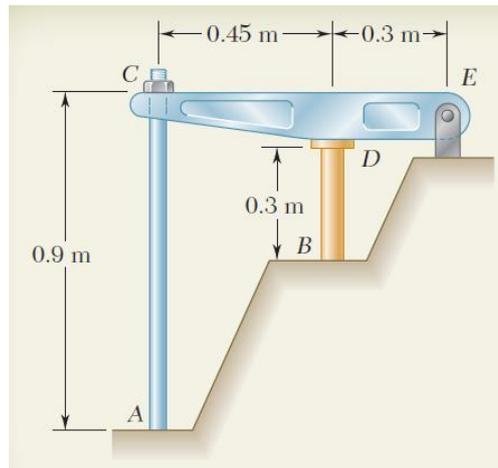


Exemplo Hiperestático

A estrutura da figura é formada por um elemento horizontal rígido CDE , apoiado em E e conectado a duas hastes verticais: AC de aço ($E = 200 \text{ GPa}$, $\alpha = 11,7 \times 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$) com diâmetro de 22 mm; e BD de latão ($E = 105 \text{ GPa}$, $\alpha = 20,9 \times 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$) com diâmetro de 30 mm. Determinar a tensão na haste BD e os deslocamentos verticais das extremidades da estrutura, considerando uma elevação da temperatura de 30°C apenas na haste de latão.



Estrutura hiperestática

Classificação da estrutura

Primeiramente, devemos classificar a estrutura em isostática ou hiperestática. Para isso, é necessário identificar o número de reações de apoio (ou o número de incógnitas). De acordo com o DCL abaixo e lembrando que as hastes verticais só transmitem força longitudinal, temos três equações de equilíbrio no plano (somatório de forças horizontais, forças verticais e momento) para quatro incógnitas: a reação vertical R_A ; a reação vertical R_B ; e as duas reações no apoio fixo E (E_x e E_y). O equilíbrio pode ser expresso pelas seguintes equações:

$$\sum F_{hor} = 0 \Rightarrow E_x = 0 \quad (1.1)$$

$$\sum F_{ver} = 0 \Rightarrow R_A + R_B + E_y = 0 \quad (1.2)$$

$$\sum M_E = 0 \Rightarrow R_A \cdot 75 + R_B \cdot 30 = 0 \quad (1.3)$$

Apesar de ser possível determinar a reação horizontal E_x (que é nula), o problema continua sendo estaticamente indeterminado, pois ainda temos **três reações incógnitas para duas equações de equilíbrio**. Supõe-se que as reações verticais são todas para cima, o que não é problema quando se trata de valores incógnitos. O sinal ao final do exercício confirmará se são para cima (em caso positivo) ou para baixo (em caso negativo).

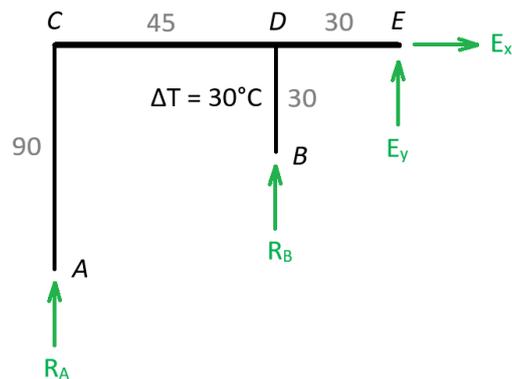


Diagrama de corpo livre (DCL)

Vale ressaltar que, neste caso, a inexistência de carregamento externo não implica que as reações sejam nulas. Em geral, estruturas isostáticas sem forças externas mas com variação térmica estão livres para se deformar sob ação da temperatura e, portanto, as reações são nulas. Já no caso hiperestático, a existência de vínculos adicionais impede (ou dificulta) a ocorrência de deformação térmica e, para isso, os suportes exercem forças de reação que limitam a movimentação da estrutura. Dessa forma, as reações de apoio em estruturas hiperestáticas irão existir mesmo que não haja carregamento externo (forças mecânicas). No caso específico do problema analisado, a dilatação térmica da haste BD tende a levantar os pontos D e C , o que aumenta o comprimento da haste AC . Contudo, para que isso ocorra, deve haver esforço normal interno em AC e, portanto, uma força é transmitida por essa haste. Assim sendo, **o problema em questão é hiperestático**.

