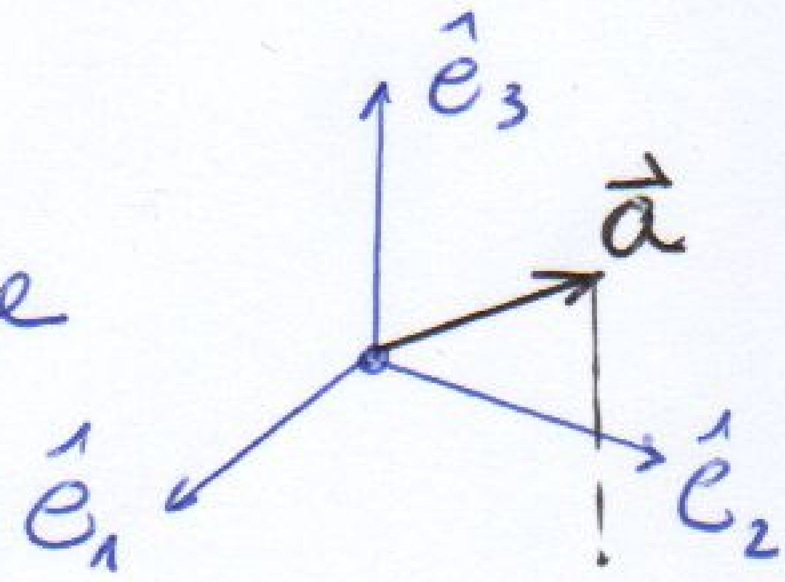
Cap. III - Formalismo

Vetores (usuais, $\vec{F}$, $\vec{E}$, $\vec{r}$, ...)

base



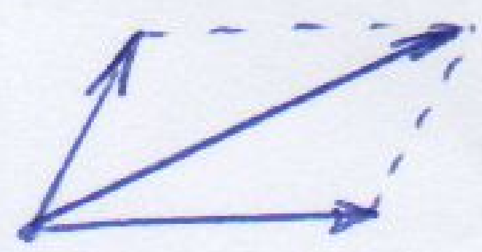
$\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = 0$: ortonormal

$$\vec{a} = a_1 \hat{e}_1 + a_2 \hat{e}_2 + a_3 \hat{e}_3$$

$$\equiv (a_1, a_2, a_3) \text{ ou } \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

- combinaç linear resulta em vetor tb:

1) $\alpha \vec{a} + \beta \vec{b} = \vec{c}$



- produto escalar (def. $\vec{a} \cdot \vec{b} = ab\cos\theta$)

2) $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = (a_1\ a_2\ a_3) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$

3) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$

4) $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$

5) $\vec{a} \cdot \vec{a} = 0 \iff \vec{a} = \vec{0}$

6) $|\vec{a} \cdot \vec{b}|^2 \leq (\vec{a} \cdot \vec{a})(\vec{b} \cdot \vec{b})$: Schwarz

- Transformaç: $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & \\ M_{21} & \ddots & \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \vec{b} = M \vec{a}$$

Será que temos uma estrutura vetorial análoga em Mec. Quântica? Sim!

Em M.Q. $\begin{cases} \text{os objetos são funções: } \phi(x) \\ \text{que sofrem transformação via operadores:} \end{cases}$

$$\varphi(x) = \mathcal{O}\,\phi(x)$$

ex. $\mathcal{O} = p = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}$

1, combinação linear de funç resulta em funç:

$$f(x) + g(x) = h(x)$$

2) Definição do produto escalar (ou produto interno):

$$\int f^*(x)\, g(x)\, dx \equiv \langle f|g\rangle$$ ← um número

que ∃ obviamente desde que a $\int$ exista!

3) $\langle f|g\rangle^* = \left(\int f^* g\, dx\right)^* = \int f g^* dx = \langle g|f\rangle$

4) $\langle f|(\alpha|g\rangle + \beta|h\rangle) = \int f^*(\alpha g + \beta h)\, dx = \dots = \alpha\langle f|g\rangle +$
$+ \beta\langle f|h\rangle.$

cuidado: $\langle \alpha f|g\rangle = \alpha^*\langle f|g\rangle$.

5) $\langle f|f\rangle = \int |f|^2 dx = 0 \Leftrightarrow f \equiv 0$

6) Schwarz:

$$|\langle f|g\rangle|^2 \leq \left|\int f^* g\, dx\right|^2 \leq \left|\int f^* f\, dx\right| \left|\int g^* g\, dx\right| =$$
$$= \langle f|f\rangle\langle g|g\rangle$$

Então, o conjunto das funç quadrado integráveis tem produto escalar finito:

Se $\int |f|^2 dx$ e $\int |g|^2 dx$ convergem, $\int f^* g \, dx$ converge

Então, o conjunto de funç de onda $\int \square$ em M.Q. constitui um espaço vetorial. Ele é denominado espaço de Hilbert.

- normalizaç : $\langle f | f \rangle = \int |f|^2 dx = 1$
- ortogonalizaç : $\langle f_n | f_m \rangle = \delta_{nm}$
- completo : $\{f_n\}$ é completo se, p/ $\forall\, g(x)$,

