

Hidrodinâmica I

Teoria Linear de Ondas de Gravidade:
Campo de Velocidades e Campo de Pressão



PNV3323 – Hidrodinâmica I

O campo de velocidades

As velocidades do escoamento:

$$\vec{v}(x, z, t) = \nabla\phi(x, z, t) = u(x, z, t)\vec{i} + w(x, z, t)\vec{k}$$

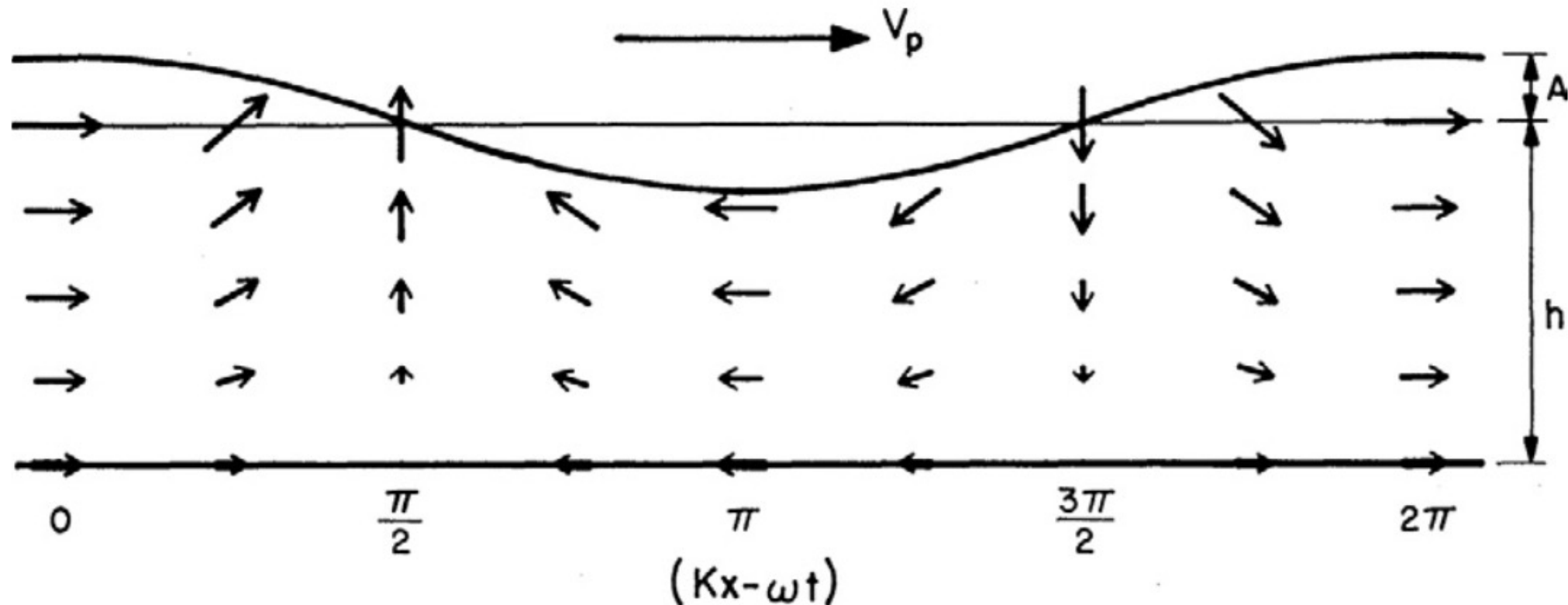
com:

