IV Transformações Canônicas

Estamos interessados em transformações de coordenadas no <u>espaço de fase</u> tal que a forma das eq's de Hamilton seja preservada. Isso generaliza a mudança de coordenadas no formalismo Lagrangiano.

Se $H(q_i, p_i, t) \longrightarrow \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$ $\quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$

queremos transformações reversíveis tais que

$$Q_i = Q_i(q, p, t) \quad \text{e} \quad P_i = P_i(q, p, t)$$

tal que existe $K(Q_i, P_i, t)$ (o novo hamiltoniano) tal que

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial P_i} \quad \text{e} \quad \dot{P}_i = \frac{\partial K}{\partial \dot{Q}_i}$$

IV.1 Transformações canônicas:

Deixemos as eq's de Hamilton mais simétricas:

$$X \equiv (q_1 \ldots q_N \; p_1 \ldots p_N)^T \quad \text{com } 2n \text{ componentes}$$

Defino a matriz J. $2n \times 2n$:

$$J = \begin{pmatrix} 0_{n\times n} & 1_{n\times n} \\ -1_{n\times n} & 0_{n\times n} \end{pmatrix}$$

As eq's de Hamilton são escritas como:

$$\dot{x}_j = J_{jk} \frac{\partial H}{\partial x_k} \quad (*)$$

Como é fácil ver. Procuremos transformações

$$q_i \to Q_i(q,p) \quad \text{e} \quad p_i \to P_i(q,p)$$

que preservem a forma (*). Na nova notação

$$x_i \to y_i(x) \quad \text{(ou como vetores } \mathbb{X} \text{ e } \mathbb{Y}\text{)}$$

Agora $\dot{y}_i = \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \dot{x}_j = \frac{\partial y_i}{\partial x_j} J_{jk} \frac{\partial H}{\partial x_k}$

$$= \frac{\partial y_i}{\partial x_j} J_{jk} \frac{\partial y_l}{\partial x_k} \frac{\partial H}{\partial y_l}$$

O jacobiano na transformação é $T_{ij} \equiv \frac{\partial y_i}{\partial x_j}$ que nos permite escrever

$$\dot{y}_i = (T J T^T)_{il} \frac{\partial H}{\partial y_l}$$

Logo, para preservarmos a forma devemos ter

$$T J T^T = J$$

Se T obedece a isso a transf. é canônica e J é dito ser simplético

Teorema: O colchete de Poisson é invariante por transformações canônicas. A recíproca também é verdadeira, qualquer transformação que preserva

$$\{Q_i, Q_j\} = \{P_i, P_j\} = 0 \quad e \quad \{Q_i, P_j\} = \delta_{ij}$$

é canônica.

PROVA: i) $\Rightarrow$ Note que

$$\{f,g\} = \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial q_i} \\ \frac{\partial f}{\partial p_i} \end{pmatrix}^T J_{ij} \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial q_j} \\ \frac{\partial g}{\partial p_j} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x_i} J_{ij} \frac{\partial g}{\partial x_j}$$

Agora, $x \to y(x) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial y_k}\frac{\partial y_k}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial y_k} T_{ki}$

$$\Rightarrow \{f,g\} = \frac{\partial f}{\partial y_k} T_{ki} J_{ij} \frac{\partial g}{\partial y_l} \underbrace{\frac{\partial y_l}{\partial x_j}}_{T_{lj}}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial y_k} (TJT^T)_{kl} \frac{\partial g}{\partial y_l} = \frac{\partial f}{\partial y_k} J_{kl} \frac{\partial g}{\partial y_l}$$

transformação é canônica

ii) $\Leftarrow$ Em termos de Q, P, q, p o Jacobiano da transformação é

$$T_{ij} = \begin{pmatrix} \partial Q_i / \partial q_j & \partial Q_i / \partial p_j \\ \partial P_i / \partial q_j & \partial P_i / \partial p_j \end{pmatrix}$$