$$g(x) = \sum_n C_n f_n(x)$$

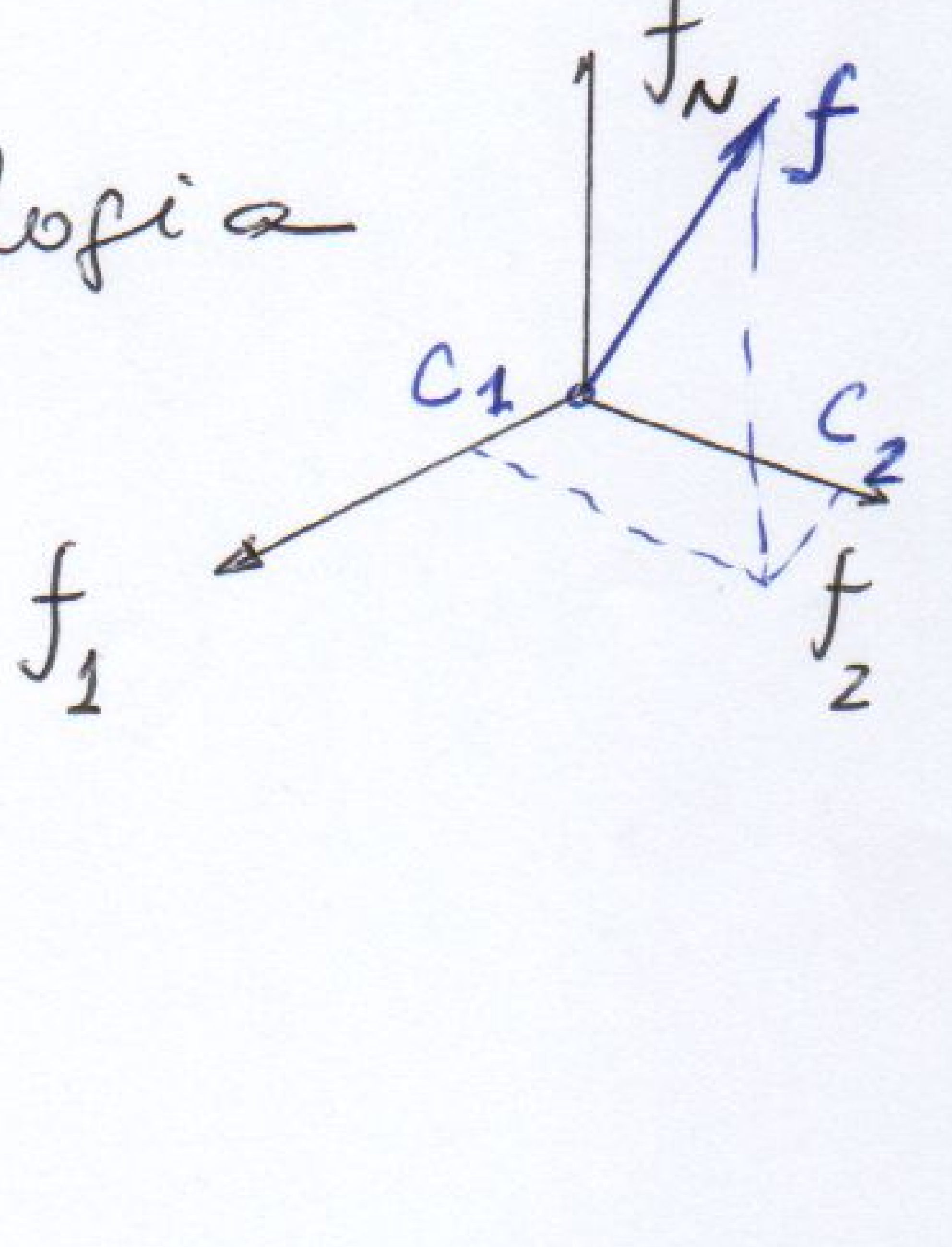
verso

Se $\{f_n\}$ for ortonormal, $C_n = \int f_n^*(x)\, g(x)\, dx$

$$= \langle f_n | g \rangle$$

"projeção"

analogia



Operador hermitiano - observáveis

Valor médio de um operador $\hat{O}$:

$$\langle O \rangle = \int \psi^* \underbrace{\hat{O}\psi} dx \equiv \langle \psi | \underbrace{\hat{O}\psi} \rangle .$$

Mas, se esse valor médio for de uma grandeza física mensurável, então, ele é real

$$\langle O \rangle = \langle O \rangle^*$$

$$\Rightarrow \quad \langle \psi | \hat{O}\psi \rangle = \langle \psi | \hat{O}\psi \rangle^* = \langle \hat{O}\psi | \psi \rangle . \quad (\mathrm{I})$$

Mas, para um $\hat{O}$ $\forall$, observável ou não, definimos um novo operador $\hat{O}^+$, chamado adjunto de $\hat{O}$ ou hermitiano conjugado de $\hat{O}$, tal que

$$\langle f | \hat{O} g \rangle \equiv \langle \hat{O}^+ f | g \rangle = \langle g | \hat{O}^+ f \rangle^*$$

Em particular, p/ $f = g \equiv \psi$, o valor médio de $\hat{O}$ é

$$\langle \psi | \hat{O}\psi \rangle = \langle \hat{O}^+ \psi | \psi \rangle \quad (\mathrm{II})$$

Comparando (I) e (II), vemos que p/ $\hat{O}$ representando um observável, $\hat{O}^+ = \hat{O}$

Postulado: toda grandeza mensurável é representada por um operador hermitiano (observável).

