Ondas em uma corda

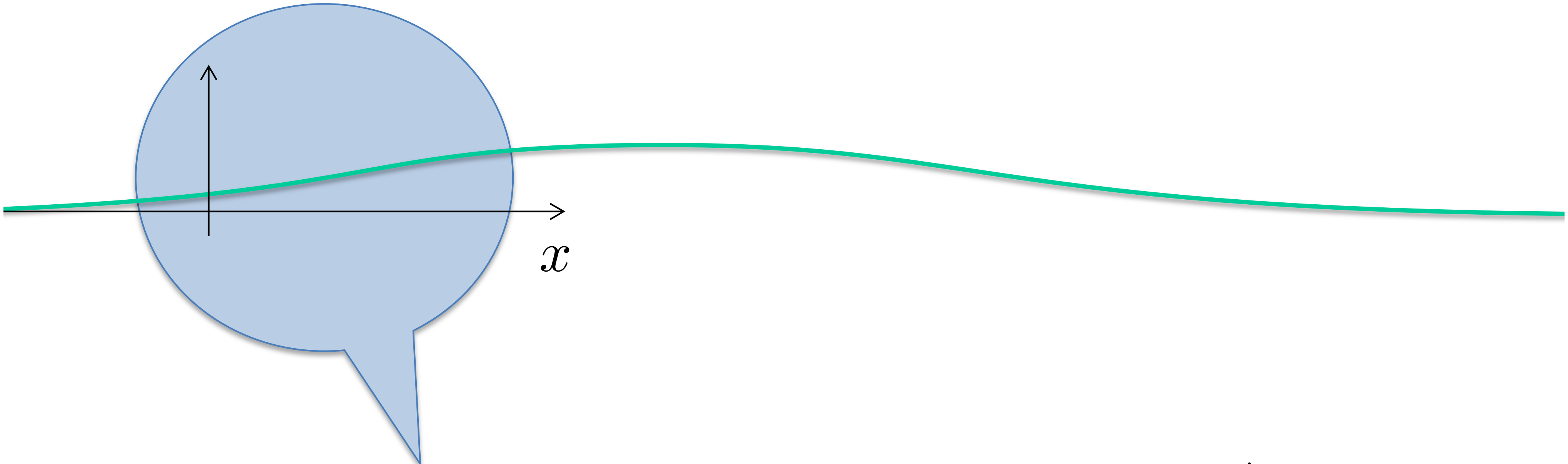
Tomemos uma corda esticada:

Submetida a tensões em suas extremidades, iguais em módulo, opostas em direção

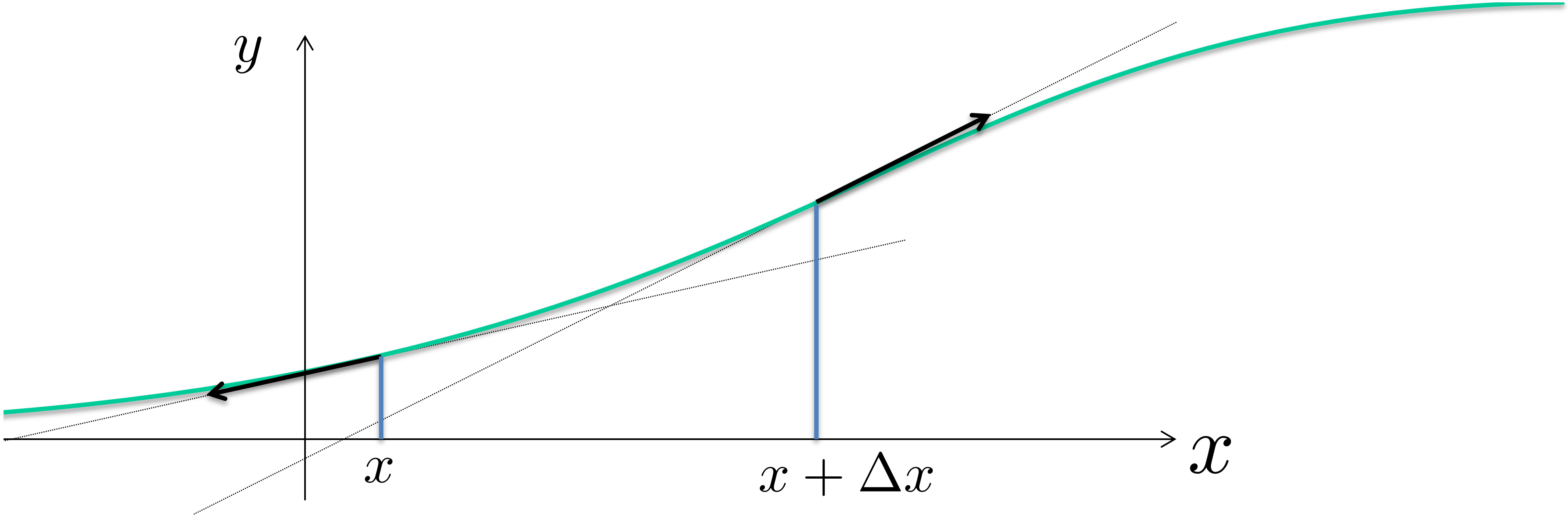
Fica claro que este trecho de corda de massa *m*, comprimento *l*, permanece em repouso.

