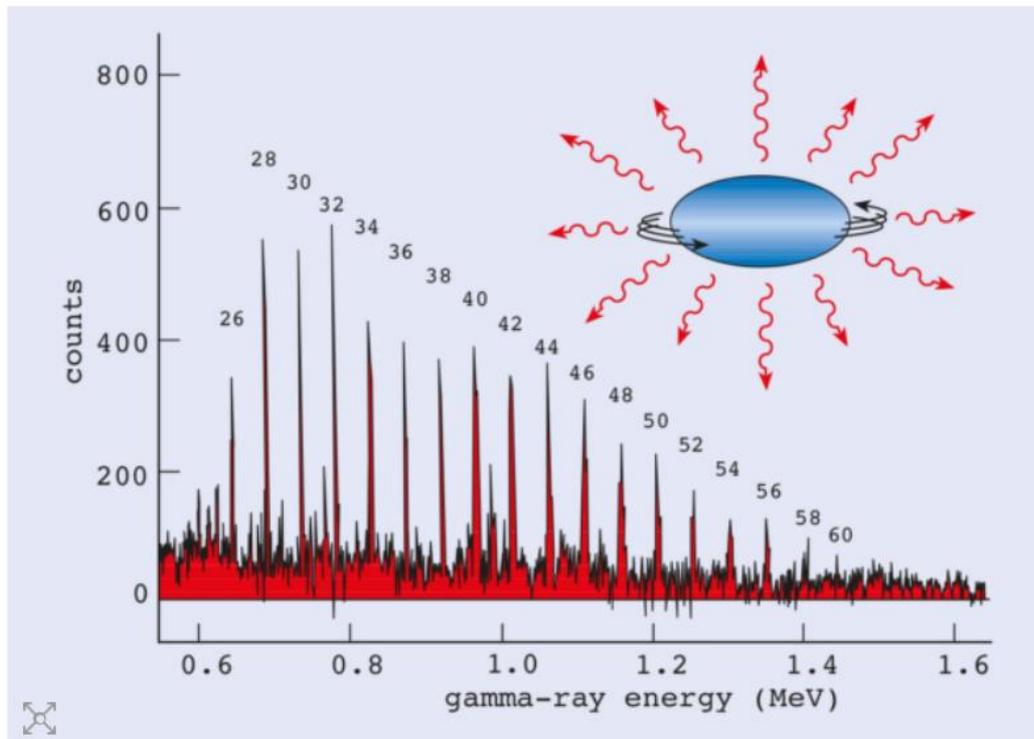
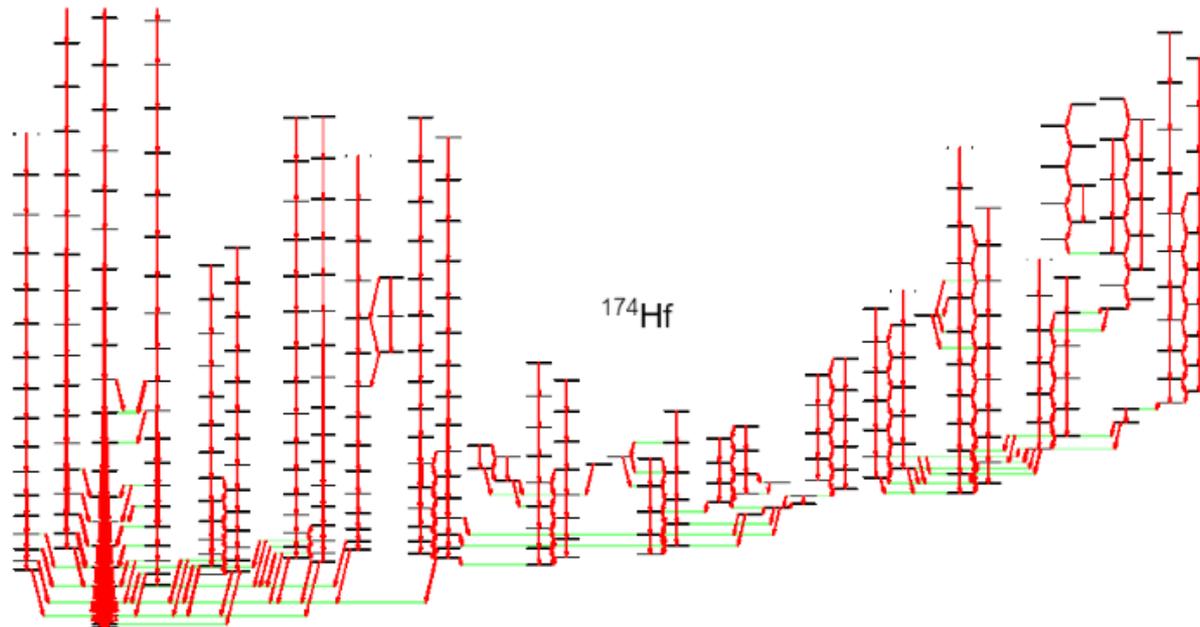