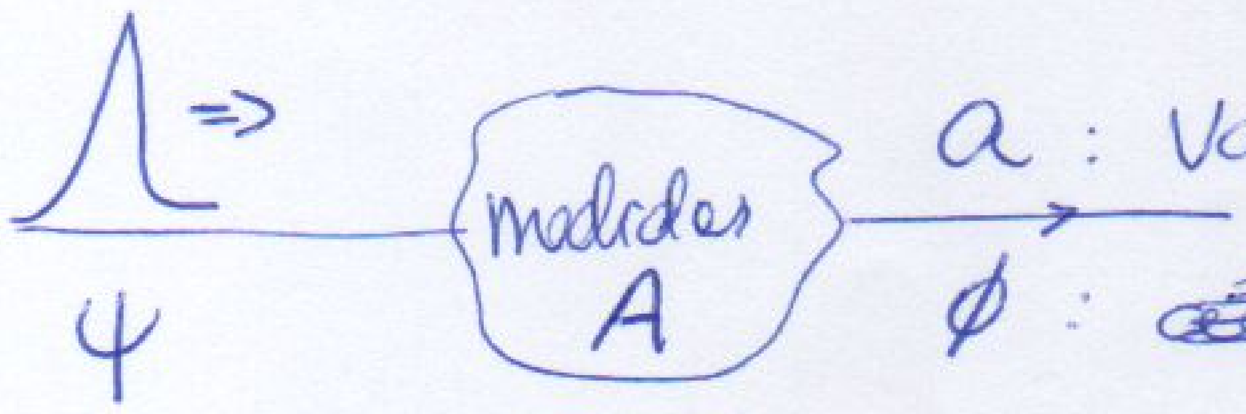
Operadores lineares:

A é linear se $\begin{cases} A(\alpha f) = \alpha A f \\ \text{ou} \\ A(\alpha f + \beta g) = \alpha A f + \beta A g \end{cases}$

Exemplos: x, p, p^2, $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$, $H = \frac{p^2}{2m} + V(x)$

Autoestados ou estados determinados

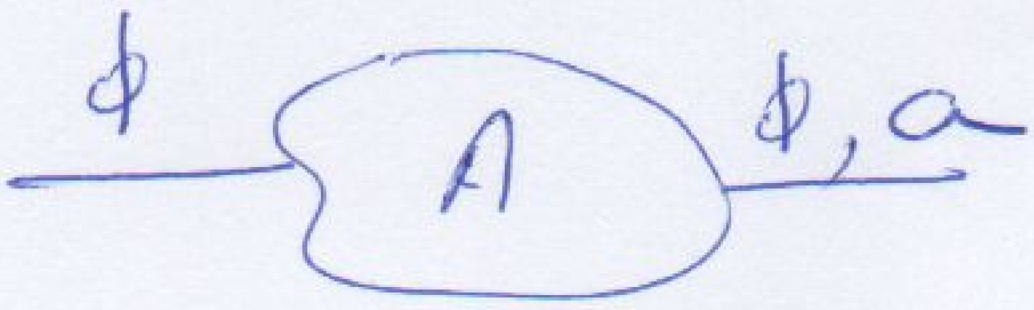
Medida:



a : Valor da medida

ϕ : ~~autoest~~ funç de onda após a medida

Será que $\exists$ um ψ especial, particular, que toda vez que ele é medido sempre fornece o mesmo valor a? SIM!



Se vale a em $\forall$ medida, em ϕ, $\Delta A = 0$, ou,

$$(\Delta A)^2 = (\langle A^2\rangle_\phi - \langle A\rangle^2_\phi) = 0$$

$$0 = \langle A^2\rangle_\phi - \langle A\rangle^2_\phi = \langle (A - \langle A\rangle)^2\rangle_\phi =$$

$$= \langle \phi | (A-a)(A-a) | \phi \rangle = \langle \psi | \psi \rangle$$

chamo $(A-a)\phi = \psi$

Mas $0 = \langle \psi | \psi \rangle \Rightarrow \psi = 0 \Rightarrow A\phi = a\phi$

$\Rightarrow$ o estado especial é autoestado de A!

Em geral, observáveis A possuem uma família de autofunç: $\underline{A\phi_n = a_n\phi_n}$

Exemplo $H\phi = E\phi \Rightarrow \{\phi_n, E_n\}$.

Propriedades de A hermitiano e linear

1, autovalores reais

$$A\phi = a\phi \Rightarrow \phi^* A\phi = a\phi^*\phi$$

$$\Rightarrow \int \phi^* A\phi = a\int \phi^*\phi = a$$

Como $\int \phi^* A\phi = \left(\int \phi^* A^+\phi\right)^* = \left(\int \phi^* A\phi\right)^* \Rightarrow \int \phi^* A\phi$ real

$\Rightarrow a$ é real

2) ϕ_n são ortogonais se os a_n são ñ degenerados

$$A\phi_1 = a_1\phi_1 \quad e \quad A\phi_2 = a_2\phi_2 \quad , c/ \; a_1 \neq a_2$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$\int \phi_1^* A\phi_2 = a_2\int \phi_1^*\phi_2 \quad ①$$

$$\int \phi_2^* A\phi_1 = a_1\int \phi_2^*\phi_1$$

$$\Downarrow$$

$$\left(\int \phi_2^* A\phi_1\right)^* = a_1\int \phi_1^*\phi_2 \Rightarrow \int \phi_1^* \overset{A^+=A}{A}\phi_2 = a_1\int \phi_1^*\phi_2 \quad ②$$

Subtraindo ① - ② : $0 = (a_2 - a_1)\int \phi_1^*\phi_2\, dx$

$\therefore$, como $a_1 \neq a_2 \Rightarrow \int \phi_1^*\phi_2\, dx = 0$

3) Combinaç linear de autofuç degeneradas tb é autofunçã:

sejam ϕ_1 e ϕ_2 / $A\phi_1 = a\phi_1$ e $A\phi_2 = a\phi_2$

$$\Psi = \alpha\phi_1 + \beta\phi_2$$

$$A\Psi = \alpha A\phi_1 + \beta A\phi_2 = \alpha a\phi_1 + \beta a\phi_2 = a\Psi$$

4) Se ϕ_1 e ϕ_2 ñ são ortogonais, então, posso criar 2 outras funç que serão:

$$\psi_1 = \phi_1 \quad \text{e} \quad \psi_2 = \alpha\cdot\phi_1 + \beta\phi_2 \quad , \quad \langle\phi_1|\phi_2\rangle \equiv c.$$

imponho que ψ_1 e ψ_2 sejam ortogonais:

$$0 = \langle\psi_1|\psi_2\rangle = \langle\phi_1|\alpha\phi_1 + \beta\phi_2\rangle = \alpha\langle\phi_1|\phi_1\rangle + \beta\langle\phi_1|\phi_2\rangle$$

$$= \alpha + \beta c.$$

Então, basta escolher $\alpha = -\beta c$.

$$\psi_2 = -\beta c\,\phi_1 + \beta\phi_2 = \beta(\phi_2 - c\phi_1)$$

β é determinado por normalizaçã.