Ondas em uma corda

Se a corda sofre uma perturbação na direção transversa, como podemos tratar o problema?

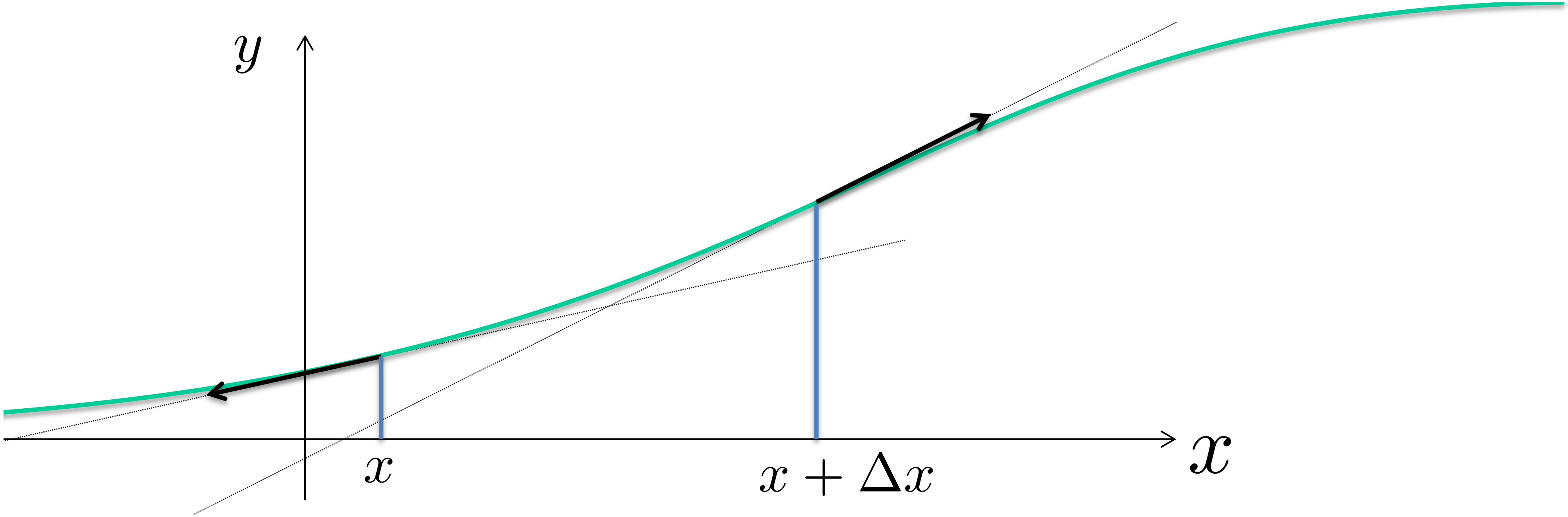


Vamos tratar em detalhe um pequeno seguimento de comprimento Δx .