$$u(x, z, t) = \omega A \frac{\cosh k(z + h)}{\sinh(kh)} \cos(kx - \omega t)$$

$$w(x, z, t) = \omega A \frac{\sinh k(z + h)}{\sinh(kh)} \sin(kx - \omega t)$$

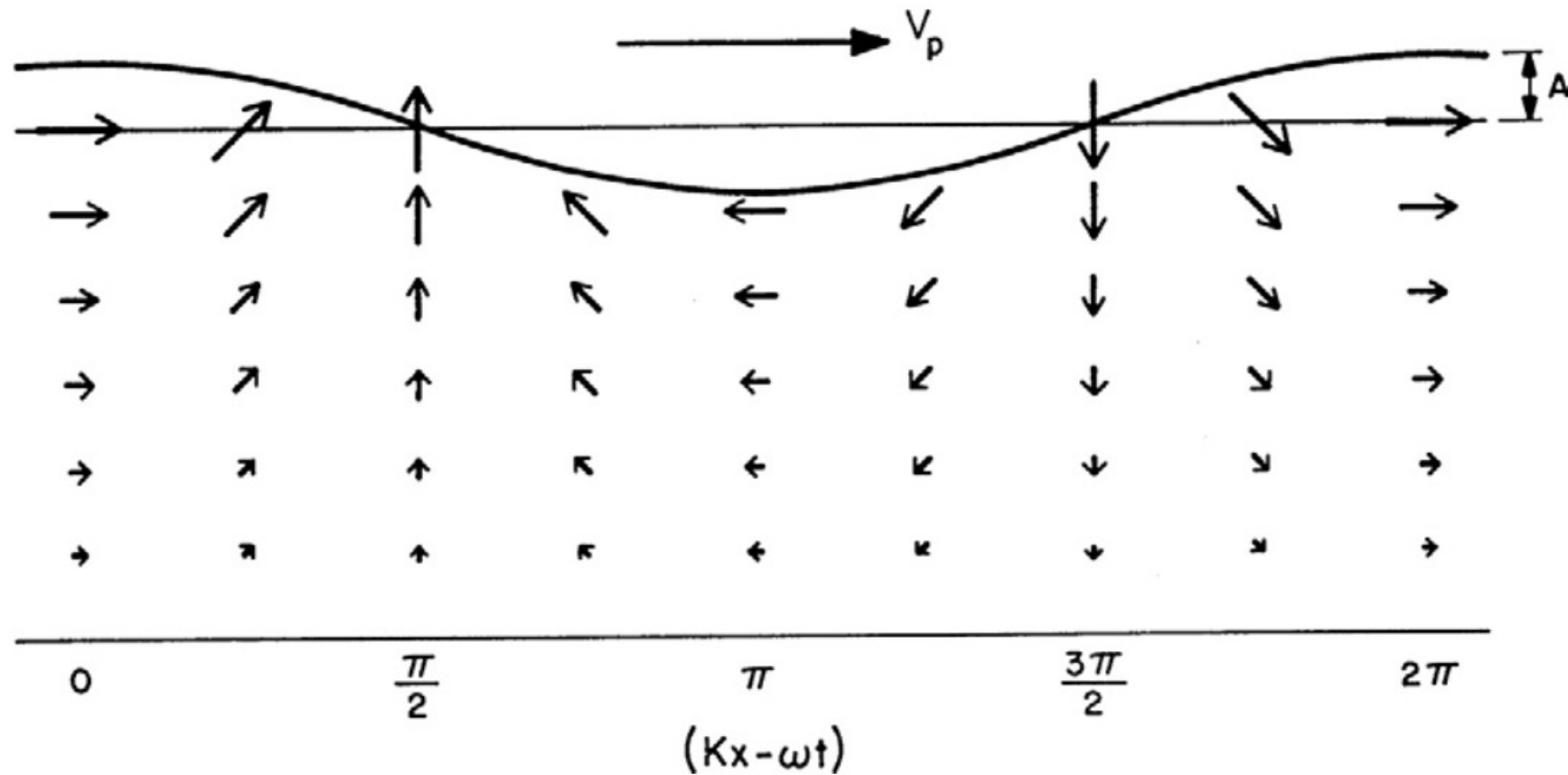
O campo de velocidades

O padrão do escoamento



O campo de velocidades

O padrão do escoamento



O campo de velocidades

Exercício:

Mostre que as trajetórias das partículas fluidas correspondem a órbitas elípticas, do tipo:

$$\left(\frac{x(t) - \bar{x}}{a(\bar{z}, A, kh)} \right)^2 + \left(\frac{z(t) - \bar{z}}{b(\bar{z}, A, kh)} \right)^2 = 1$$