Exercícios

3)

1) Como deve ser a para $\mathcal{O} = a\dfrac{d}{dx}$ ser hermitiano?

$$\int f^* \mathcal{O} g\, dx = \int f^* a \frac{d}{dx} g\, dx = \cancel{a f^* g\Big|_{-\infty}^{\infty}}^{\,0} - \int g\, a \frac{df^*}{dx}\, dx$$

$$= \left(-\int a^* g^* \frac{df}{dx}\, dx \right)^* = \left(\int g^* \underbrace{\left(-a^* \frac{d}{dx}\right)}_{= \mathcal{O}^+} f \right)^*$$

Então, se $\mathcal{O} = a\dfrac{d}{dx}$, $\mathcal{O}^+ = -a^*\dfrac{d}{dx}$

P/ que $\mathcal{O}^+ = \mathcal{O} \Rightarrow a = -a^* \Rightarrow a = \alpha i$ (α real)

Assim, $\mathcal{O} = \hbar \dfrac{d}{dx}$ ñ é hermitiano, mas

$p = \dfrac{\hbar}{i}\dfrac{d}{dx}$ é!

2) Seja $B = \alpha A$. Então, $B^+ = ?$

def. $\langle f | \mathcal{O} g \rangle = \langle \mathcal{O}^+ f | g \rangle$

$\langle f | B g \rangle = \alpha \langle f | A g \rangle = \alpha \langle A^+ f | g \rangle =$

$= \alpha \int (A^+ f)^* g\, dx = \int (\alpha^* A^+ f)^* g\, dx = \langle \alpha^* A^+ f | g \rangle$

$\Rightarrow (\alpha A)^+ = \alpha^* A^+$

ou $\langle f | B^+ | g \rangle = \langle g | B | f \rangle^* = \alpha^* \langle g | A | f \rangle^* = \alpha^* \langle f | A^+ g \rangle$

$\Rightarrow B^+ = \alpha^* A^+$

3) Mostre que $(AB)^+ = B^+A^+$

def. $\langle f | \theta g \rangle = \langle \theta^+ f | g \rangle$

$$\langle f | AB g \rangle = \langle (AB)^+ f | g \rangle$$

$$\|$$

$$\langle \underbrace{A^+ f}_{h} | B g \rangle = \langle B^+ h | g \rangle = \langle B^+ A^+ f | g \rangle$$

$$\Rightarrow (AB)^+ = B^+ A^+$$

Note que $\langle f | \theta | g \rangle \equiv \langle g | \theta^+ | f \rangle^* \overset{ou}{=}$

$$= \langle g | \theta^+ f \rangle^* = \langle \theta^+ f | g \rangle$$

Notação de Dirac

Produto escalar:

$$(f,g) = \int f^* g\, dx \equiv \langle f | g \rangle$$

associação : $f^* \rightarrow \underbrace{\langle f|}_{\text{bra}}$ e $g \rightarrow \underbrace{|g\rangle}_{\text{ket}}$

Calculando

$$\langle f | A^+ | g \rangle = \langle g | A | f \rangle^* = \langle g | A f \rangle^* \equiv \langle g | h \rangle^*, =$$

onde $h = Af$. atua em função

Definição: $|h\rangle = A\, |f\rangle$ atua em kets

Mas o que é $\langle h|$?

$= \langle h | g \rangle$ comparando, como $|g\rangle$ é $\forall$,

$$\langle h | = \langle f | A^+$$

Cuidado: • $\langle f | A$ ñ é um operador!

• $\langle f | A | g \rangle$ = é um nº

• o que é $|f\rangle\langle g|$?

$|f\rangle\langle g | h \rangle = \text{nº}\, |f\rangle$, logo,

$|f\rangle\langle g|$ é um operador! $\left(|f\rangle\langle g|\right)^+ = |g\rangle\langle f|$

Espectros Contínuos

Dois exemplos relevantes: $\hat{x}$ e $\hat{p} = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}$

1) $\hat{p}\,\phi_p = \frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}\phi_p = p\,\phi_p(x)$

operador — autofunção — autovalor — índice ← no contínuo

$$\Rightarrow \underline{\phi_p(x) = A\,e^{ipx/\hbar}}$$

c/ $p\ \forall$, inclusive complexo!

- $\phi_p(x) \notin \mathcal{H}$, isto é, não é $\int \square$!
- Restringindo ao conjunto de valores reais de p, podemos definir uma normalização a la Dirac:

$$\langle \phi_{p'} | \phi_p \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \phi^*_{p'}(x)\,\phi_p(x)\,dx = |A|^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(p-p')x/\hbar}\,dx =$$

$$= 2\pi\hbar |A|^2\,\delta(p-p')$$

Escolho $A = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}$ $\Rightarrow$ $\underline{\phi_p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\,e^{ipx/\hbar}}$

p real

Assim, $\langle \phi_{p'} | \phi_p \rangle = \delta(p-p')$, relação similar ao caso discreto qdo $\langle \psi_n | \psi_m \rangle = \delta_{n,m}$.

