PLANTÃO DE DÚVIDAS DO DIA 25 DE SETEMBRO

LISTA 4

5) Verifique se os vetores $u:=(1,1,2,3)$ e $w:=(5,-1,-1,-4)$ estão ou não no subespaço

$$U:=[(1,0,1,0),(1,1,1,0),(0,1,1,1)].$$

RESOLUÇÃO.

PRIMEIRO MODO.

Como

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 \end{array}\right) \underset{L_3' := L_3 - L_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_4'' := L_4' - L_3'}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right),$$

u e w não pertencem a U (pois $2 \neq 0$).

SEGUNDO MODO.

Seja $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$. Como

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 1 & 1 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 & d \end{array}\right) \underset{L_3' := L_3 - L_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 & c-a \\ 0 & 0 & 1 & d \end{array}\right)$$

$$\underset{L_4'' = L_4' - L_3'}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 & c-a \\ 0 & 0 & 0 & d-c+a \end{array}\right),$$

$(a,b,c,d) \in U \Leftrightarrow d - c + a = 0$. Logo, $(a,b,c,d) \in U \Leftrightarrow a = c-d$.

Portanto,

$$U = \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 : a = c-d\}.$$

Sendo assim, como $2-3=-1 \neq 1$, e $-1-(-4)=3 \neq 5$, u e w não pertencem a U.

2) Sejam $V := \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $U := \{f \in V : f \text{ é par}\}$, e $W := \{f \in V : f \text{ é ímpar}\}$. Mostre que:

a) U e W são subespaços de V.

b) $V = U \oplus W$.

RESOLUÇÃO.

a)

(i) U é subespaço de V, pois:

- $\mathbf{0} \in U$ (já que, para cada $x \in \mathbb{R}$, $\mathbf{0}(-x) = 0 = \mathbf{0}(x)$);
  ↳ função nula de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$

- se $f, g \in U$, então, para cada $x \in \mathbb{R}$,

$$(f+g)(-x) = \underbrace{f(-x)}_{=f(x)} + \underbrace{g(-x)}_{=g(x)} = f(x)+g(x) = (f+g)(x),$$

e, portanto, nesse caso, $f+g \in U$;

- se $f \in U$, e se $a \in \mathbb{R}$, então, para cada $x \in \mathbb{R}$,

$$(af)(-x) = a \cdot \underbrace{f(-x)}_{=f(x)} = a\,f(x) = (af)(x),$$

e, portanto, nesse caso, $af \in U$.

(ii) W é subespaço de V, pois:

- $\mathbf{0} \in W$ (já que, para cada $x \in \mathbb{R}$, $\mathbf{0}(-x) = 0 = -0 = -\mathbf{0}(x)$);
  ↳ função nula de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$

- se $f, g \in W$, então, para cada $x \in \mathbb{R}$,

$$(f+g)(-x) = \underbrace{f(-x)}_{=-f(x)} + \underbrace{g(-x)}_{=-g(x)} = -f(x) - g(x) = -[f(x)+g(x)]$$
$$= -(f+g)(x),$$

e, portanto, nesse caso, $f+g \in W$;

• Se $f \in W$, e se $a \in \mathbb{R}$, então, para cada $x \in \mathbb{R}$,

$$(af)(-x) = a \cdot \underbrace{f(-x)}_{=-f(x)} = a[-f(x)] = -[af(x)] = -(af)(x),$$

e, portanto, nesse caso, $af \in W$.

b) Para concluirmos que $V = U \oplus W$, precisamos demonstrar os seguintes fatos:

(i) $V = U + W$;

(ii) $U \cap W = \{0\}$.

PROVA DE i.

Dada $f \in V$, notemos que, para cada $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \left[\frac{f(x)+f(-x)}{2}\right] + \left[\frac{f(x)-f(-x)}{2}\right]. \quad (*)$$

Sejam

$$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad , \quad \text{e} \quad h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$
$$x \mapsto \frac{f(x)+f(-x)}{2} \qquad \qquad x \mapsto \frac{f(x)-f(-x)}{2}$$

Como, para cada $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) \underset{(*)}{=} g(x) + h(x) = (g+h)(x),$$

$f = g + h$. Por sua vez, como, para cada $x \in \mathbb{R}$,

$$g(-x) = \frac{f(-x) + f(x)}{2} = g(x),$$

e

$$h(-x) = \frac{f(-x) - f(x)}{2} = -\left[\frac{f(x) - f(-x)}{2}\right] = -h(x),$$

g é par, e h é ímpar. Logo, resulta da arbitrariedade de f em V que $V = U + W$.