Em seguida, o problema será resolvido pelos dois métodos apresentados em sala de aula: o Método das Forças e o Método dos Deslocamentos.

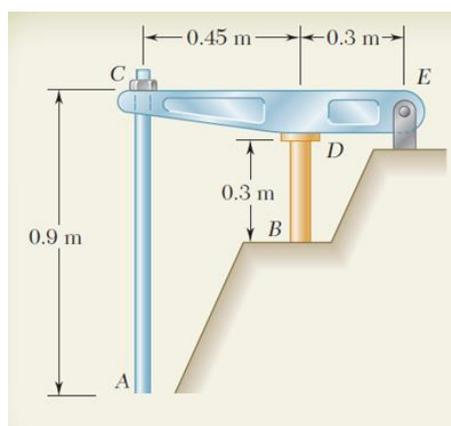
Método das Forças

Uma vez concluído que a estrutura é de fato hiperestática, podemos aplicar o Método das Forças.

A primeira etapa envolve a eliminação dos vínculos adicionais. No presente problema, temos apenas um vínculo adicional (estaticamente desnecessário). Optou-se pelo apoio A como vínculo adicional. Além disso, a solução apresentada aqui será feita por meio da **separação do problema em dois casos isostáticos independentes** a partir da estrutura da figura abaixo:

Caso (1): variação térmica na haste BD , sem reação adicional R_A

Caso (2): sem variação térmica, com reação adicional R_A



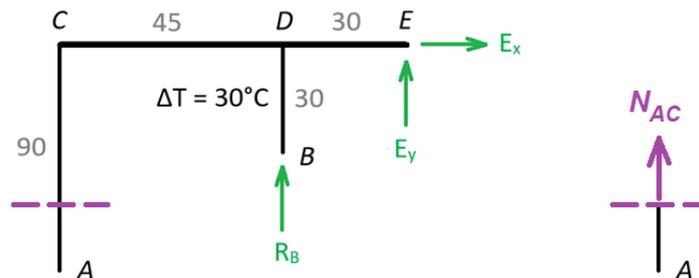
Estrutura isostática correspondente (sem o vínculo adicional em A)

A segunda etapa é a solução dos casos isostáticos, o que consiste no cálculo do deslocamento associado ao vínculo adicional, ou seja, δ_A . Para cada caso (ou subproblema), a sequência é a mesma dos problemas isostáticos: determinar o esforço interno normal (N) e a variação de comprimento (ΔL) nas hastes e, com as relações de compatibilidade geométrica, obter os deslocamentos axiais (ou verticais) δ .

Caso (1) - variação térmica em BD

Como não temos reação R_A no Caso (1), a normal na haste AC é nula, conforme figura abaixo. Ademais, se $R_A = 0$, o equilíbrio de momento em torno do ponto E (equação 1.3)

implica que $R_B = 0$ e, conseqüentemente, o equilíbrio de forças na vertical (1.2) resulta em $E_y = 0$. Ou seja, já que o Caso (1) é isostático e envolve apenas variação térmica, as reações para esse *subproblema* são nulas.



Método das seções para cálculo da normal na haste AC, para o Caso (1)

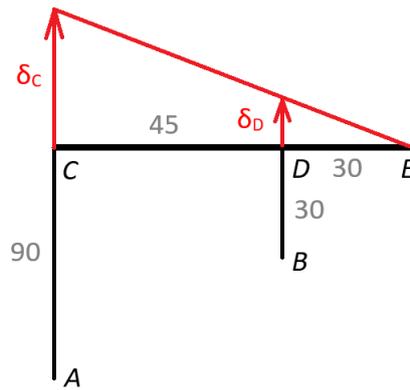
De posse dos valores de normal (N) nas hastes e da variação térmica em cada uma delas, montamos a tabela abaixo com a fórmula completa para cálculo da variação de comprimento $\Delta L = \frac{NL}{EA} + \alpha L \Delta T$:

Haste	N (kN)	L (mm)	E (GPa)	A (mm ²)	α (°C ⁻¹)	ΔT (°C)	ΔL (mm)
AC	0	900	200	380.1327	0.000017	0	0.0000
BD	0	300	105	706.8583	0.0000209	30	0.1881

Variação de comprimento das hastes para o Caso (1)

Ou seja, no Caso (1) a haste AC não sofre alongamento nem encurtamento, mas a haste BD alonga 0,1881 mm.