O conjunto $\{\phi_p(x)\}$ é completo e ortonormal, logo, p/ $f(x)$ $\forall$:

$$f(x) = \int C(p)\,\phi_p(x)\,dp = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int C(p)\, e^{ipx/\hbar}\, dp$$

o coeficiente da expansão, $C(p)$, é obtido assim

$$\int f(x)\, e^{-ip'x/\hbar}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int dx \int C(p)\, e^{i(p-p')x/\hbar}\, dp =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int C(p)\, dp \cdot 2\pi\hbar\, \delta(p-p') = \sqrt{2\pi\hbar}\, C(p)$$

$$\underbrace{C(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int f(x)\, e^{-ipx/\hbar}}_{\text{transf. Fourier inversa}} \equiv \langle \phi_p | f \rangle$$

ou,

dado $f(x) = \int C(p)\,\phi_p(x)\,dp$

$$\Rightarrow \langle \phi_p | f \rangle = \int C(p') \underbrace{\langle \phi_p | \phi_{p'} \rangle}_{\delta(p-p')} dp = C(p)$$

autofunç

2) $\hat{x}\, \phi_{x'}(x) = x'\, \phi_{x'}(x)$

operador

posição — ambos no contínuo

índice

$\Downarrow$

$$x \cdot \phi_{x'}(x) = x' \cdot \phi_{x'}(x)$$

solução: $\phi_{x'}(x) = A(x)\,\delta(x-x')$

de fato, $x \cdot A(x)\,\delta(x-x') = x' A(x)\,\delta(x-x')$

normalizando (Dirac):

$$\langle \phi_{x'} | \phi_{x''} \rangle = \int A^*(x)\, A(x)\, \delta(x-x')\,\delta(x-x'')\, dx =$$

$$= |A|^2\, \delta(x''-x') \quad .$$ Escolho $A = 1$:

$$\underline{\phi_{x'}(x) = \delta(x-x')}$$

$\hat{x}$ é hermitiano $\Rightarrow \{\phi_{x'}(x)\}$ é completo:

"soma" no índice

$$\Psi(x,t) = \int \underset{\text{coef.}}{C(x')}\, \underbrace{\phi_{x'}(x)}_{\text{base}}\, dx' = \int C(x')\,\delta(x-x')\,dx' = C(x)$$

ou $C(x) = \langle \phi_{x'}(x) | \Psi(x,t) \rangle$.

ou seja, os coeficientes são os valores da função.

Outra forma de ver:

$$\Psi(x,t) = \int \underset{\text{coef.}}{\Psi(x',t)}\, \underset{\text{base}}{\delta(x-x')}\, dx'$$

Resumindo: se $A\,\phi_\xi(x) = \xi\,\phi(x)$, $\xi \in$ contínuo

$$\Psi(x,t) = \int C_\xi(t)\, \phi_\xi(x)\, d\xi \;, \quad \text{c/} \; \langle \phi_\xi | \phi_{\xi'} \rangle = \delta(\xi-\xi')$$

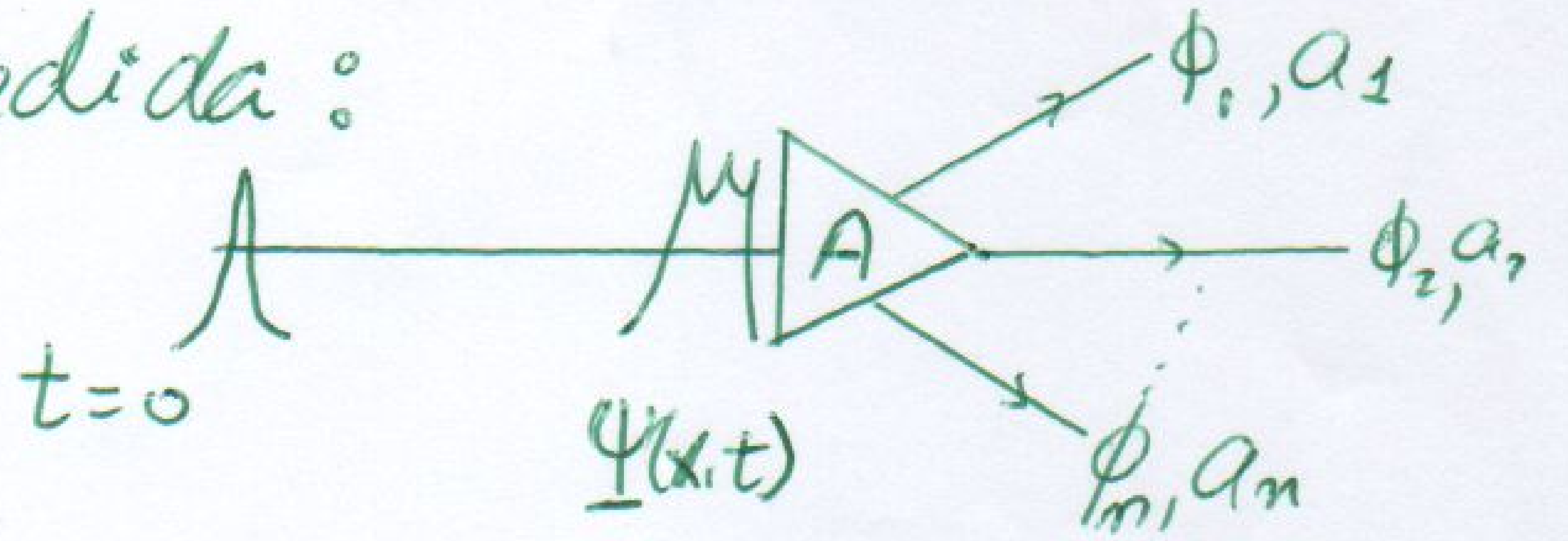
$\Rightarrow C_\xi(t) = \langle \phi_\xi | \Psi(x,t) \rangle$; $d\xi\, |C_\xi(t)|^2$ = probab. de uma medida de A cair no intervalo $(\xi, \xi+d\xi)$.