Figure 2: Spectrum of decay. (Courtesy: CLRC Daresbury Laboratory, UK)

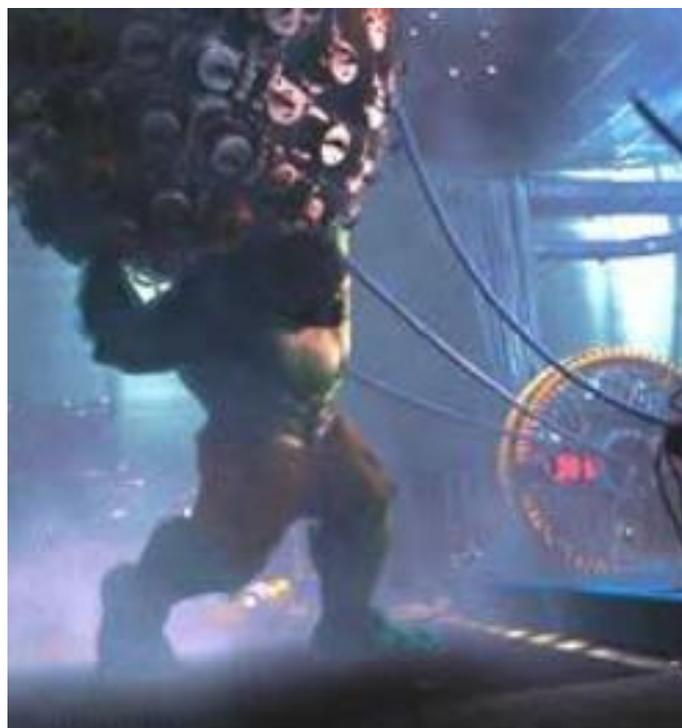
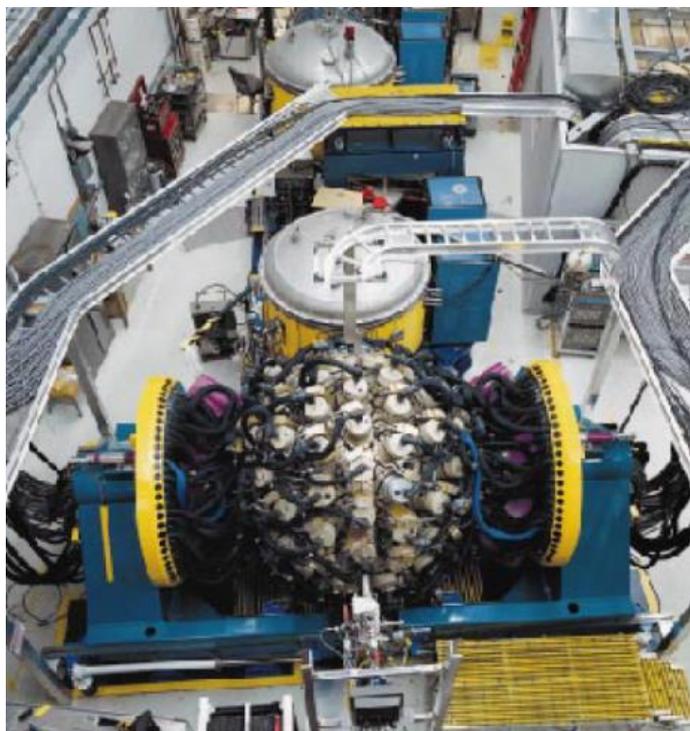
- ❑ A seguir devemos arranjar esses raios gamas de acordo com a sequencia de decaimento.