PROVA DE ii.

Seja $f \in U \cap W$. Como $f \in U$, para cada $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = f(x)$. Analogamente, como $f \in W$, para cada $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = -f(x)$. Logo, para cada $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = f(-x) = -f(-x),$$

e, portanto, $f(x) = 0$ qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$ – a partir do que concluímos que $f = 0_V$. E, como $0_V \in U \cap W$, e $f \in U \cap W$ é arbitrária, disso resulta que $U \cap W = \{0_V\}$.

6) Mostre que os conjuntos $\{sen^2(t), cos^2(t), sen(t)cos(t)\}$ e $\{1, sen(2t), cos(2t)\}$ geram o mesmo subespaço de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

RESOLUÇÃO.

Sejam $S := \{sen^2(t), cos^2(t), sen(t)cos(t)\}$ e $T := \{1, sen(2t), cos(2t)\}$.

Como

$$1 = 1 \cdot \text{sen}^2(t) + 1 \cdot \cos^2(t),$$

$$\text{sen}(2t) = 2\,\text{sen}(t)\cos(t), \text{ e}$$

$$\cos(2t) = \cos^2(t) - \text{sen}^2(t),$$

$T \subseteq [S]$. Por sua vez, como

$$\cos(2t) = \cos^2(t) - \underbrace{\text{sen}^2(t)}_{=1-\cos^2(t)} = \cos^2(t) - (1 - \cos^2(t))$$

$$= 2\cos^2(t) - 1,$$

$$\cos^2(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2t).$$

Analogamente, como

$$\cos^2(t) = \underbrace{\cos^2(t)}_{=1-\text{sen}^2(t)} - \text{sen}^2(t) = (1 - \text{sen}^2(t)) - \text{sen}^2(t)$$

$$= 1 - 2\,\text{sen}^2(t),$$

$$\text{sen}^2(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2t).$$

Por fim, como $\text{sen}(2t) = 2\,\text{sen}(t)\cos(t)$, é claro também que $\text{sen}(t)\cos(t) = \frac{1}{2}\text{sen}(2t)$. Logo, $S \subseteq [T]$. E, como $S \subseteq [T]$, e $T \subseteq [S]$, $[S] = [T]$.

8) Sejam v_1, v_2 e v_3 os vetores-linha da matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

e w_1, w_2 e w_3 seus vetores-coluna. Mostre que $[v_1, v_2, v_3] = [w_1, w_2, w_3]$.

RESOLUÇÃO.

Seja $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. Como

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 7 & a \\ 2 & 5 & 8 & b \\ 3 & 6 & 9 & c \end{array}\right) \underset{\substack{L_2' := L_2 - 2L_1 \\ L_3' := L_3 - 3L_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 7 & a \\ 0 & -3 & -6 & b-2a \\ 0 & -6 & -12 & c-3a \end{array}\right)$$

$$\underset{L_3'' := L_3' - 2L_2'}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 7 & a \\ 0 & -3 & -6 & b-2a \\ 0 & 0 & 0 & a-2b+c \end{array}\right),$$

$(a,b,c) \in [v_1, v_2, v_3] \Leftrightarrow a - 2b + c = 0$. Por sua vez, como

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & a \\ 4 & 5 & 6 & b \\ 7 & 8 & 9 & c \end{array}\right) \underset{\substack{L_2' := L_2 - 4L_1 \\ L_3' := L_3 - 7L_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & a \\ 0 & -3 & -6 & b-4a \\ 0 & -6 & -12 & c-7a \end{array}\right)$$

$$\underset{L_3'' := L_3' - 2L_2'}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & a \\ 0 & -3 & -6 & b-4a \\ 0 & 0 & 0 & a-2b+c \end{array}\right),$$

$(a,b,c) \in [w_1, w_2, w_3] \Leftrightarrow a-2b+c=0$. Logo,

$$(a,b,c) \in [v_1, v_2, v_3] \Leftrightarrow (a,b,c) \in [w_1, w_2, w_3],$$

e, portanto, resulta da arbitrariedade de (a,b,c) em $\mathbb{R}^3$ que $[v_1, v_2, v_3] = [w_1, w_2, w_3]$.