PLANTÃO DE DÚVIDAS DO DIA 27 DE SETEMBRO DE 2023

LISTA 4

3) Sejam W_1, W_2 e W_3 subespaços de um espaço vetorial V.

a) $W_1 \cap (W_2 + W_3)$ é necessariamente igual a $W_1 \cap W_2 + W_1 \cap W_3$?

RESOLUÇÃO.

Não. Com efeito, se $V := \mathbb{R}^2$, $W_1 := [(1,1)]$, $W_2 := [(1,0)]$, e $W_3 := [(0,1)]$, então

$$W_1 \cap \underbrace{(W_2 + W_3)}_{=\mathbb{R}^2} = W_1 \cap \mathbb{R}^2 = W_1 = [(1,1)],$$

e

$$\underbrace{W_1 \cap W_2}_{=\{(0,0)\}} + \underbrace{W_1 \cap W_3}_{=\{(0,0)\}} = \{(0,0)\} + \{(0,0)\} = \{(0,0)\}.$$

b) Mostre que

$$W_1 \cap (W_2 + W_1 \cap W_3) = W_1 \cap W_2 + W_1 \cap W_3.$$

RESOLUÇÃO.

Seja $w \in W_1 \cap (W_2 + W_1 \cap W_3)$. Como $w \in W_2 + W_1 \cap W_3$, podemos fixar $u \in W_2$ e $v \in W_1 \cap W_3$ de modo que $w = u + v$. Feito isso, notemos que, como $w \in W_1$, $v \in W_1$, e $u = v - w$, u é a diferença entre dois vetores de W_1 e, portanto, pertence a W_1. Logo, $u \in W_1 \cap W_2$, e, por conseguinte,

$$w = \underbrace{u}_{\in W_1 \cap W_2} + \underbrace{v}_{\in W_1 \cap W_3} \in W_1 \cap W_2 + W_1 \cap W_3.$$

— a partir do que concluímos, em vista da arbitrariedade de w em $W_1 \cap (W_2 + W_1 \cap W_3)$, que

$$W_1 \cap (W_2 + W_1 \cap W_3) \subseteq W_1 \cap W_2 + W_1 \cap W_3.$$

Consideremos, agora, um vetor w' em $W_1 \cap W_2 + W_1 \cap W_3$. Como $w' \in W_1 \cap W_2 + W_1 \cap W_3$, podemos fixar $u' \in W_1 \cap W_2$ e $v' \in W_1 \cap W_3$ de modo que $w' = u' + v'$. Feito isso, observemos que, como $u' \in W_1 \cap W_2$, e $W_1 \cap W_2 \subseteq W_2$, $u' \in W_2$, e, portanto,

$$w' = \overbrace{u'}^{\in W_2} + \overbrace{v'}^{\in W_1 \cap W_3} \in W_2 + W_1 \cap W_3.$$

Por sua vez, como $u' \in W_1 \cap W_2 \subseteq W_1$, e $v' \in W_1 \cap W_3 \subseteq W_1$,

$$w' = \underbrace{u'}_{\in W_1} + \underbrace{v'}_{\in W_1} \in W_1.$$

Logo, $w' \in W_1 \cap (W_2 + W_1 \cap W_3)$. E, como w' em $W_1 \cap W_2 + W_1 \cap W_3$ é arbitrário, disso resulta que $W_1 \cap W_2 + W_1 \cap W_3 \subseteq W_1 \cap (W_2 + W_1 \cap W_3)$.

Por fim, como $W_1 \cap W_2 + W_1 \cap W_3 \subseteq W_1 \cap (W_2 + W_1 \cap W_3)$, e $W_1 \cap (W_2 + W_1 \cap W_3) \subseteq W_1 \cap W_2 + W_1 \cap W_3$, podemos concluir que

$$W_1 \cap (W_2 + W_1 \cap W_3) = W_1 \cap W_2 + W_1 \cap W_3.$$