Collective Level Scheme

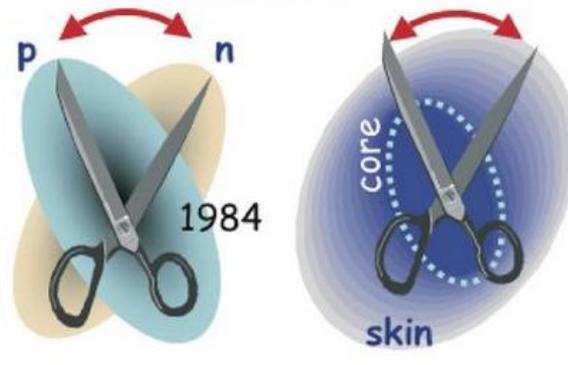
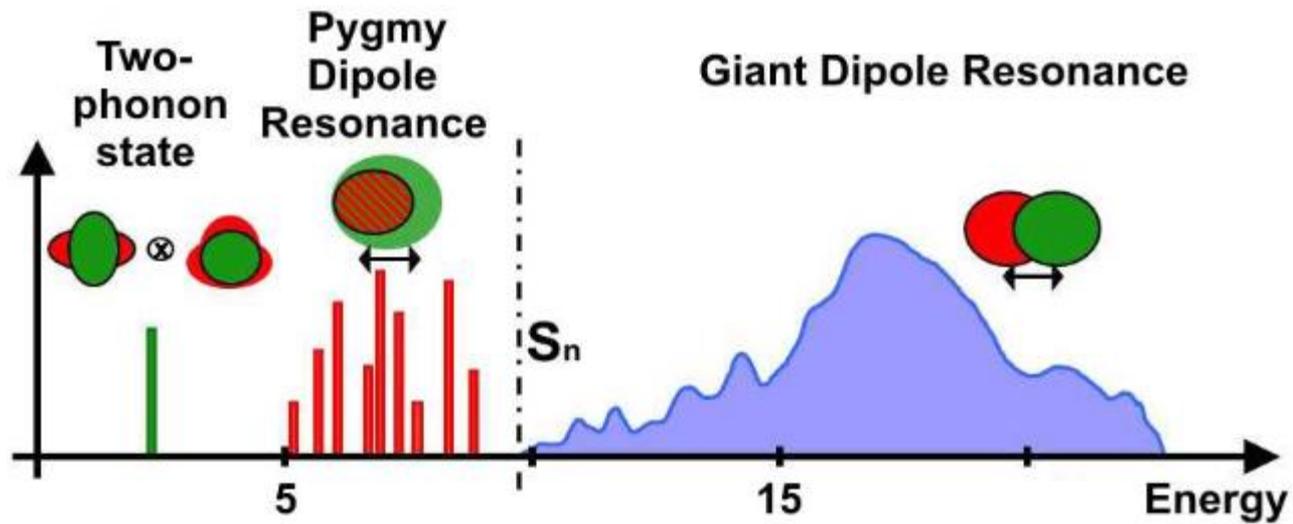


- This nucleus has 347 known levels and 516 gamma rays !

Detector de raios-gama GAMMASPHERE



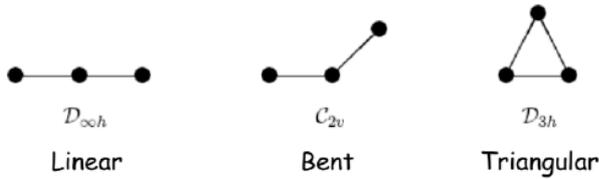
Movimentos coletivos de núcleos exóticos



