

Propriedades ondulatórias da matéria

A hipótese de de Broglie

Louis de Broglie, baseado na natureza dual da radiação, postulou que a própria matéria deveria exibir a mesma dualidade e, portanto, apresentar aspectos ondulatórios. Tal postulado foi apresentado em sua tese de doutorado defendida em 1924 na Universidade de Paris.

Nela, de Broglie explorou o conceito de simetria: se o universo é formado de matéria e radiação e essa última tem natureza dual, a primeira também deve tê-la.

Para de Broglie, uma partícula com energia E e momento \vec{p} possui também propriedades de onda como frequência e comprimento de onda dadas por

$$E = h\nu \quad \text{e} \quad p = \frac{h}{\lambda}$$

A motivação para de Broglie ao propor essas relações vem, claramente, do fato que elas são válidas para a radiação.

Calcularemos então λ para alguns sistemas materiais de interesse. (2)

Exemplos:

1. Bola de beisebol com $m = 100 \text{ g}$ e velocidade $v = 10 \text{ m/s}$

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv} = \frac{6,63 \times 10^{-34} \text{ Js}}{(0,1 \text{ Kg})(10 \text{ m/s})} = 6,63 \times 10^{-34} \text{ m}$$

ou seja, $\lambda = 6,63 \times 10^{-24} \text{ \AA} !$

2. Elétron com energia cinética $K = 100 \text{ eV}$

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{hc}{pc} = \frac{hc}{(2mc^2 K + K^2)^{1/2}}$$

ou seja

$$\lambda = \frac{hc}{(2mc^2 K)^{1/2}} \frac{1}{\left(1 + \frac{K}{2mc^2}\right)^{1/2}}$$

Valores úteis

$$mc^2 = 511 \text{ KeV} = 5,11 \times 10^5 \text{ eV}$$

$$h = 4,135 \times 10^{-15} \text{ eV s}$$

Vemos então que no caso em questão estamos no limite não relativístico

$$\frac{K}{mc^2} = \frac{100 \text{ eV}}{5,11 \times 10^5 \text{ eV}} \ll 1$$

Então

$$\lambda \simeq \frac{hc}{(2mc^2 K)^{1/2}} = \frac{(4,135 \times 10^{-15} \text{ eV s})(3 \times 10^8 \text{ m/s})}{[(2 \times 5,11 \times 10^5 \text{ eV})(100 \text{ eV})]^{1/2}}$$

$$\lambda \simeq 1,23 \text{ \AA}$$



Sabemos que a propagação da luz pode ser descrita por teorias bastante distintas dependendo da relação entre o comprimento de onda da radiação λ e a dimensão típica dos obstáculos envolvidos, dada por a .

Em particular, no limite

$$\frac{\lambda}{a} \rightarrow 0$$

estamos no campo de validade da ótica geométrica em que fenômenos de interferência e difração não são

importantes e a propagação da luz pode ser descrita por meio de raios luminosos. Já na região ④

$$\frac{\lambda}{a} \gg 1$$

estamos no domínio da ótica física onde a natureza ondulatória da luz é pronunciada.

Dos cálculos anteriores fica claro que, devido à pequenez da constante de Planck, o comprimento de onda de Broglie para objetos macroscópicos é extremamente pequeno e, portanto, essencialmente não-observável em experimentos típicos de ondulatória.

Perceba também que no limite $h \rightarrow 0$, temos $\lambda \rightarrow 0$, de forma que o comportamento ondulatório da matéria desaparece por completo.

Dessa forma, assim como a ótica geométrica pode ser vista como o limite de pequenos comprimentos de onda da ótica física, a mecânica clássica (Newtoniana) pode ser considerada como o limite de pequenos comprimentos de onda da mecânica ondulatória (quântica).