Tomaremos em detalhe a equação do movimento de um trecho pequeno de corda,

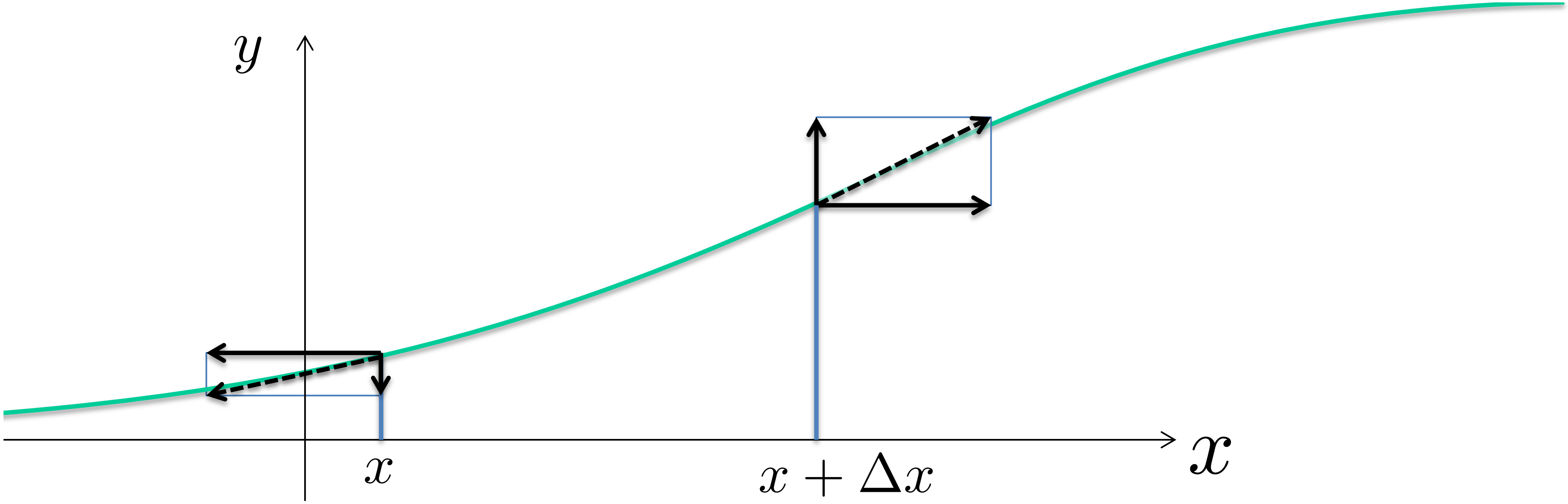
considerando a tensão em seus extremos. Note que a tensão é sempre tangente à corda.



A equação de movimento para a direção y é dada pela 2a. lei de Newton sobre o elemento de massa Δm ,

$$F_y = \Delta m \cdot a_y = \Delta m \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}$$

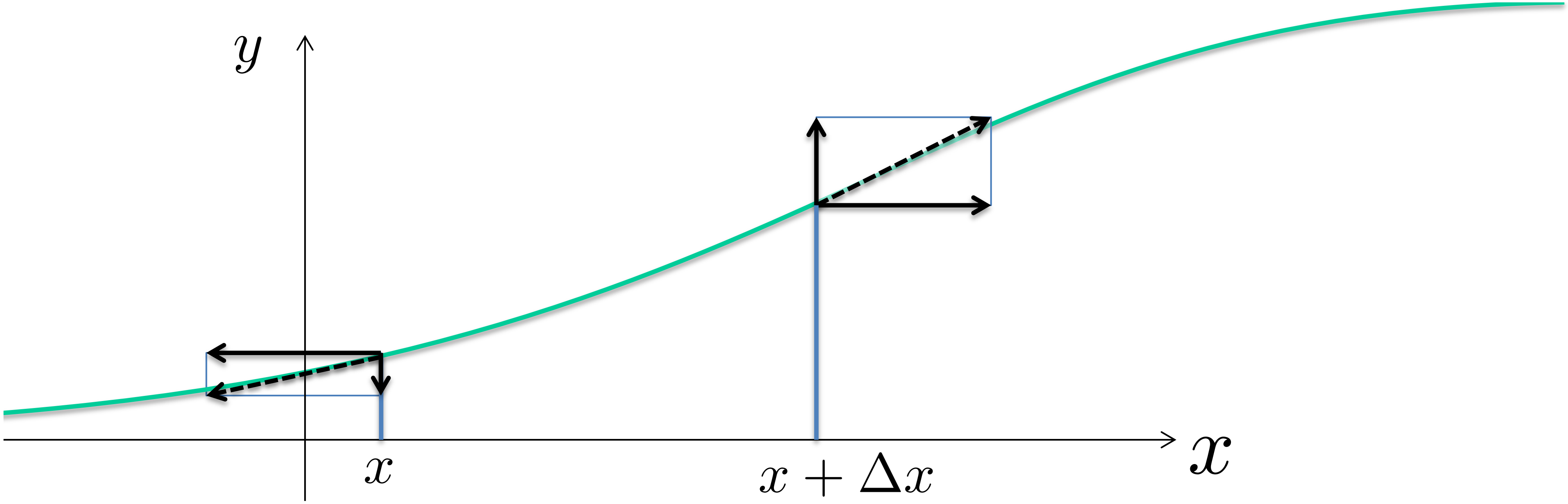
com uma equação semelhante para a direção x. Precisamos agora encontrar as forças atuando sobre este trecho de corda.