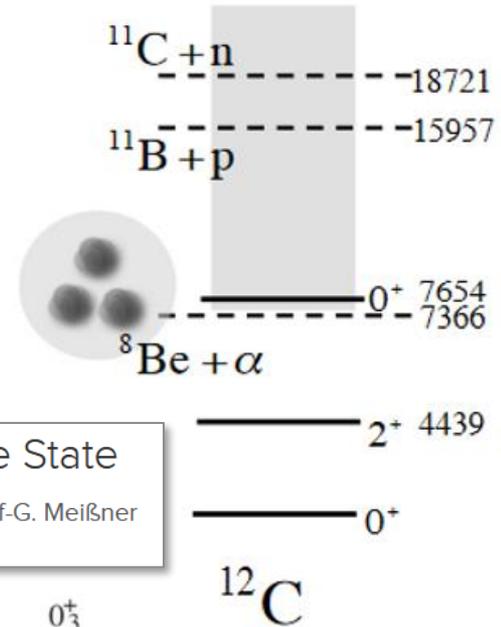
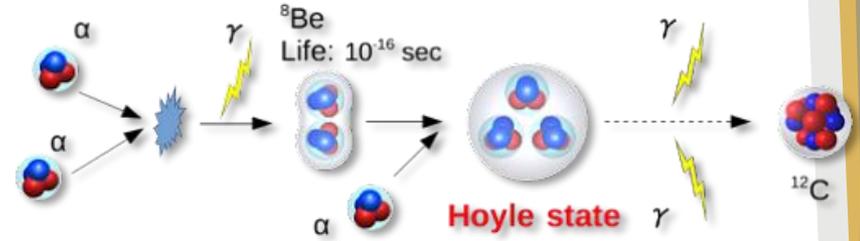
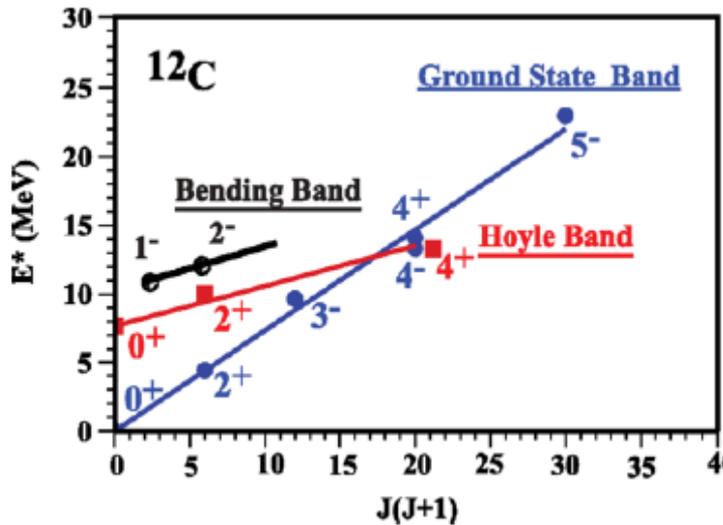
Hoyle State and formation of ^{12}C in stars

Evidence for Triangular D_{3h} Symmetry in ^{12}C

D. J. Marín-Lámbarri, R. Bijker, M. Freer, M. Gai, Tz. Kokalova, D. J. Parker, and C. Wheldon
 Phys. Rev. Lett. **113**, 012502 – Published 30 June 2014