Em seguida, a partir das variações de comprimento acima, determinamos os deslocamentos verticais dos pontos D, C e A por meio da compatibilidade geométrica do problema. Considerando apenas deslocamentos verticais, podemos desenhar a posição deformada da estrutura no Caso (1) em vermelho, de acordo com a figura abaixo.



Posições indeformada (preta) e deformada (vermelha) para o Caso (1)

O raciocínio é o seguinte: se o ponto B está preso ($\delta_B = 0$) e se a haste BD alonga $0,1881$ mm, então o deslocamento vertical do ponto D é $\delta_D = 0,1881$ mm para cima. Além disso, como o elemento horizontal é rígido, ele rotaciona em torno do ponto E (apoio fixo), mas permanece reto, o que permite relacionar os deslocamentos dos pontos D e C por uma semelhança de triângulos:

$$\frac{\delta_C}{75} = \frac{\delta_D}{30} \Rightarrow \delta_C = 2,5\delta_D \quad (2)$$

Substituindo o valor do deslocamento do ponto D , concluímos que $\delta_C = 0,47025$ mm (para cima) no Caso (1). Utilizando um raciocínio similar ao da haste BD , se o ponto C sobe $0,47025$ mm e se a haste AC não sofre variação de comprimento, então o ponto A também sobe $0,47025$ mm.

Alternativamente, a obtenção dos deslocamentos verticais acima pode ser feita a partir do deslocamento relativo, considerando a regra da orientação do eixo. Adotando o eixo vertical apontando para cima, a compatibilidade geométrica resulta nas seguintes expressões:

$$\Delta L_{AC} = \delta_C - \delta_A \Rightarrow \delta_C = \delta_A + \Delta L_{AC} \quad (3.1)$$

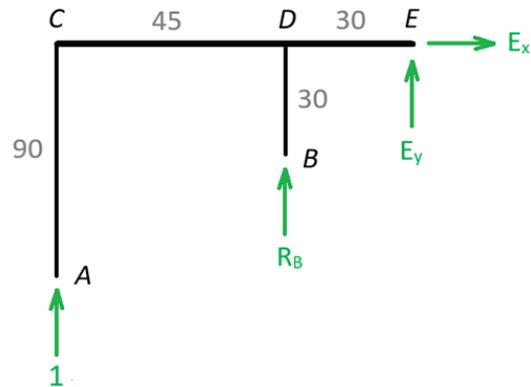
$$\Delta L_{BD} = \delta_D - \delta_B = \delta_D - 0 \Rightarrow \delta_D = \Delta L_{BD} \quad (3.2)$$

Com os valores calculados na tabela acima, concluímos que $\delta_D = 0,1881$ mm para cima (valor positivo implica em deslocamento com o mesmo sentido do eixo vertical) e $\delta_A = \delta_C = 0,47026$ mm também para cima (valor positivo).

Assim sendo, marcamos o valor do deslocamento vertical do ponto A como solução do Caso (1): $\delta_A^{(1)} = 0,47025$ mm para cima.

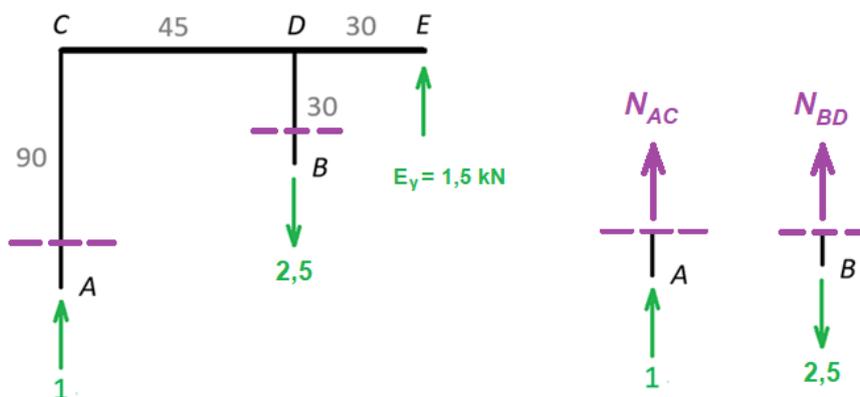
Caso (2) - reação adicional R_A

A sequência a ser seguida é a mesma do Caso (2), só que agora para outro subproblema isostático (similar ao primeiro), conforme figura abaixo. O artifício da carga unitária no lugar da reação adicional R_A é apenas para facilitar os cálculos efetuados na tabela das variações de comprimento.