Na direção horizontal, a tensão permanece inalterada: não há deslocamento horizontal!

Na direção do deslocamento transverso *y,* o módulo da tensão será dado por.

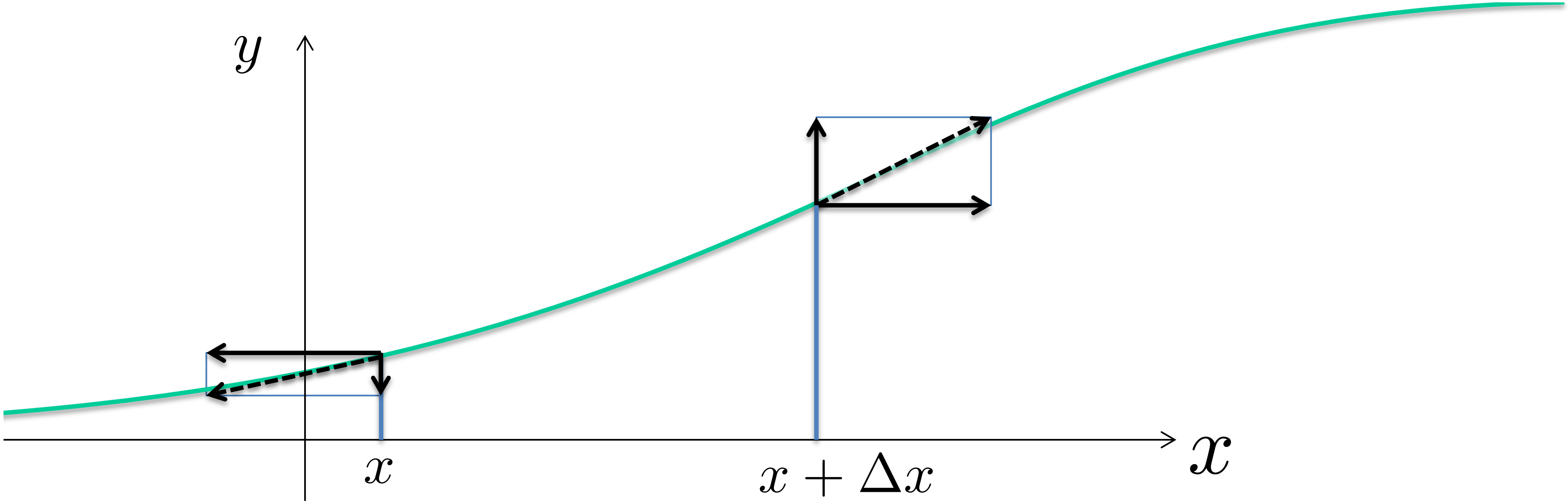
$$T_y(x) = T \cdot tg\,\theta(x) = T \cdot \frac{\partial y(x,t)}{\partial x}$$



Calculando a resultante sobre o trecho de corda, teremos

$$F_y = T_y(x + \Delta x) - T_y(x) =$$

$$= T\left[\frac{\partial y(x+\Delta x, t)}{\partial x} - \frac{\partial y(x,t)}{\partial x}\right]$$