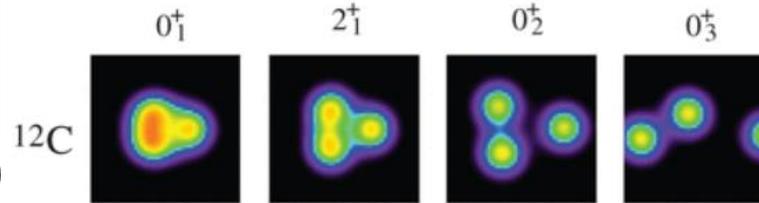


$$E = (\hbar/2\Theta)J(J + 1)$$



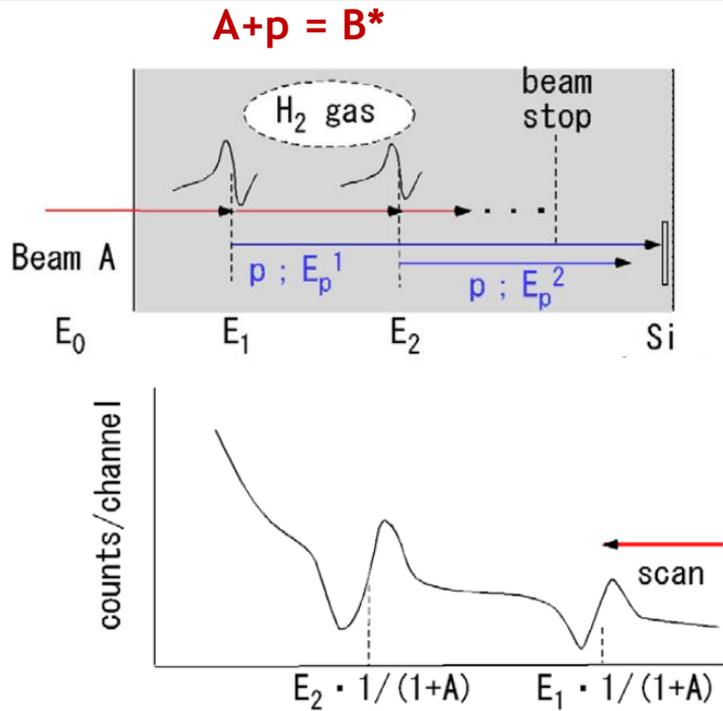
Ab Initio Calculation of the Hoyle State

Evgeny Epelbaum, Hermann Krebs, Dean Lee, and Ulf-G. Meißner
 Phys. Rev. Lett. **106**, 192501 – Published 9 May 2011

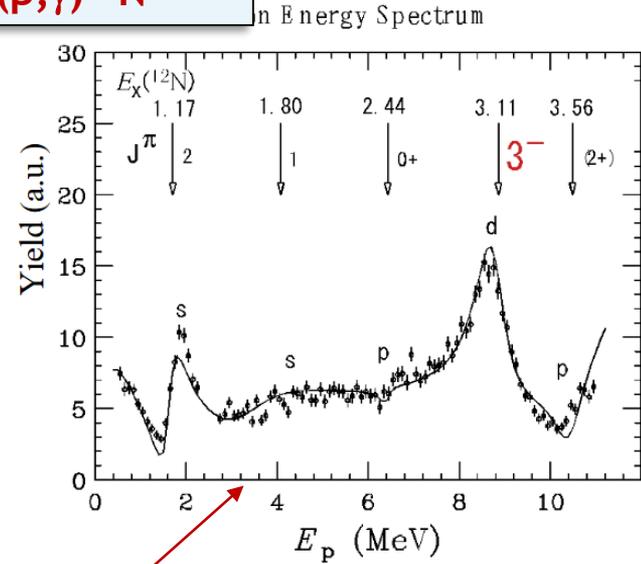


■ We can investigate resonances above $^{11}\text{B}+p$ threshold with resonant scattering