Se a estrutura do parênteses de Poisson é preservada

$$T_{ij} J_{jk} T^T_{kl} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial Q_i}{\partial q_j} & \dfrac{\partial Q_i}{\partial p_j} \\[2ex] \dfrac{\partial P_i}{\partial q_j} & \dfrac{\partial P_i}{\partial p_j} \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}_{jk} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial Q_l}{\partial q_k} & \dfrac{\partial P_l}{\partial q_k} \\[2ex] \dfrac{\partial Q_l}{\partial p_k} & \dfrac{\partial P_l}{\partial p_k} \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} \frac{\partial Q_l}{\partial p_j} & \frac{\partial P_l}{\partial p_j} \\[1ex] -\frac{\partial Q_l}{\partial q_j} & \left(-\frac{\partial P_l}{\partial q_j}\right) \end{pmatrix}}$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial Q_i}{\partial q_j}\dfrac{\partial Q_l}{\partial p_j} - \dfrac{\partial Q_i}{\partial p_j}\dfrac{\partial Q_l}{\partial q_j} & \dfrac{\partial Q_i}{\partial q_j}\dfrac{\partial P_l}{\partial p_j} - \dfrac{\partial Q_i}{\partial p_j}\dfrac{\partial P_l}{\partial q_j} \\[3ex] \dfrac{\partial P_i}{\partial q_j}\dfrac{\partial Q_l}{\partial p_j} - \dfrac{\partial P_i}{\partial p_j}\dfrac{\partial Q_l}{\partial q_j} & \dfrac{\partial P_i}{\partial q_j}\dfrac{\partial P_l}{\partial p_j} - \dfrac{\partial P_i}{\partial p_j}\dfrac{\partial P_l}{\partial q_j} \end{pmatrix}$$

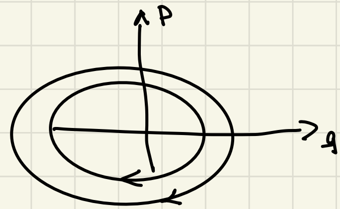
$$= \begin{pmatrix} \{Q_i, Q_l\} & \{Q_i, P_l\} \\ \{P_i, Q_l\} & \{P_i, P_l\} \end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow$ A transf. é canônica.

Exemplo: Oscilador harmônico 1D

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 q^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{q} = p/m \\ \dot{p} = -m\omega^2 q \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q = A\cos(\omega t + \varphi) \\ p = -A\omega\,\mathrm{sen}(\omega t + \varphi) \end{cases}$$



Façamos a troca $(q,p) \to (\theta, I)$ onde

$$q = \sqrt{\frac{2I}{m\omega}}\sin\theta \qquad p = \sqrt{2Im\omega}\,\cos\theta$$

Mas essa transf. é canônica? Testemos os colchetes de Poisson

$$\{q,p\}_{(\theta,I)} = \frac{\partial q}{\partial\theta}\frac{\partial p}{\partial I} - \frac{\partial q}{\partial I}\frac{\partial p}{\partial\theta} = \sqrt{\frac{2I}{m\omega}}\cos\theta\sqrt{\frac{m\omega}{2I}}\cos\theta + \sqrt{\frac{1}{2Im\omega}}\,\mathrm{sen}\,\theta\sqrt{2Im\omega}\,\mathrm{sen}\,\theta$$

$$= 1 \Rightarrow \text{é Canônica!!!}$$

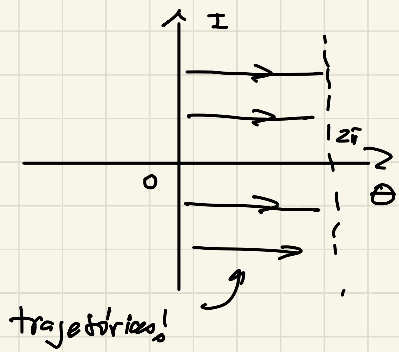
Forma alternativa: Verifique que $TJT^T = J$!

