1^a Prova de Introdução aos Sistemas Dinâmicos

As duas primeiras questões foram feitas para serem entregues em até 3 horas após o início da prova, a terceira questão e as questões extras podem ser entregues até segunda feira para pontos extras na prova (pensem como projetos opcionais). Vocês podem copiar quaquer material, mas não pdoem consultar outras pessoas. Em caso de necessidade, vocês podem usar subitens não mostrados em uma questão para a resolução de um item **posterior** da mesma questão.

1. Seja $f : [0,1] \to [0,1]$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{para } 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ 2 - 2x, & \text{para } \frac{1}{2} < x \leq 1. \end{cases}$$

   - Mostre que, para todo $0 < \delta < \frac{1}{2}$, existem x, y em $[0,1]$ com $y - x = \delta$ e tais que $f(x) = f(y)$.
   - Mostre que f não é positivamente expansiva.
   - Mostre que, se I é um subintervalo não degenerado qualquer de $[0,1]$, então existe n positivo tal que $f^n(I) = [0,1]$.
   - Prove que f é mixing.
   - Extra (e difícil): Mostre que f é um fator do shift unilateral.

2. Sejam $a < b$ dois números reais e $f : [a,b] \to [a,b]$ um homeomorfismo.

   - Mostre que o ω-limite de qualquer ponto contém no máximo dois pontos distintos, sendo que cada um deles é periódico de período 2.
   - Mostre que, se f é crescente, então o ω-limite de todo ponto é um ponto fixo.
   - Mostre que f nunca é transitiva.
   - Mostre que, se f não possui pontos errantes, então f^2 é a identidade.
   - (Extra, um pouco difícil: Mostre que f nunca é positivamente expansiva.)

3. A aplicação Odômetro clássica é uma aplicação $h : \Sigma_2^+ \to \Sigma_2^+$ tal que, dada $w \in \Sigma_2^+$, se n é o menor índice tal que $w_n = 0$, então $h(w)_j = 0, 0 \leq j \leq n-1$, $h(w)_n = 1$ e $h(w)_j = w_j$ para todo $j > n$. Além disso definimos $h(1.111111...) = 0.0000000....$ Esta aplicação também é conhecida como "máquina de somar". Por exemplo, se $w = (0.110w_3w_4w_5...)$, então $h(w) = (1.110w_3w_4w_5...)$, $h^2(w) = (0.001w_3w_4w_5...)$, $h^3(w) = (1.001w_3w_4w_5...)$, etc...

   Mostre inicialmente que, para qualquer $w = (w_0.w_1, w_2w_3...)$, vale que $(h^{2^n}(w))_j = w_j$, se $j < n$ mas $(h^{2^n}(w))_n \neq w_n$ (Isto é, se olharmos a iterada 2^n de w por h, então os n primeiros simbolos são iguais, ma so símbolo $n+1$ é diferente.

   Use o fato anterior para tentar decidir se o Odômetro é um homeomorfismo ou não. Também tente encontrar seus pontos periódicos, se houverem. Decida se a aplicação é minimal/transitiva/expansiva.