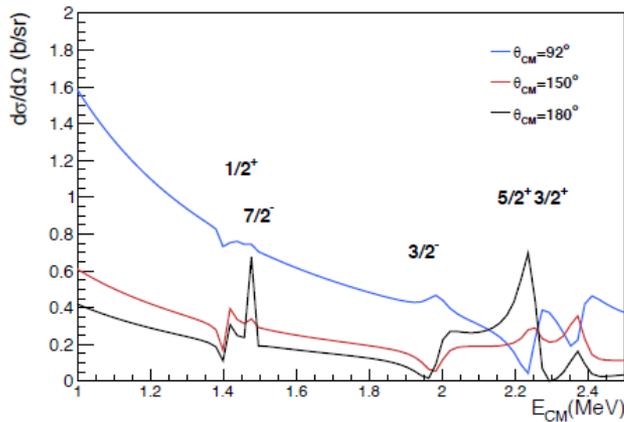
Espalhamento ressonante



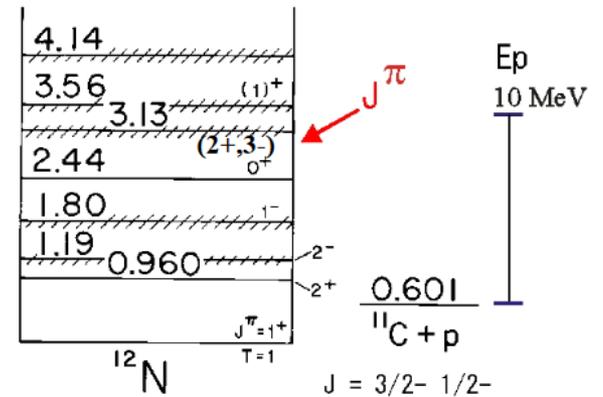
$^{11}\text{C}(p,\gamma)^{12}\text{N}$



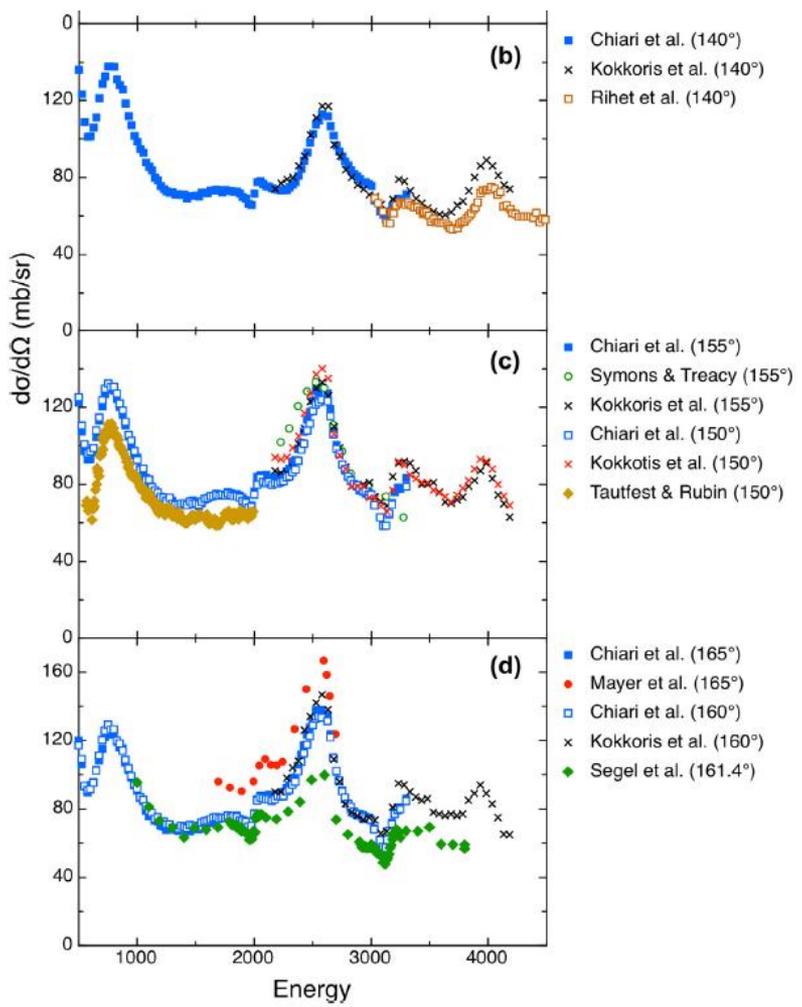
Ajuste cálculos matriz-R



Measuring at
 different angles.



- ❑ Data for resonant scattering of $p+^{11}\text{B}$
- ❑ Direct kinematic
- ❑ From literature