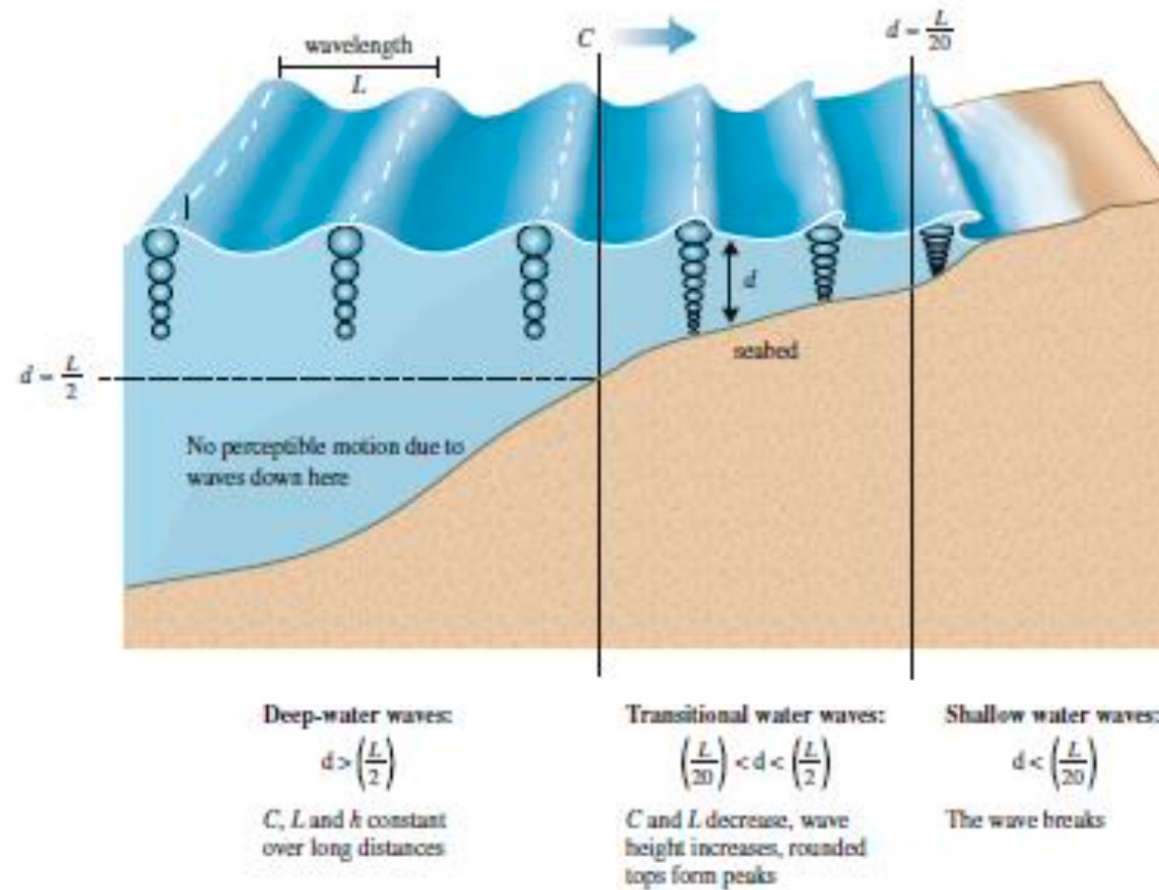
Verifique que:

Na superfície-livre ($z = 0$): $b = A$

No fundo ($z = -h$): $b = 0$

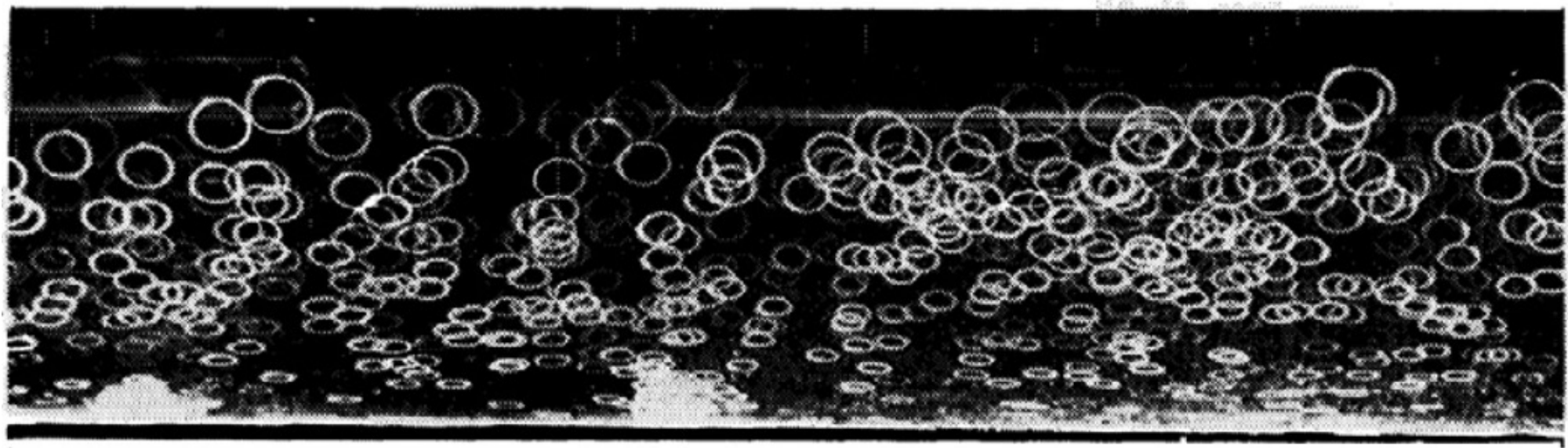
Determine como varia a razão a/b em função do parâmetro kh

O campo de velocidades



O campo de velocidades

Trajetórias das partículas



O campo de pressões

Na linearização do PVC, desconsideramos o termos quadrático na pressão da superfície-livre. De forma coerente, esse termo será descartado no campo de pressões:

$$p(x, z, t) = -\rho \frac{\partial \phi}{\partial t}(x, z, t) - \rho g z$$

Portanto:

$$p(x, z, t) = \rho g A \cos(kx - \omega t) \frac{\cosh k(z + h)}{\cosh kh} - \rho g z$$

Ou:

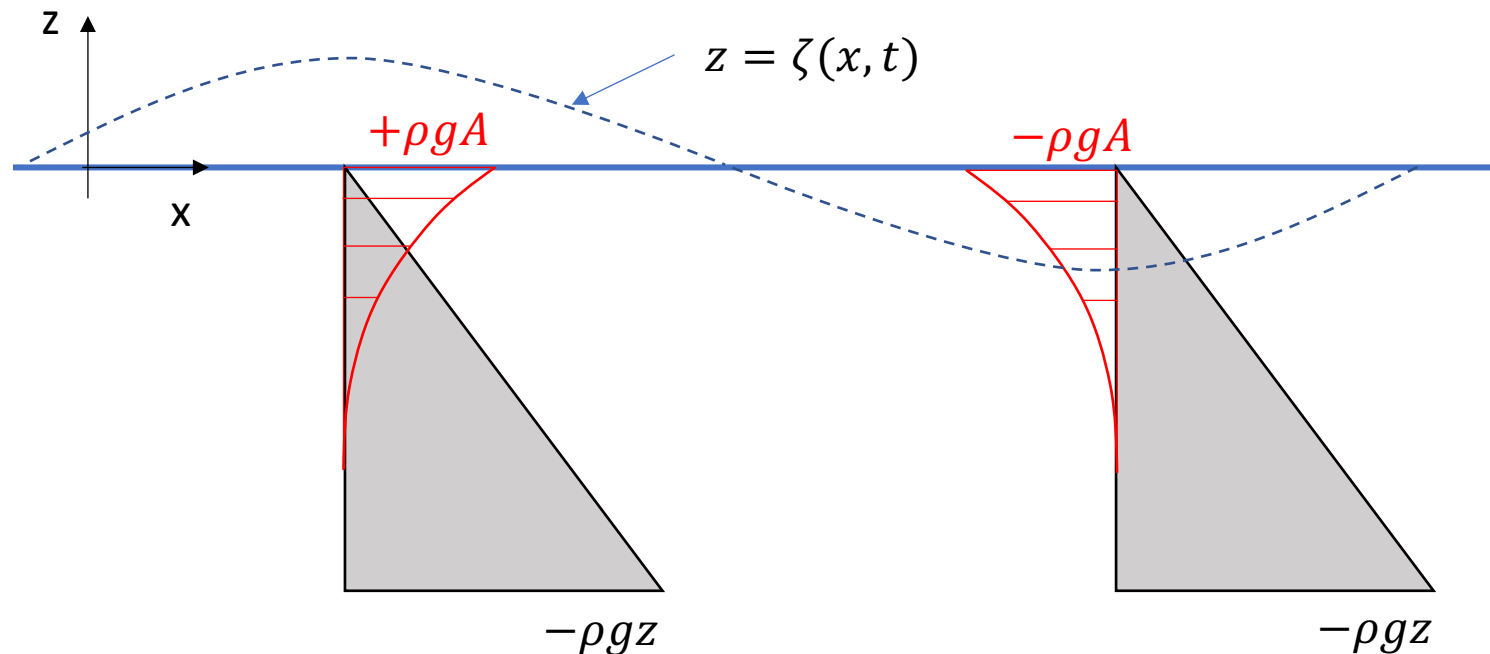
$$p(x, z, t) = \rho g \zeta(x, t) \frac{\cosh k(z + h)}{\cosh kh} - \rho g z$$