Interpretação estatística generalizada

Seja A um observável:

ex. $H = \hat{P}^2/2m + V(\hat{x})$, $\hat{L} = \hat{r} \times \hat{p}$, ... $\Rightarrow A = A(\hat{x}, \hat{p})$

Medida:



, onde $\underline{A\phi_n = a_n \phi_n}$

Como $\{\phi_n\}$ é completo,

instante da medida

$$\Psi(x,t) = \sum_n C_n(t)\, \phi_n(x)$$

base dos autoestados de A

$$\langle \phi_m | \Psi(x,t) \rangle = \sum_n C_n(t) \langle \phi_m | \phi_n \rangle = C_m(t)$$

- de $\int \Psi^*(x,t)\Psi(x,t)\,dx = 1 \Rightarrow \sum_n |C_n|^2 = 1.$
- $\langle A \rangle_\Psi = \langle \Psi | A\Psi \rangle = \sum_{n,m} C_m^* C_n \langle \phi_m | A \phi_n \rangle =$

$$= \sum_{m,n} C_m^* C_n \langle \phi_m | a_n \phi_n \rangle = \underline{\sum_n |C_n|^2 a_n}$$

expressão válida qdo sabemos os ϕ_n. ← útil

∴, $|C_n(t)|^2$ é a probab. de uma medida de A, feita em t, resultar no autovalor a_n.

Mas, e se soubermos as auto funç do H:

$$H\,\psi_n = E_n \psi_n$$

como fica $\langle A\rangle_\Psi$?

Já vimos que:

$$\langle A\rangle_\Psi = ? \qquad \Psi(x,t) = \sum_n b_n \underbrace{\psi_n(x)}_{\text{indep. do tempo}} e^{-iE_nt/\hbar}$$

$$\langle A\rangle_\Psi = \langle \Psi | A\Psi\rangle = \sum_{m,n} b_m^* b_n e^{iE_mt/\hbar} e^{-iE_nt/\hbar} \underbrace{\langle \psi_m | A\psi_n\rangle}_{\equiv A_{m,n}}$$

$$= \sum_{m,n} b_m^* b_n e^{i(E_m-E_n)t/\hbar} A_{mn}$$

depende do tempo, em geral.

el. de matriz

Mas, e se tb tivermos que $A\psi_n = a_n\psi_n$, isto é, ψ_n é auto funç simultâneo de A e H:

$$A_{mn} = \langle \psi_m | A\psi_n\rangle = \langle \psi_m | a_n \psi_n\rangle = a_n \delta_{m,n}$$

$$\therefore \quad \langle A\rangle_\Psi = \sum_n |b_n|^2 \cdot a_n \quad \leftarrow \text{independe do tempo}$$

Veja que, sendo $\Psi_m(x)$ autofunç simultânea de A e H:

$$\Psi(x,t) = \sum_n C_n(t)\,\psi_n(x) \overset{\text{ou}}{=} \sum_m b_m \psi_m e^{-iE_mt/\hbar}$$

$$\forall t \Rightarrow C_n(t) = b_m e^{-iE_mt/\hbar},$$

logo, $|C_n(t)|^2 = |b_n|^2$ e por isso a $\langle A\rangle_\Psi$ independe do tempo.

Qdo isso acontece, isto é, do seu valor médio de A ñ depender do tempo, dizemos que A é uma cte de movimento.

Veja que isso aconteceu porque A e H tiveram um conjunto de autofunç comuns:

$A\psi_n = a_n\psi_n$ e $H\psi_n = E_n\psi_n$.

Qdo é que A e B tem um conjunto de autofunç comuns?

- qdo comutarem - $\Rightarrow$ Então, A é cte de mov. qdo $[H,A]=0$.

Prova: (fraca) $A\phi_n = a_n\phi_n$ e $B\phi_n = b_n\phi_n$, sem degenerescência

$B A\phi_n = a_n B\phi_n = a_n b_n \phi_n$

$A B\phi_n = b_n A\phi_n = b_n a_n \phi_n$

$\Rightarrow AB\phi_n - BA\phi_n = 0$

$\Downarrow$

$\underline{[A,B]=0}$

prova forte

o inverso:

Se $[A,B]=0$ e $A\phi_n = a_n\phi_n$, então,

$B(A\phi_n) = a_n B\phi_n$

$A(B\phi_n) = a_n(B\phi_n) \Rightarrow B\phi_n$ tb é autofunç de A, e com o mesmo a_n

Se ñ tivermos degenerescência, $B\phi_n = \alpha\phi_n$

$\Rightarrow \phi_n$ tb é autofunç de B

Princípio de incerteza

Sejam A e B observáveis:

$$(\Delta A)^2 = \langle \psi | (A - \langle A \rangle)^2 \psi \rangle \equiv \langle f | f \rangle, \quad f = (A - \langle A \rangle)\psi$$

$$(\Delta B)^2 = \langle \psi | (B - \langle B \rangle)^2 \psi \rangle \equiv \langle g | g \rangle, \quad g = (B - \langle B \rangle)\psi$$

Então, $(\Delta A)^2 (\Delta B)^2 = \langle f | f \rangle \langle g | g \rangle \geqslant |\langle f | g \rangle|^2$.

Mas, $|z|^2 = (\mathrm{Re}\, z)^2 + (\mathrm{Im}\, z)^2 \geqslant (\mathrm{Im}\, z)^2 = \left(\frac{z - z^*}{2i}\right)^2$.