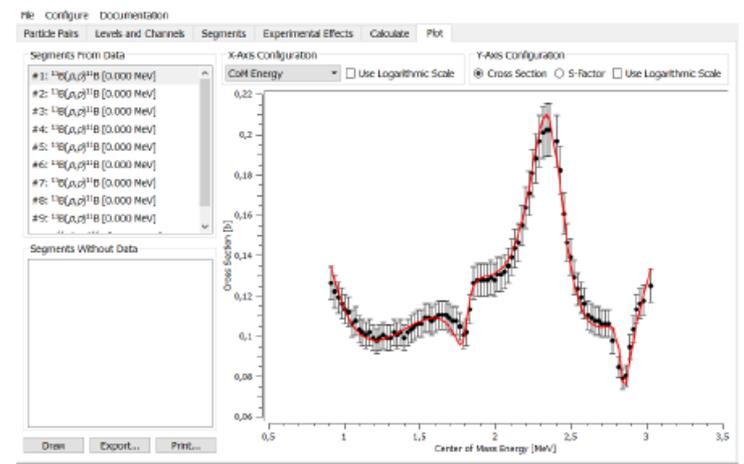


Benchmark measurements of non-Rutherford proton elastic scattering cross section for boron

M. Chiari ^{a,*}, M. Bianconi ^b, I. Bogdanović Radović ^c, M. Mayer ^d

Nuclear Instruments and Methods in Physics Research B 343 (2015) 70–76

- ❑ Analysis with Matrix-R
- ❑ Using Azure2



Análise Matriz-R para $^{11}\text{B}+p$ dados Chiari et al + Kokkoris et al.

Nível	Ex (MeV)	Γ (keV)	J^π
1	16.1060 (8)	5.3 (2)	2^+
2	16.620 (50)	280 (28)	2^-
3	17.230	1150	1^-
4	17.760 (20)	96 (5)	0^+
5	18.160 (70)	240 (50)	(1^+)
6	18.350 (50)	220 (50)	3^-
7	18.350 (50)	350 (50)	2^-
8	(18.390)	43	0^-
9	(18.600) (100)	300	(3^-)
10	(18.710)	100	
11	18.800 (40)	100 (15)	2^+
12	19.200 (600)	1100	(1^-)
13	19.400 (25)	490(30)	2^-
14	19.555 (25)	485 (40)	4^-
15	19.690	230 (35)	1^+
16	20.000 (100)	375 (100)	2^+

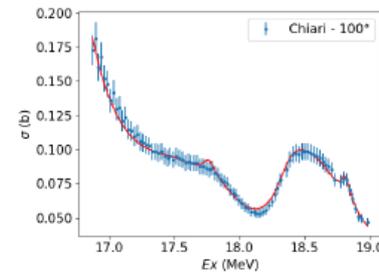
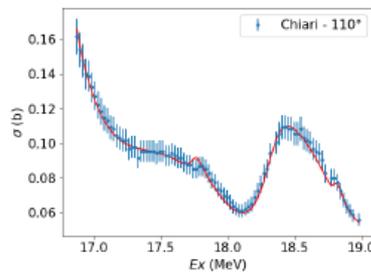
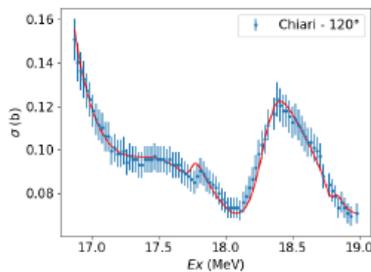
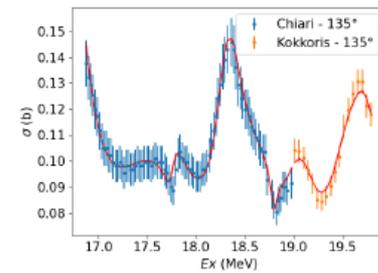
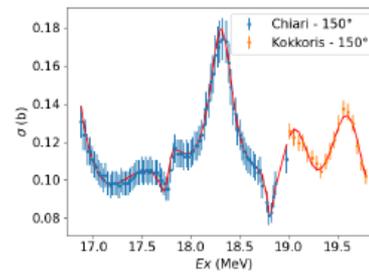
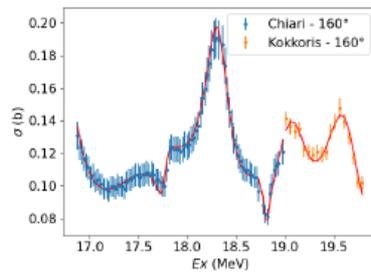
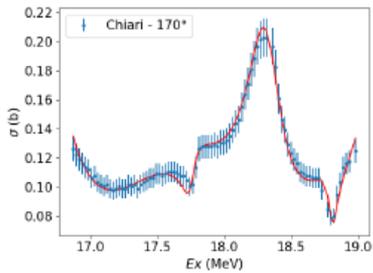
→ Ex = 17.530 MeV