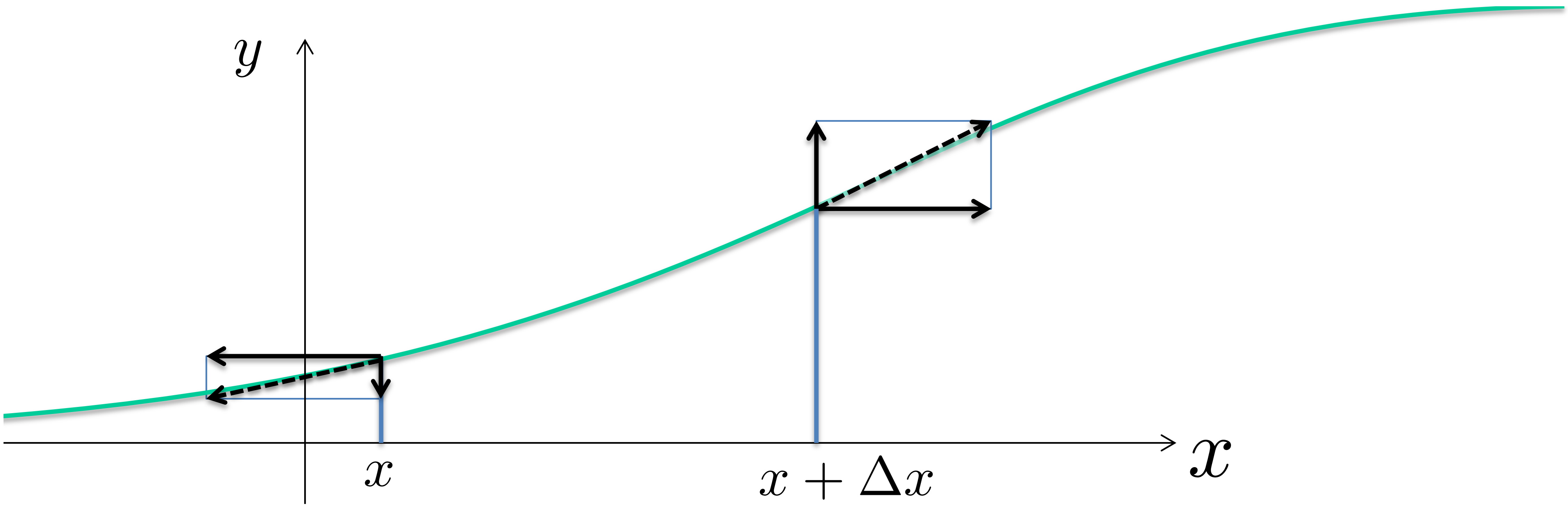


A equação resultante será portanto:

$$T\left[\frac{\partial y(x+\Delta x,t)}{\partial x}-\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}\right]=\Delta m\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}$$

Podemos dividir os dois membros pelo comprimento do segmento Δx .

$$T\left[\frac{\frac{\partial y(x+\Delta x,t)}{\partial x}-\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}}{\Delta x}\right]=\frac{\Delta m}{\Delta x}\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}$$

