Computação Aplicada à Engenharia

Prof. Claudio Teodoro dos Santos

Revisão de Álgebra

Tópicos (no quadro branco)

- Matrizes
- Operações com matrizes

Conceitos básicos

Recomenda-se usar letras minúsculas para representar vetores. Os elementos são referidos como x_i.

- Produto interno de vetores:

$$x^T y \in \mathbb{R} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

- Produto externo de vetores:

$$xy^T \in \mathbb{R}^{m \times n} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & \cdots & x_1y_n \\ x_2y_1 & x_2y_2 & \cdots & x_2y_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_my_1 & x_my_2 & \cdots & x_my_n \end{bmatrix}$$

Conceitos básicos

Recomenda-se usar letras maiúsculas para representar matrizes. Os elementos são referidos como $A_{i,j}$.

- Produto de Matrizes:

$$A \in \mathbb{R}^{m \times n} \qquad B \in \mathbb{R}^{n \times p}$$

$$C = AB \in \mathbb{R}^{m \times p}$$

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} B_{kj}$$

p.ex.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

Matrizes especiais

$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ diagonal

$\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$ Triangular superior

$\begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & e & 0 \\ 0 & f & g & h \\ 0 & 0 & i & j \end{pmatrix}$ tri-diagonal

$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \\ d & e & f \end{pmatrix}$ Triangular inferior

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ I (matriz identidade)

Conceitos básicos

Transposição:

- troca de linhas com colunas

OU

- "reflexão" do vetor/matriz em uma linha

p.ex. $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

- $(A^T)^T = A$
- $(AB)^T = B^T A^T$
- $(A + B)^T = A^T + B^T$

Inversa de uma matriz

- A inversa de uma matriz quadrada *A*, denotada como A^{-1}, é a matriz tal que:
  - $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ (matriz identidade)
- Se A^{-1} e B^{-1} existem, então
  - $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$,
  - $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
- Para matrizes ortonormais: $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T$
- Para matrizes diagonais: $\mathbf{D}^{-1} = \operatorname{diag}\{d_1^{-1}, \ldots, d_n^{-1}\}$

Solução de Sistemas Lineares

- O sistema de equações lineares mais simples tem duas equações e duas variáveis, por exemplo:

$$x_1 - x_2 = -1$$
$$3x_1 + x_2 = 9$$

- Este sistema pode ser representado da forma matricial Ax = b

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Independência linear

- Um conjunto de vetores é linearmente independente se nenhum dos vetores pode ser escrito como uma combinação linear dos outros
- Vetores $v_1,\ldots,v_k$ são L.I. se $c_1v_1+\ldots+c_kv_k = 0$, o que implica: $c_1=\ldots=c_k=0$

$$\begin{pmatrix} | & | & | \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ | & | & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

p.ex. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (u,v)=(0,0), i.e. as colunas são linearmente independentes.

$x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ $x_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$ $x_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}$ $x_3 = -2x_1 + x_2$

Determinante

The general form for a 2-equation system with 2 variables is
$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$ $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$

If we multiply the top equation by a_{22} and the bottom equation by a_{12}:
$a_{22}a_{11}x_1 + a_{12}a_{22}x_2 = a_{22}b_1$
$a_{12}a_{21}x_1 + a_{12}a_{22}x_2 = a_{12}b_2$

and subtract the bottom equation from the top
$(a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21})x_1 = a_{22}b_1 - a_{12}b_2$
$x_1 = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21}}$

There can only be a solution if the denominator here is $\neq 0$. The denominator $(a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21})$ is the *determinant* of the matrix A and we can compute it using the det function.

Independência Linear

- Considere o seguinte sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

- O determinante desta matriz é zero.

We say that vectors $v_1, v_2, ..., v_n$ are *linearly dependent* when there exist nonzero constants $c_1, c_2, ..., c_n$ such that

$$c_1v_1 + c_2v_2 + ... + c_nv_n = 0$$

Independência linear e posto (rank)

- O posto (rank) de uma matriz é simplesmente o número de linhas que são linearmente dependentes, ou o número de linhas linearmente independentes.

- Pode ser mostrado que o posto em relação às linhas é igual ao posto em relação as colunas, i.e., o posto é também igual ao número de colunas linearmente independentes.

Sistema subdeterminado x superdeterminedo

- A matriz A pode ter dimensão m×n com m≠n.
- Se m < n então existem mais variáveis do que equações. Neste caso, será impossível encontrar uma única solução exata. Este é um sistema *subdeterminado*.
- Se m > n então existem mais equações do que variáveis. Pode ser impossível satisfazer todas as equações simultâneamente. Este é um sistema *superdeterminado*.