Agora $H = \frac{1}{2m} 2Im\omega\cos^2\theta + \frac{1}{2}m\omega^2\frac{2I}{m\omega}\mathrm{sen}^2\theta \Rightarrow H = \omega I$

Eqs. de Hamilton:

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial I} = \omega \Rightarrow \theta = \omega t + \theta_0$$

$$\dot{I} = -\frac{\partial H}{\partial\theta} = 0 \Rightarrow I = \text{constante}$$



Exemplo: Consideremos trocas de variáveis feitas na Lagrangiana

$$q_i \longrightarrow Q_i(q)$$

Que condições deve $p_i \longrightarrow P_i(q,p)$ deve satisfazer para a transf. ser canônica? No caso o Jacobiano é

$$T_{ij} = \begin{pmatrix} \Theta_{ij} = \frac{\partial Q_i}{\partial q_j} & 0 \\ \frac{\partial P_i}{\partial q_j} & \frac{\partial P_i}{\partial p_j} \end{pmatrix}$$ e deve satisfazer

$T J T^T = J$. O natural é fazer $P_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_i} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{Q}_i}$

Mas $\dot{q}_j = \frac{\partial q_j}{\partial Q_k} \dot{Q}_k + \frac{\partial q_j}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{Q}_i} = \frac{\partial q_j}{\partial Q_i}$

Logo $P_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial q_j}{\partial Q_i} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial q_j}{\partial Q_i} = p_j \frac{\partial q_j}{\partial Q_i}$

$$\frac{\partial P_i}{\partial p_j} = \frac{\partial}{\partial p_j}\left(p_k \frac{\partial q_k}{\partial Q_i}\right) = \frac{\partial q_j}{\partial Q_i}$$

$$T_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{\partial Q_i}{\partial q_j} & 0 \\ \frac{\partial P_i}{\partial q_j} & \frac{\partial q_j}{\partial Q_i} \end{pmatrix}$$ Agora $T_{ij} J_{jk} (T^T)_{kl} =$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial Q_i}{\partial q_j} & 0 \\ \frac{\partial P_i}{\partial q_j} & \frac{\partial q_j}{\partial Q_i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \delta_{jk} \\ -\delta_{jk} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial Q_l}{\partial q_k} & \frac{\partial P_l}{\partial q_k} \\ 0 & \frac{\partial q_k}{\partial Q_l} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial Q_i}{\partial q_j} & 0 \\ \frac{\partial P_i}{\partial q_j} & \frac{\partial q_j}{\partial Q_i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial q_j}{\partial Q_\ell} \\ -\frac{\partial Q_\ell}{\partial q_j} & -\frac{\partial P_\ell}{\partial q_j} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial Q_i}{\partial q_j}\frac{\partial q_j}{\partial Q_\ell} \\ -\frac{\partial q_j}{\partial Q_i}\frac{\partial Q_\ell}{\partial q_j} & \left(\underbrace{\frac{\partial P_i}{\partial q_j}\frac{\partial q_j}{\partial Q_\ell}}_{\frac{\partial P_i}{\partial Q_\ell}=0} - \underbrace{\frac{\partial P_\ell}{\partial q_j}\frac{\partial q_j}{\partial Q_i}}_{0} \right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \delta_{i\ell} \\ -\delta_{i\ell} & 0 \end{pmatrix}$$

$\therefore$ é canônica!

É tradicional denominar essa função geratriz por

$$F_1(q,Q,t) = \Phi(q,P(q,Q),t)$$

Note que (Δ) é uma transformação canônica se

$$\det\left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial q_i \partial Q_j}\right) \neq 0$$

Note que $\frac{\partial F_1}{\partial q_i} = p_i$ permite obter $Q_i = Q_i(q,p,t)$

e $\frac{\partial F_1}{\partial Q_i} = -P_i$ permite obter $P_i = P_i(q,p,t)$

<u>Verifiquemos explicitamente:</u> (efeito São Tomé :-)

Para facilitar a notação consideremos um grau de liberdade.

$$p = \frac{\partial F_1}{\partial q} \qquad P = -\frac{\partial F_1}{\partial Q} \quad (\Delta)$$

Calculemos: $\{Q,P\} = \left.\frac{\partial Q}{\partial q}\right|_p \left.\frac{\partial P}{\partial p}\right|_q - \left.\frac{\partial Q}{\partial p}\right|_q \left.\frac{\partial P}{\partial q}\right|_p$