Exemplo

3. Próton com $K = 30 \text{ MeV} = 3 \times 10^7 \text{ eV}$

A energia de repouso do próton é

$$Mc^2 \approx 1 \text{ GeV} = 10^9 \text{ eV}$$

Logo continuamos no limite não relativístico

$$\frac{K}{2Mc^2} = \frac{3 \times 10^7 \text{ eV}}{2 \times 10^9 \text{ eV}} = 1,5 \times 10^{-2} \ll 1$$

Então

$$\lambda = \frac{h}{p} \approx \frac{hc}{2Mc^2 K} = \frac{(4,135 \times 10^{-15} \text{ eVs})(3 \times 10^8 \text{ m/s})}{[2 \times (10^9 \text{ eV})(3 \times 10^7 \text{ eV})]^{1/2}}$$

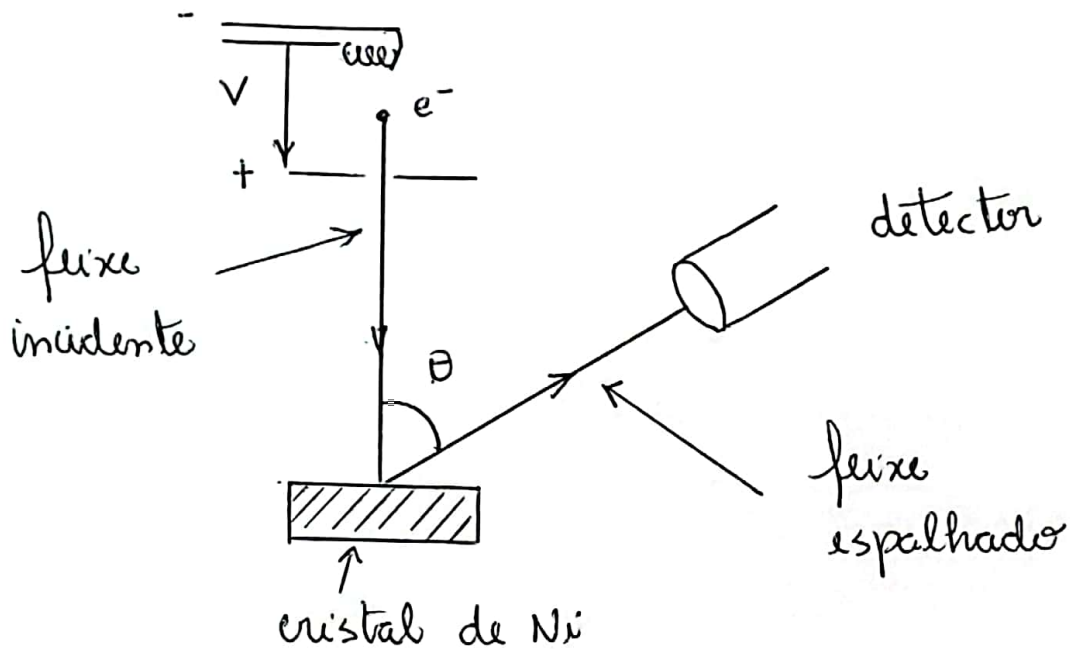
$$\lambda \approx 5 \times 10^{-15} \text{ m} = \underbrace{5 \text{ fm}}_{\rightarrow \text{Fermi}}$$

O Fermi é a escala de tamanho típico de núcleos atômicos, assim como o angstrom (\AA) é o tamanho típico de átomos.

Evidências experimentais do comportamento ondulatório da matéria

(6)

O experimento de Davisson e Germer (1927)