Caso (2) - Estrutura isostática com reação adicional unitária ($R_A = 1$ kN)

Se a reação adicional é $R_A = 1$ kN, então o equilíbrio de momento (1.3) resulta em $R_B = -2,5$ kN (ou seja, 2,5 kN para baixo). Com esses dois valores, o equilíbrio de forças na vertical permite o cálculo da reação vertical E_y . Contudo, não é necessário determinar tal reação de apoio (embora seja fácil mostrar que $E_y = 1,5$ kN para cima). Calculadas as reações de apoio nas hastes, a análise pelo método das seções na figura abaixo permite concluir que a normal na haste AC é $N_{AC} = -1$ kN (compressão) e em BD é $N_{BD} = 2,5$ kN (tração).



Método das seções para cálculo da normal nas hastes, no Caso (2)

O cálculo da variação de comprimento em cada haste no Caso (2) é feito considerando os valores de normal acima e sem variação térmica:

Haste	N (kN)	L (mm)	E (GPa)	A (mm ²)	α (°C ⁻¹)	ΔT (°C)	ΔL (mm)
AC	-1	900	200	380.1327	0.000017	0	-0.01184
BD	2.5	300	105	706.8583	0.0000209	0	0.01011

Variação de comprimento das hastes para o Caso (2)

Isto é, no Caso (2) a haste AC encurta 0,01184 mm, mas a haste BD alonga 0,01011 mm, considerando uma reação adicional de valor unitário ($R_A = 1$ kN) para cima.

As relações de compatibilidade geométrica utilizadas no Caso (1) para determinação dos deslocamentos verticais absolutos também podem ser empregadas no Caso (2). A partir delas, conclui-se que $\delta_D = 0,01011$ mm para cima; $\delta_C = 2,5 \delta_D = 0,02526$ mm para cima, e $\delta_A = \delta_C - \Delta L_{AC} = 0,03710$ mm para cima. Pode-se verificar o movimento na haste AC ao observar que, se a extremidade superior (ponto C) sobe e a haste encurta (ou diminui de tamanho), isso implica que a extremidade inferior (ponto A) sobe mais do que o ponto C.

Com isso, resolvemos o Caso (2) para uma carga unitária. Lembrando da proporcionalidade entre força e deslocamento, a reação adicional R_A no Caso (2) provoca o seguinte deslocamento associado: $\delta_A^{(2)} = 0,03710 R_A$ mm para cima.

Superposição de efeitos e imposição da compatibilidade geométrica

O efeito combinado da variação térmica em BD e da reação adicional R_A pode ser obtido superpondo-se os valores calculados nos Casos (1) e (2):

$$\delta_A^{Total} = \delta_A^{(1)} + \delta_A^{(2)} = 0,47025 + 0,03710 R_A \quad (4)$$

A condição de compatibilidade geométrica referente ao vínculo adicional pode ser descrita observando-se o desenho inicial do problema. A partir dela, determina-se o valor da reação adicional:

$$\delta_A = 0 \Rightarrow R_A = -12,675 \text{ kN} \quad (5)$$

Ou seja, a reação adicional é $R_A = 12,675$ kN para baixo.

Com o valor da reação adicional, a outra reação pode ser calculada pelo equilíbrio:

$$R_B = 31,687 \text{ kN (para cima)} \quad (6)$$

Com as reações nas hastes determinadas, monta-se a tabela final:

Haste	N (kN)	L (mm)	E (GPa)	A (mm ²)	α (°C-1)	ΔT (°C)	ΔL (mm)
AC	12.675	900	200	380.1327	0.000017	0	0.15005
BD	-31.687	300	105	706.8583	0.0000209	30	0.06002

Respostas finais

Tensão normal na haste *BD* (definição):

$$\sigma_{BD} = \frac{N_{BD}}{A_{BD}} = -44,83 \text{ MPa} \quad (7.1)$$

Deslocamentos das extremidades:

$$\delta_D = 0,06002 \text{ mm para cima} \quad (7.2)$$

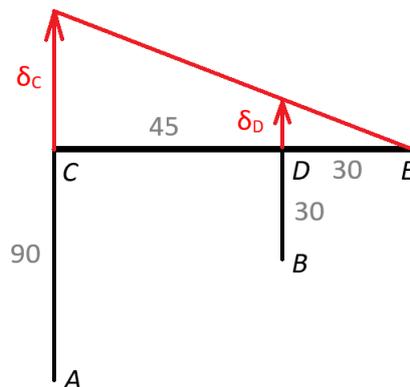
$$\delta_C = 2,5 \delta_D = 0,15005 \text{ mm para cima} \quad (7.3)$$

Verificação:

$$\delta_A = \delta_C - \Delta L_{AC} = 0 \quad (7.4)$$

Método dos Deslocamentos

No segundo método, é necessário identificar as deslocabilidades da estrutura, o que pode ser feito por meio da mesma figura utilizada para definir a compatibilidade geométrica no Caso (1) do Método das Forças, repetida abaixo.