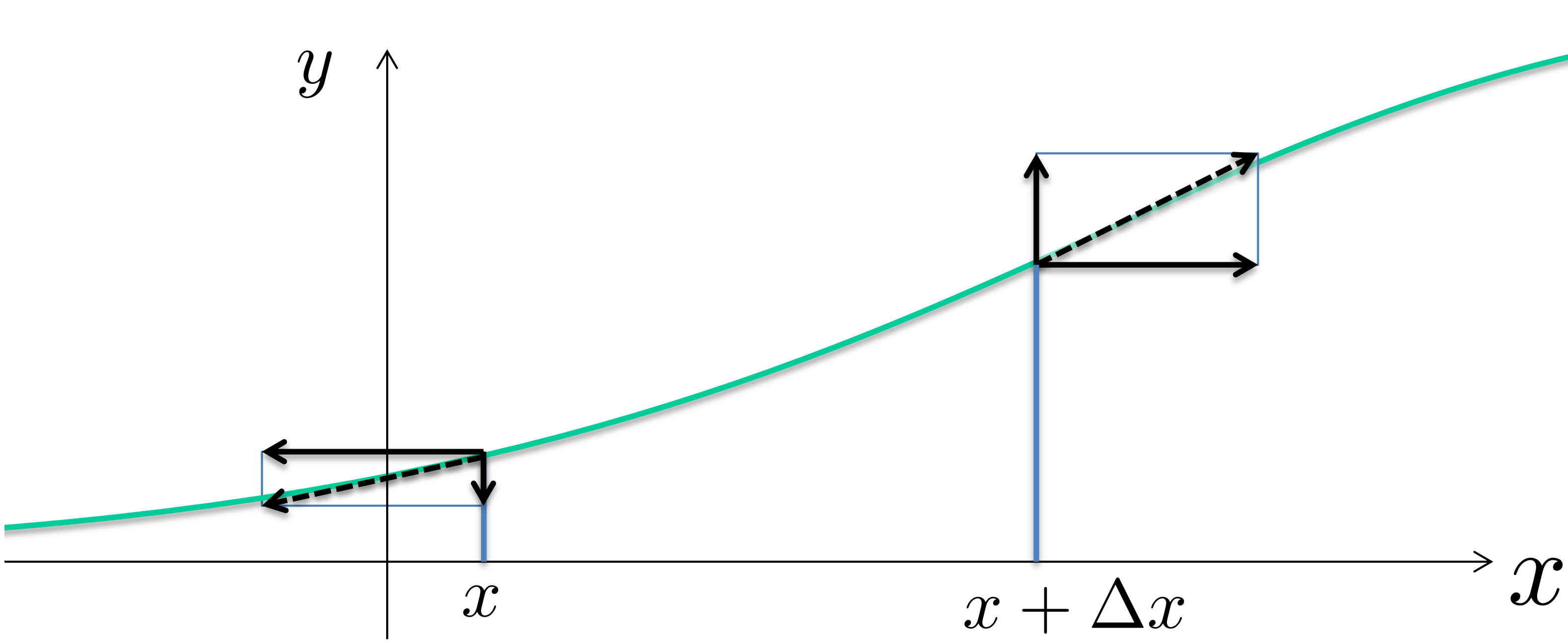


Podemos dividir os dois membros pelo comprimento do segmento Δx.

$$T\left[\frac{\frac{\partial y(x+\Delta x,t)}{\partial x}-\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}}{\Delta x}\right]=\frac{\Delta m}{\Delta x}\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}$$

Tomar o limite $\Delta x \to 0$

$$T\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{\frac{\partial y(x+\Delta x,t)}{\partial x}-\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}}{\Delta x}\right]=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{\Delta m}{\Delta x}\right]\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}$$