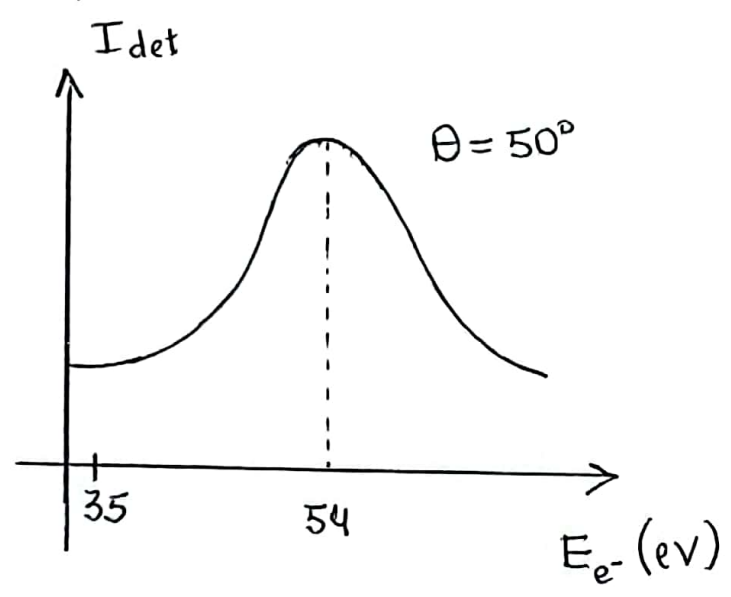


Nesse experimento, um feixe de elétrons emitidos por um filamento aquecido são acelerados por uma diferença de potencial ajustável V e incidem sobre um material cristalino que no caso específico de Davisson - Germer era feito de níquel.

A ideia original de Davisson era realizar um experimento baseado na medida clássica de espalhamento Rutherford, mas com um feixe de elétrons ao invés de partículas alfa.

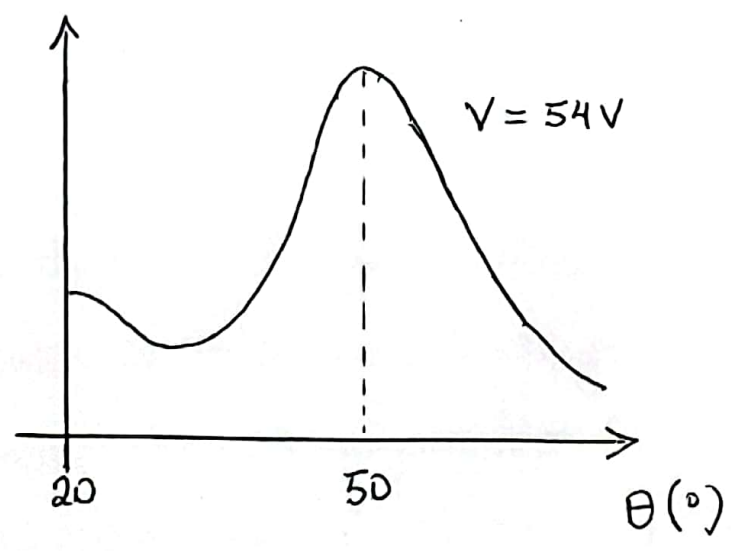
Davisson acreditava que podia estudar a estrutura das eletrosferas dos átomos dos materiais dessa forma.

Dada a natureza rugosa do material, Davisson acreditava que o fluxo eletrônico seria espalhado de maneira isotrópica pela superfície do cristal. Contrariamente às expectativas, os resultados principais das medições podem ser resumidas nos gráficos abaixo