Para águas profundas:

$$p(x, z, t) = \rho g \zeta(x, t) e^{kz} - \rho g z$$

O campo de pressões

Também no caso do campo de pressões, a solução linear é normalmente adotada como sendo válida para todo o semi-espço $z \leq 0$:



O campo de pressões

Exercício

Determine qual a amplitude de pressão oscilatória induzida por uma onda de amplitude $A=1\text{m}$ e período $T=10\text{s}$ em um ponto da superfície do fundo do mar ($z = -h$) quando:

- a) $h=10\text{m}$
- b) $h=100\text{m}$

Considerar: $\rho=1000\text{kg/m}^3$ e $g=10\text{m/s}^2$

R. (a) 8.1 kPa (b) 0.4 kPa

O campo de pressões

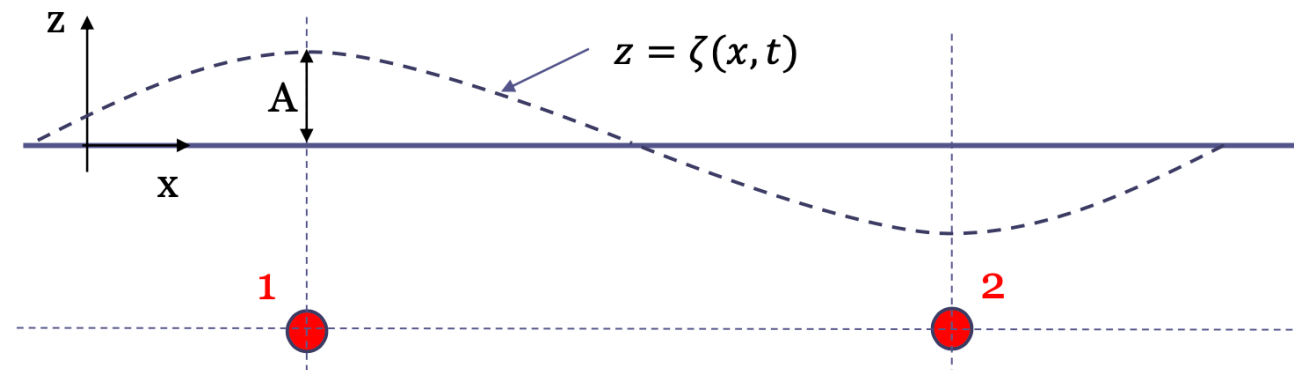
Exercício

Considere os pontos (1) e (2) apresentados na figura abaixo, ambos a uma profundidade $z = -2A$ da superfície média.

Se p_{col} denota a pressão estática (de coluna d'água) ao qual esses dois pontos estariam submetidos *se o problema fosse estático*, verifique que:

$$p_1 < p_{col,1} = 3\rho gA$$

$$p_2 > p_{col,2} = \rho gA$$



R. (a) 8.1 kPa (b) 0.4 kPa