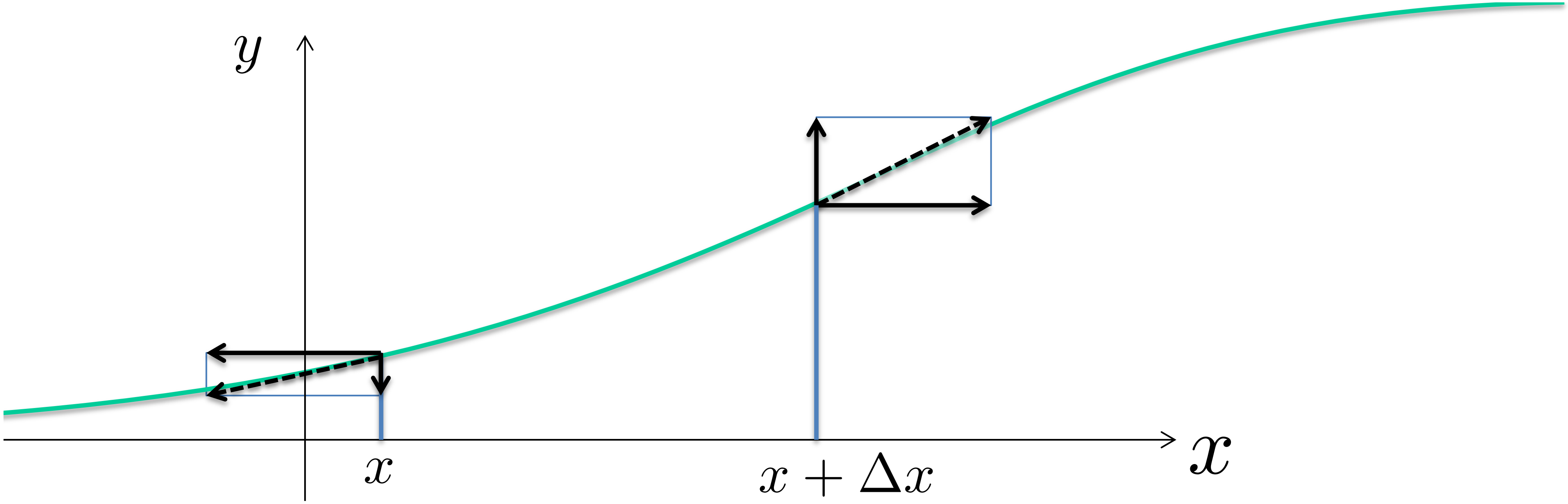
Tomar o limite $\Delta x \to 0$

$$T \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{\frac{\partial y(x+\Delta x,t)}{\partial x} - \frac{\partial y(x,t)}{\partial x}}{\Delta x} \right] = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{\Delta m}{\Delta x} \right] \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}$$

E obter:

$$T \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = \mu \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}$$

onde μ é a <u>densidade linear</u> da corda.



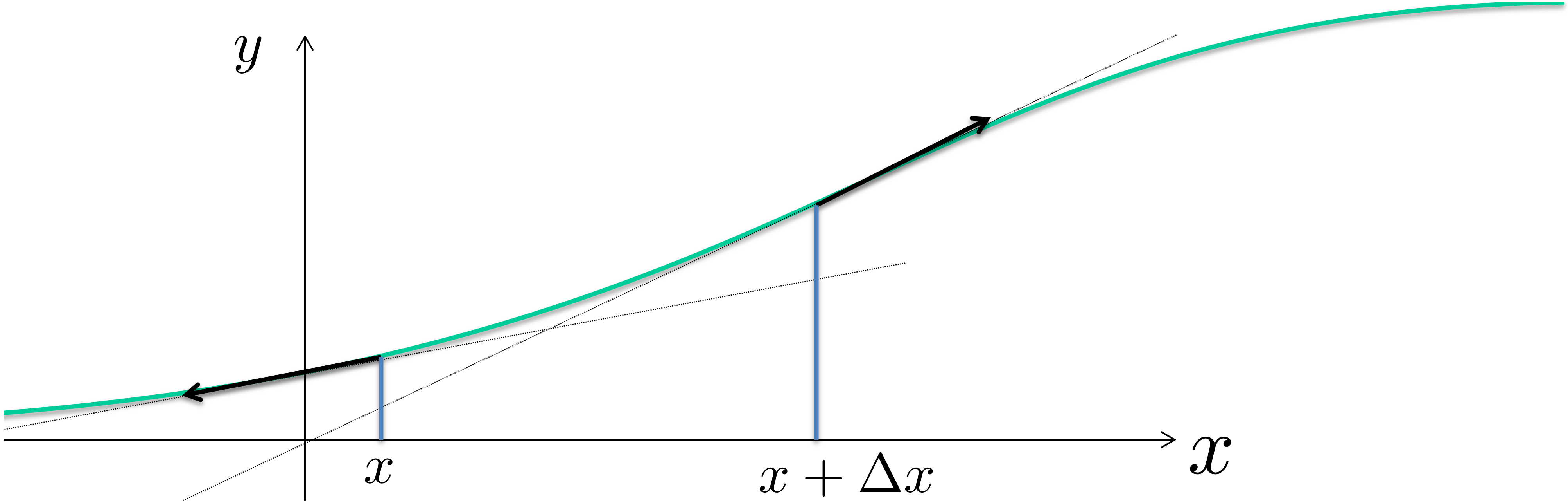
Reordenando os termos teremos uma equação de onda:

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = 0$$

Sendo a velocidade da onda:

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

Conclusão: uma corda sustenta uma perturbação propagante (onda) com uma velocidade (v) que depende apenas da densidade linear da corda e da tensão da mesma!



Tomaremos em detalhe a equação do movimento de um trecho pequeno de corda, considerando a tensão em seus extremos.