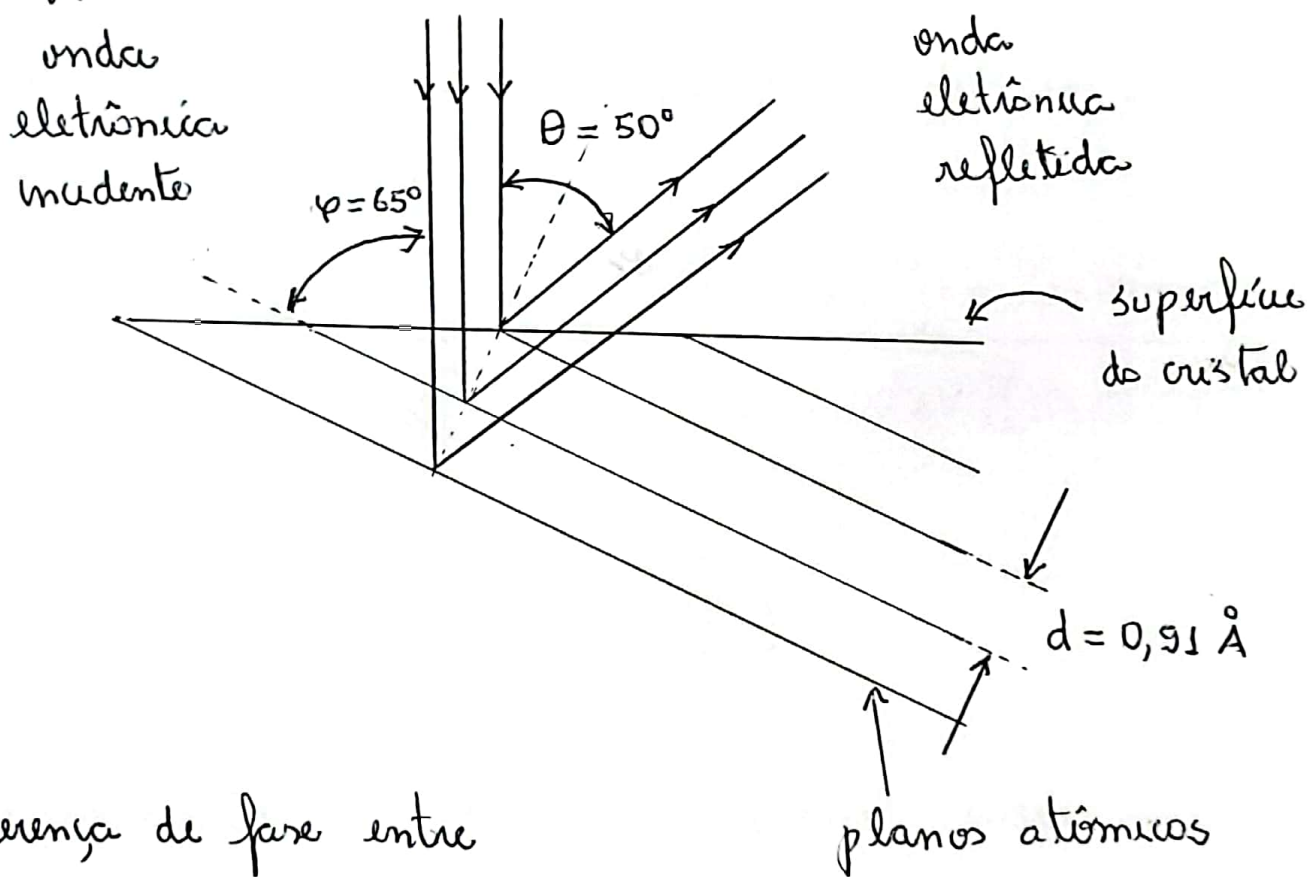
I_{det} = corrente no detector

Com o detector fixo em $\theta = 50^\circ$, o espalhamento nesse ângulo é máximo para $E_{e^-} = 54\text{eV}$ ($V = 54\text{V}$).



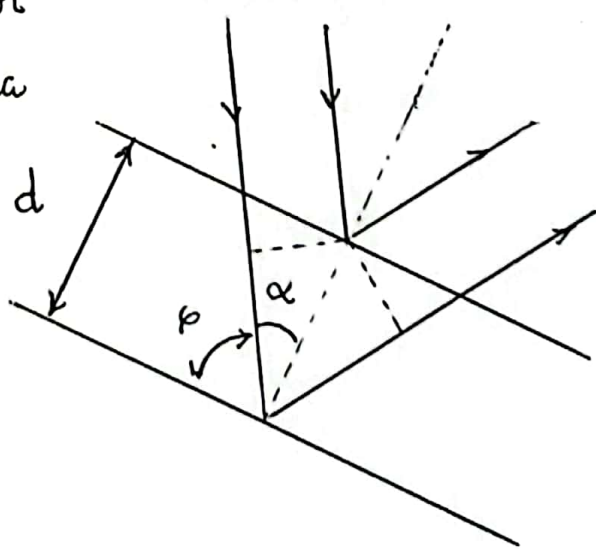
O fluxo eletrônico é fortemente espalhado a $\theta = 50^\circ$ para $V = 54\text{V}$.