Tomando $z = \langle f | g \rangle$, ficamos com

$$(\Delta A)^2 (\Delta B)^2 \geqslant \left(\frac{\langle f | g \rangle - \langle g | f \rangle}{2i} \right)^2$$

$$\langle f | g \rangle = \langle (A - \langle A \rangle)\psi \; (B - \langle B \rangle)\psi \rangle = \langle \psi (A - \langle A \rangle)^{+} (B - \langle B \rangle)\psi \rangle$$

$$= \langle \psi (A - \langle A \rangle)(B - \langle B \rangle)\psi \rangle = \cdots = \langle AB \rangle - \langle A \rangle \langle B \rangle$$

E tb,

$$\langle g | f \rangle = \cdots = \langle BA \rangle - \langle A \rangle \langle B \rangle$$

$\therefore$, $\langle f | g \rangle - \langle g | f \rangle = \langle [A, B] \rangle$

$$\Rightarrow \quad \Delta A \cdot \Delta B \geqslant \left| \frac{\langle [A, B] \rangle}{2i} \right| = \frac{|\langle [A, B] \rangle|}{2}$$

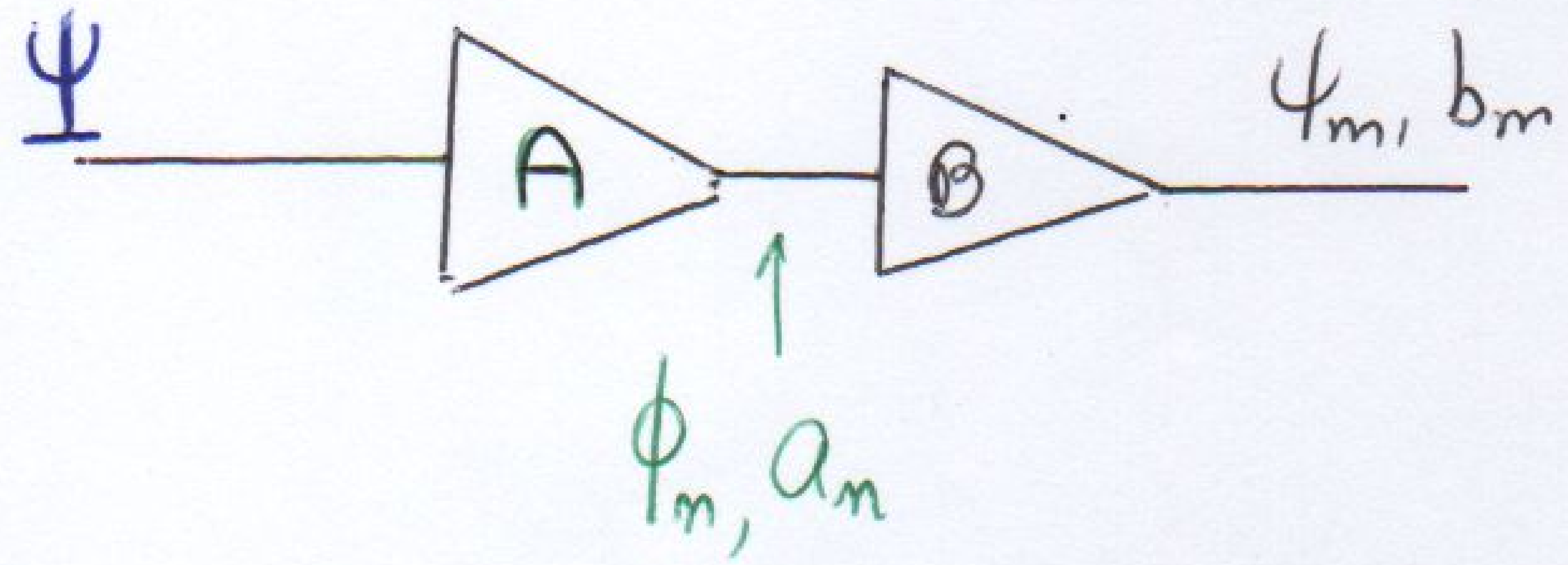
Se $A = \hat{x}$ e $B = \hat{p}$ $\quad \hookrightarrow \quad \Delta x \cdot \Delta p \geqslant \frac{\hbar}{2}$

Por que $\bar{n}$ posso medir A independentemente de B qdo $[A,B] \neq 0$?

caso não degenerado:

Seja A e B observáveis: $A\phi_n = a_n \phi_n$ e $B\psi_m = b_m \psi_m$

1º meço A e logo em seguida B:



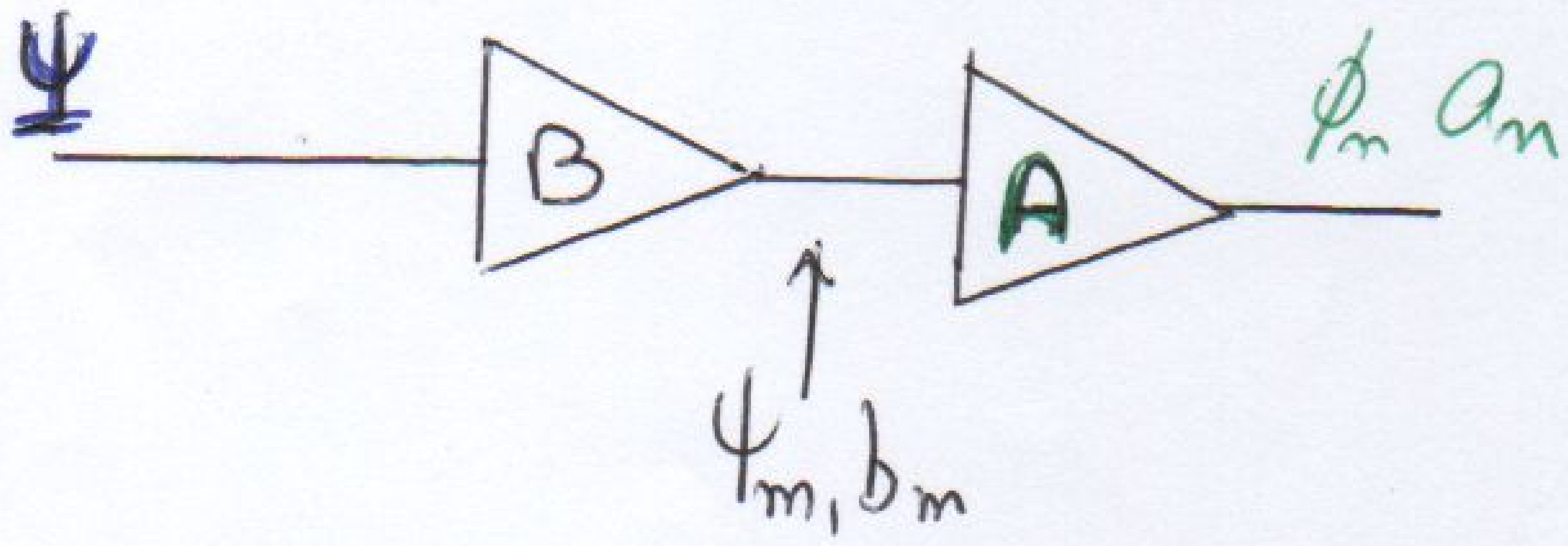
ampl. prob. de sair (ϕ_n, a_n) é $C_n = \langle \phi_n | \Psi \rangle$, $\Psi = \sum_n c_n \phi_n$.

ϕ_n entra em B: $\phi_n = \sum_m d_m \psi_m$

ampl. prob. de sair (ψ_m, b_m) após B, tendo entrado ϕ_n: $d_m = \langle \psi_m | \phi_n \rangle$

Probab. de se obter o par de valores (a_n, b_m). $\Rightarrow$ $P(a_n, b_m) = \left| \langle \phi_n | \psi \rangle \langle \psi_m | \phi_n \rangle \right|^2$.

Agora meço B e logo em seguida A:



ampl. prob. de sair (ψ_m, b_m) após B é $C'_m = \langle \psi_m | \Psi \rangle$

visto que $\Psi = \sum C'_m \psi_m$

ampl. prob. de sair (ϕ_n, a_n) após B:

$$\psi_m = \sum_n d'_n \phi_n \Rightarrow d'_n = \langle \phi_n | \psi_m \rangle$$

$$\Rightarrow P(b_m, a_n) = \left| \langle \psi_m | \Psi \rangle \langle \phi_n | \psi_m \rangle \right|^2 \leftarrow \text{Prob. de sair o par } (b_m, a_n)$$

Ent, $P(b_m, a_n) \neq P(a_n, b_m)$!

a menos que $\{\psi_m\} = \{\phi_n\}$, ou seja, A e B

terem autofunç comuns $\Rightarrow [A, B] = 0 \Rightarrow \Delta A \cdot \Delta B = 0$

—— X ——

Evolução temporal de $\langle A \rangle$

$$A = A(\hat{x}, \hat{p}, t)$$

$$\frac{d}{dt}\langle A \rangle = \frac{d}{dt}\langle \Psi | A \Psi \rangle = \left\langle \frac{\partial \Psi}{\partial t} \middle| A \Psi \right\rangle + \underbrace{\left\langle \Psi \middle| \frac{\partial A}{\partial t} \Psi \right\rangle}_{= \left\langle \frac{\partial A}{\partial t} \right\rangle} + \left\langle \Psi \middle| A \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right\rangle$$

Mas, $i\hbar \partial_t \Psi = H \Psi$

e

$$\langle H\Psi | A\Psi \rangle = \langle \Psi | H^\dagger A \Psi \rangle = \langle \Psi | H A \Psi \rangle, \text{ ent},$$

$$\frac{d}{dt}\langle A \rangle = \frac{1}{i\hbar}\langle [A, H] \rangle + \left\langle \frac{\partial A}{\partial t} \right\rangle$$

Ent, se A ñ depender explicitamente do tempo e

$[A, H] = 0$, $\frac{d}{dt}\langle A \rangle = 0 \Rightarrow$ A cte de movimento, ou

A se conserva !

$\exists \{\phi_n\}$ tal que
$H\phi_n = E_n \phi_n$ e $A\phi_n = a_n \phi_n$!

Incerteza tempo - energia

Na relação $\Delta A \cdot \Delta B \geqslant \dfrac{|\langle [A,B] \rangle|}{2}$,

considerem $B \equiv H$ e A ñ dependente de t explicitamente

Então,

$$\Delta H \cdot \Delta A \geqslant \frac{1}{2} |\langle H, A \rangle| = \frac{\hbar}{2} \frac{d}{dt} \langle A \rangle,$$ onde

usei que $\dfrac{d}{dt}\langle A \rangle = \dfrac{i}{\hbar} \langle [H, A] \rangle$.

Chamando ΔH de ΔE, e reescrevendo assim

$$\Delta E \cdot \frac{\Delta A}{\frac{d}{dt}\langle A \rangle} \geqslant \frac{\hbar}{2}$$

Podemos identificar $\dfrac{\Delta A}{\frac{d}{dt}\langle A \rangle} \equiv \Delta t \Rightarrow \Delta A = \dfrac{d}{dt}\langle A \rangle \cdot \Delta t$

$\Downarrow$

Δt é o intervalo em que $\langle A \rangle$ muda de um valor ΔA.

$$\Rightarrow \quad \Delta E \cdot \Delta t \geqslant \frac{\hbar}{2}$$

Veja que Δt depende do observável em questão!

Se ΔE for pequena (grande), então Δt é gde (pqno), logo, A deve mudar lentamente (rapidamente).