Na direção horizontal, a tensão permanece inalterada: não há deslocamento horizontal!

$$\Delta x$$

y é o deslocamento transverso sofrido pelo trecho de corda em *x*

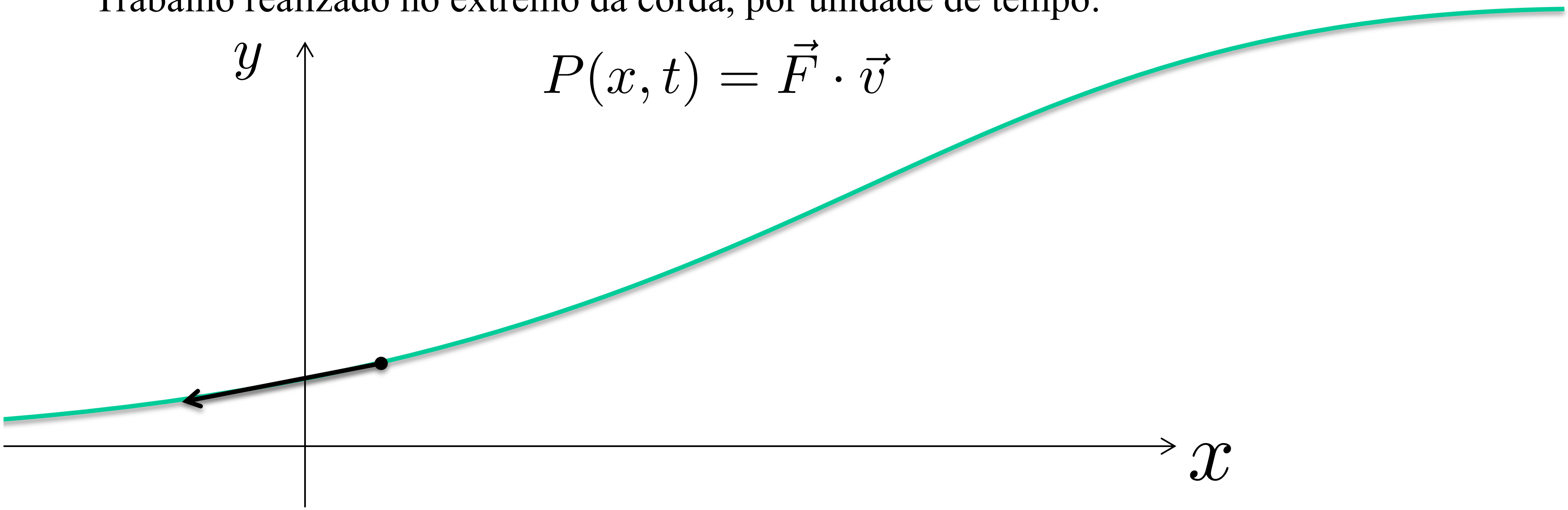
A tensão *T* é sempre tangente à corda, e vamos considerar que, em primeira aproximação

[redacted]

Propagação de Energia

Trabalho realizado no extremo da corda, por unidade de tempo:

$$P(x,t) = \vec{F} \cdot \vec{v}$$



Velocidade: apenas componente transversal: $\vec{v} = \dfrac{\partial y(x,t)}{\partial t}\hat{j}$

Portanto $$P(x,t) = F_y \frac{\partial y(x,t)}{\partial t}$$

$$P(x,t) = -T \frac{\partial y(x,t)}{\partial x} \frac{\partial y(x,t)}{\partial t}$$ onde o sinal pode ser deduzido a partir do gráfico.

Pensando no pulso se propagando, temos uma quantidade finita de energia, colocada na corda em um certo intervalo de tempo.

$$\frac{\partial y}{\partial t} = -v\frac{\partial y}{\partial x}$$

$$P(x,t) = -T\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}\frac{\partial y(x,t)}{\partial t}$$

Pensando no pulso se propagando, temos uma quantidade finita de energia, colocada na corda em um certo intervalo de tempo.

$$\frac{\partial y}{\partial t} = -v\frac{\partial y}{\partial x}$$

$$P(x,t) = -T\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}\frac{\partial y(x,t)}{\partial t}$$