Os resultados do experimento de Davisson-Germer podem ser explicados se ao invés de tratar o feixe incidente como composto de partículas, o tratarmos como uma onda. Nessa situação, os resultados podem ser explicados de maneira completamente análoga ao espalhamento de Bragg de raios-X.



A diferença de fase entre frentes de onda refletidas por planos atômicos adjacentes da rede cristalina é tal que

$$\begin{aligned} \Delta l &= 2d \cos \alpha \\ &= 2d \cos(\pi/2 - \varphi) \\ &= 2d \sin \varphi \end{aligned}$$



9
A condição de Bragg para interferência construtiva do feixe espalhado (intensidade máxima) é

$$\Delta l = n\lambda = 2d \sin \varphi \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

O máximo de maior intensidade ($n=1$) leva a (Bragg)

$$\lambda = 2d \sin \varphi = 2(0,91 \text{ \AA}) \sin(65^\circ) = 1,65 \text{ \AA}$$

Já o comprimento de onda de de Broglie do elétron no limite não-relativístico é

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{hc}{\sqrt{2mc^2 K}} = \frac{(4,135 \times 10^{-15} \text{ eVs})(3 \times 10^8 \text{ m/s})}{[2 \times (5,11 \times 10^5 \text{ eV})(54 \text{ eV})]^{1/2}}$$

Ou seja

$$\lambda = 1,67 \text{ \AA} \quad (\text{de Broglie})$$

No experimento de Davisson e Germer, outras energias foram testadas. Para $V = 40V$, por exemplo, nenhum pico em I_{det} foi observado. Para esse potencial de aceleração

$$\lambda (V = 40V) = \frac{hc}{(2mc^2 K)^{1/2}} = 1,94 \text{ \AA}$$

Para os planos atômicos do níquel com espaçamento $d = 0,91 \text{ \AA}$, o valor de $2d \sin \theta$ está no intervalo

$$0 \leq 2d \sin \theta \leq 1,82 \text{ \AA}$$

Portanto, pelo menos para os planos atômicos analisados, não há como a condição de Bragg ser satisfeita para elétrons de energia cinética $K = 40 \text{ eV}$.

É importante salientar que a interferência não ocorre entre ondas associadas a elétrons distintos, mas sim entre partes diferentes da onda associada a um único elétron.

Isso é demonstrado fazendo-se a experiência com um feixe incidente tão fraco que apenas um elétron por vez atinge o cristal. e, ainda assim, observa-se uma intensidade do feixe espalhado consistente com a condição de Bragg.

Em 1927, G. P. Thomson (filho de J. J. Thomson) mostrou a existência de efeitos de difração e interferência por feixes de elétrons atravessando filmes finos. Nesse caso, os resultados são completamente análogos aos espalhamentos de Debye-Scherrer de raios-X em pó ou filmes finos.

Em 1937, Davissom e Thomson (o filho) ganharam o Prêmio Nobel de Física.

(11)

Já em 1961, Jönsson repetiu o famoso experimento de fenda dupla de 1801 de Young (que havia demonstrado a natureza ondulatória da luz), mas agora um feixe eletrônico.

Na década de 1990 (mais precisamente 1991), Carnal e Mlynek também realizaram o mesmo experimento, mas usando um feixe de átomos de hélio.

Hoje, a natureza ondulatória da matéria está firmemente estabelecida do ponto de vista experimental e pode ser compreendida do ponto de vista teórico pela Mecânica Ondulatória de Schrödinger.