(Δ) ⇒ $P = P(q,Q)$ pois $F_1(q,Q)$

$$\left.\frac{\partial P}{\partial p}\right|_q \underset{\text{via}Q}{=} \left.\frac{\partial Q}{\partial p}\right|_q \left.\frac{\partial P}{\partial Q}\right|_q$$

e

$$\left.\frac{\partial P}{\partial q}\right|_p = \left.\frac{\partial P}{\partial q}\right|_Q + \left.\frac{\partial P}{\partial Q}\right|_q \left.\frac{\partial Q}{\partial q}\right|_p$$

$$\{Q,P\} = \left.\frac{\partial Q}{\partial q}\right|_p \cancel{\left.\frac{\partial Q}{\partial p}\right|_q} \left.\frac{\partial P}{\partial Q}\right|_q - \left.\frac{\partial Q}{\partial p}\right|_q \left(\left.\frac{\partial P}{\partial q}\right|_Q + \cancel{\left.\frac{\partial Q}{\partial q}\right|_p} \left.\frac{\partial P}{\partial Q}\right|_q \right)$$

$$= - \left.\frac{\partial Q}{\partial p}\right|_q \left.\frac{\partial P}{\partial q}\right|_Q = \left.\frac{\partial Q}{\partial p}\right|_q \frac{\partial^2 F_1}{\partial q \partial Q} = \left.\frac{\partial Q}{\partial p}\right|_q \left.\frac{\partial p}{\partial Q}\right|_q = 1$$

$\Rightarrow$ é de fato uma transformação canônica!

Existem outras funções geratrizes possíveis. Se quiséssemos $F_2(q,P,t)$ podemos fazer uma transformada de Legendre, ao menos de sinal

$$F_2 = F_1 + P_i Q_i$$

$$dF_2 = dF_1 + dP_i Q_i + P_i dQ_i$$

$$= p_i dq_i - P_j \cancel{dQ_j} - (H-K)dt + dP_i Q_i + P_i \cancel{dQ_i}$$

$$= p_i dq_i + Q_i dP_i - (H-K)dt$$

Logo, $p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i}$; $Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i}$; $K = H + \frac{\partial F_2}{\partial t}$

obtemos $P_i(p,q,t)$ Obtemos $Q_i(p,q,t)$

Exercício: Existem mais 2 possibilidades

iii) $F_3(p, Q, t) = -q_i p_i + F_1$

Com

$$q_i = -\frac{\partial F_3}{\partial p_i} \qquad P_i = -\frac{\partial F_3}{\partial Q_i} \qquad K = H + \frac{\partial F_3}{\partial t}$$

iv) $F_4(p, P, t) = -q_i p_i - Q_i P_i + F_1$

Com

$$q_i = -\frac{\partial F_4}{\partial p_i} \qquad Q_i = \frac{\partial F_4}{\partial P_i} \qquad K = H + \frac{\partial F_4}{\partial t}$$

Exemplo: $F_2(q, P, t) = q_k P_k$

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i} = P_i \quad ; \quad Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i} = q_i \qquad H = K$$

Essa é simplesmente a transformação identidade.

Exemplo: $F_1(q, Q, t) = q_k Q_k$

$$p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i} = Q_i \qquad P_i = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i} = -q_i \qquad K = H$$

Isso é troca o papel de momento e coordenadas

Exemplo: $F_1(q,Q,t) = \dfrac{m(q-Q)^2}{2t}$ e $H = \dfrac{p^2}{2m}$

$$p = \frac{\partial F_1}{\partial q} = \frac{m(q-Q)}{t} \qquad P = -\frac{\partial F_1}{\partial Q} = \frac{m(q-Q)}{t}$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$Q = q - \frac{p}{m}t \qquad\qquad P = p$$

$$K = H + \frac{\partial F_1}{\partial t} = \frac{p^2}{2m} - \frac{m(q-Q)^2}{2t^2} = \frac{P^2}{2m} - \frac{P^2}{2m} = 0$$

Logo $\dot{Q} = 0 \Rightarrow Q = a$

$\dot{P} = 0 \Rightarrow P = b$ $\Bigg\rangle \Rightarrow q = a + \dfrac{b}{m}t$ que é a solução geral!

Exemplo: Uma mudança geral de coordenadas

$Q_i = f_i(q_1 \dots q_n\, t)$ é canônica! $F_2 = P_k f_k$

$$Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i} = f_i \qquad \underline{\text{ok!}} \qquad p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i} = P_k \frac{\partial f_k}{\partial q_i}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial q_i}{\partial f_j} p_i = P_k \frac{\partial f_k}{\partial q_i}\frac{\partial q_i}{\partial f_j} = P_j .$$