Posições indeformada (preta) e deformada (vermelha)

Já que $\delta_A = \delta_B = 0$, temos apenas uma deslocabilidade (ou uma variável cinemática capaz de definir todo o movimento da estrutura), a qual pode ser o deslocamento vertical de

C (δ_C), o deslocamento vertical de D (δ_D) ou a rotação do elemento rígido horizontal em torno do ponto E (θ_{CDE}). Adotou-se aqui o deslocamento do ponto D como a deslocabilidade do sistema, ou seja, o valor de δ_D permite definir completamente o problema (deformações, forças, tensões etc.).

Escolhida a deslocabilidade, determina-se a variação de comprimento nas hastes em função do deslocamento δ_D :

$$\Delta L_{BD} = \delta_D \quad (8.1)$$

$$\Delta L_{AC} = \delta_C = 2,5 \delta_D \quad (8.2)$$

O próximo passo é empregar a fórmula inversa para cálculo do esforço interno normal nas hastes a partir da deslocabilidade:

$$\Delta L = \frac{NL}{EA} + \alpha L \Delta T \Rightarrow N = \frac{EA}{L} (\Delta L - \alpha L \Delta T) = EA \left(\frac{\Delta L}{L} - \alpha \Delta T \right) \quad (9)$$

Aplicando as expressões (8):

$$N_{AC} = 84,474 (2,5 \delta_D) \quad (10.1)$$

$$N_{BD} = 247,40 (\delta_D - 0,1881) \quad (10.2)$$

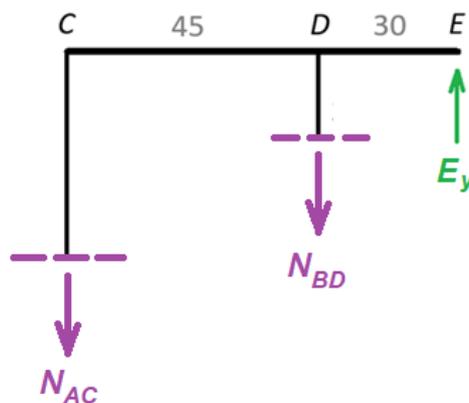
A determinação da deslocabilidade é feita via imposição do equilíbrio com auxílio da figura abaixo. Para determinar o valor da deslocabilidade sem precisar calcular a reação E_y , fazemos somatório de momento em torno do ponto E :

$$N_{AC} \cdot 75 + N_{BD} \cdot 30 = 0 \Rightarrow 84,474(2,5\delta_D)75 + 247,4(\delta_D - 0,1881)30 = 0$$

$$\Rightarrow \delta_D = 0,06002 \text{ mm (para cima)} \quad (11.1)$$

$$\Rightarrow \delta_C = 0,15005 \text{ mm (para cima)} \quad (11.2)$$

Ou seja, o mesmo valor obtido pelo Método das Forças na equação (7.2).



Método das Seções para cálculo da deslocabilidade (suposição inicial: ambas as hastes estão tracionadas)

Portanto, a solução obtida é a mesma:

Haste	E (GPa)	A (mm ²)	L (mm)	α (°C ⁻¹)	ΔT (°C)	ΔL (mm)	N (kN)	σ (MPa)
AC	200	380.1327	900	0.000017	0	0.15005	12.675	33.344
BD	105	706.8583	300	0.0000209	30	0.06002	-31.687	-44.829

Valores finais obtidos pelo Método dos Deslocamentos (a obtenção das três últimas colunas foi feita a partir das equações 8, 10 e 11)

A tabela acima confirma que a haste *AC* é tracionada e a *BD* é comprimida. Caso seja pedido o valor da reação vertical em *E*, aplica-se o equilíbrio na vertical (1.2): $E_y = 19,012$ kN para baixo.