→ Ex = 18.240 MeV $J^\pi = 2+$

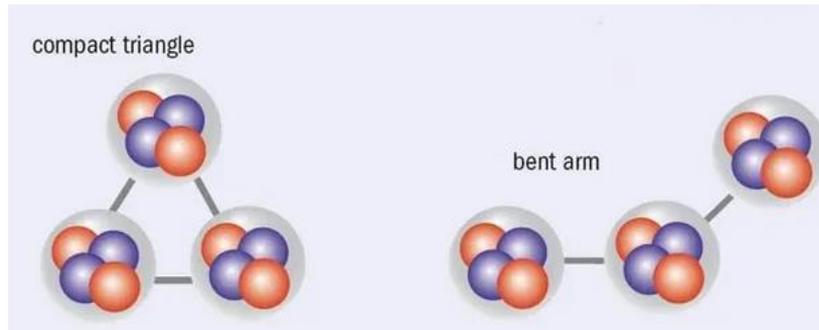
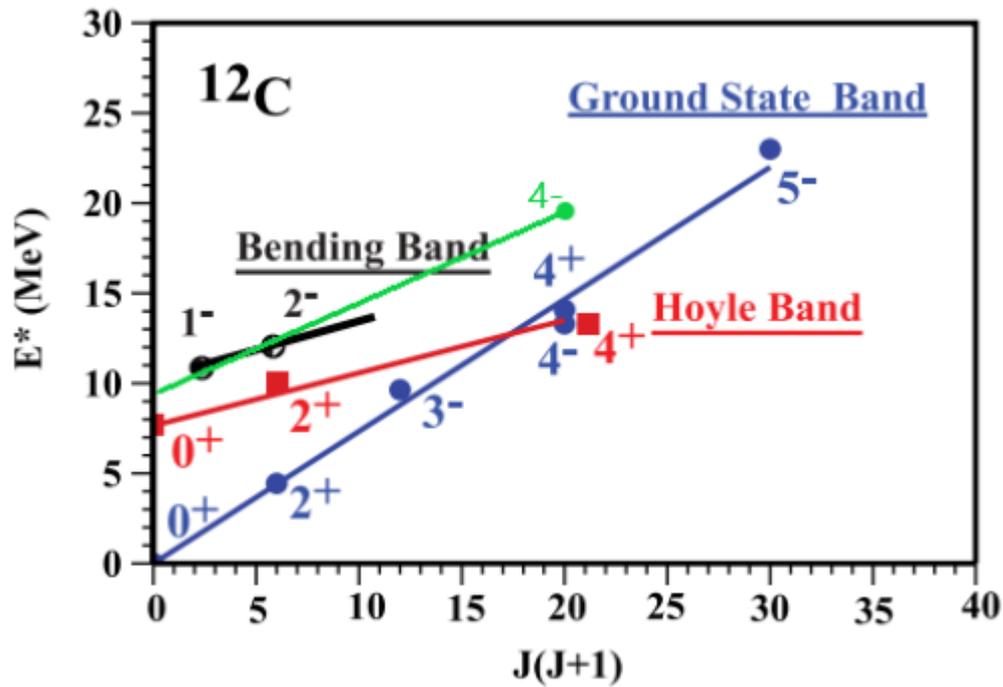
→ Ex = 19.120 MeV $J^\pi = 3-$

→ Ex = 19.650 MeV

θ	χ^2_{red}
170°	0.277
160°_c	0.176
160°_k	0.766
150°_c	0.141
150°_k	0.357
135°_c	0.162
135°_k	0.481
120°	0.243
110°	0.206
100°	0.312
χ^2_{total}	165



□ Inclusion of resonance 4-



This image is a modified version of one in the *Physics World* article by Jenkins and Kirsebom.