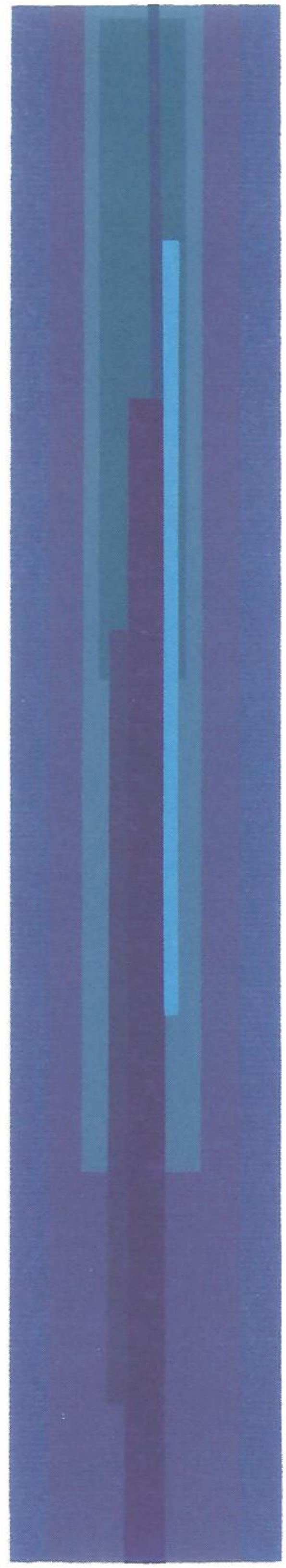
Números
Uma Introdução à Matemática



César Polcino Milies
Sônia Pitta Coelho

edusp

Observamos que em qualquer apresentação axiomática o começo tende a ser cansativo, precisamente por ser necessário demonstrar alguns fatos que são bem conhecidos. Tentamos poupar o leitor, na medida do possível, desse inevitável aborrecimento. Assim, nosso sistema de axiomas é superabundante, isto é, admitimos mais propriedades do que as estritamente necessárias, esperando tornar mais fluente a exposição. Para maiores detalhes, o leitor pode consultar os exercícios.

O primeiro grupo de axiomas descreverá algumas propriedades da soma que certamente são familiares ao leitor.

A.1 Propriedade Associativa: Para toda terna a, b, c de inteiros tem-se que

$$a + (b + c) = (a + b) + c \ .$$

A.2 Existência do Neutro: Existe um único elemento, denominado *neutro aditivo* ou *zero*, que indicaremos por 0, tal que

$$a + 0 = a \text{, para todo } a \in \mathbb{Z} \ .$$

A.3 Existência do Oposto: Para cada inteiro a existe um único elemento que chamaremos oposto de a e indicaremos por $-a$, tal que

$$a + (-a) = 0 \ .$$

A.4 Propriedade Comutativa: Para todo par a, b de inteiros tem-se que

$$a + b = b + a \ .$$

O próximo grupo de axiomas explicita algumas das propriedades da multiplicação.

A.5 Propriedade Associativa: Para toda terna a, b, c de inteiros tem-se que

$$a(bc) = (ab)c \ .$$

A.6 Existência do Neutro: Existe um único elemento, diferente de zero, denominado *neutro multiplicativo*, que indicaremos por 1, tal que

$1 \cdot a = a$, para todo $a \in \mathbb{Z}$.

A.7 Propriedade Cancelativa: Para toda terna a, b, c de inteiros, com $a \neq 0$, tem-se que,

se $ab = ac$, então, $b = c$.

A.8 Propriedade Comutativa: Para todo par a, b de inteiros, tem-se que

$ab = ba$.

Comparando o grupo de axiomas dados para a adição e a multiplicação, percebe-se uma grande semelhança entre ambos. A única diferença notável surge entre os axiomas A.3 e A.7. Um análogo a A.3 para multiplicação afirmaria que para todo $a \in \mathbb{Z}$ existe um elemento, digamos, $a' \in \mathbb{Z}$, tal que $a \cdot a' = 1$. Sabemos, porém, que isso não acontece: quando $a = 2$, por exemplo, não existe nenhum inteiro a' tal que $2a' = 1$ (para considerações mais precisas veja o exercício 7).

Poderíamos nos perguntar ainda por que não colocar, entre os axiomas da adição, um análogo à propriedade cancelativa A.7. Não o fizemos apenas porque é muito fácil *demonstrar* esse resultado a partir dos axiomas.

1.2.1 Proposição (Propriedade Cancelativa da Adição)

Para toda terna a, b, c de inteiros tem-se que,

se $a + b = a + c$ *, então* $b = c$.

Demonstração

Se $a + b = a + c$, somando o oposto de a a ambos os membros dessa igualdade, temos que

$$(-a) + (a + b) = (-a) + (a + c) \ .$$

Usando a propriedade associativa, temos:

$$[\,(-a)+(a)\,]+b=[\,(-a)+(a)\,]+c\ ,$$

isto é,

$$0+b=0+c\ ,$$

portanto,

$$b=c\ .$$ ■

O próximo axioma relaciona ambas operações.

A.9 Propriedade Distributiva: Para toda terna *a*, *b*, *c* de inteiros tem-se que

$$a\,(\,b+c\,)=ab+ac\ .$$

As próximas afirmações também são intuitivamente evidentes, mas conforme o plano inicial serão demonstradas com base nos axiomas até aqui introduzidos.

1.2.2 Proposição

Para todo inteiro a , tem-se que $a\cdot 0=0$.

Demonstração

Como $a\cdot 0+a\cdot 0=a\,(\,0+0\,)=a\cdot 0=a\cdot 0+0$, comparando o primeiro e o último termo da cadeia de igualdades acima temos que

$$a\cdot 0+a\cdot 0=a\cdot 0+0\ .$$

Usando a propriedade cancelativa da adição, vem imediatamente que

$$a\cdot 0=0\ .$$ ■

1.2.3 Proposição

Sejam a, b inteiros, tais que $a\cdot b=0$. *Então,* $a=0$ *ou* $b=0$.

Demonstração

Se $ab = 0$, usando a proposição anterior podemos escrever essa igualdade na forma $ab = a \cdot 0$.

Se $a = 0$, a proposição está demonstrada. Se $a \neq 0$, podemos usar o axioma A.7 para cancelar e obtemos $b = 0$. ■

Se o leitor lembra da forma como são apresentadas as operações com números inteiros no curso secundário e o mistério que envolve o processo de decidir o sinal de um produto, certamente apreciará as vantagens do método axiomático da proposição seguinte.

1.2.4 Proposição (Regra dos Sinais)

Sejam a e b inteiros. Então vale:

(i) $-(-a) = a$

(ii) $(-a)(b) = -(ab) = a(-b)$

(iii) $(-a)(-b) = ab$.

Demonstração

Notamos inicialmente que podemos interpretar o axioma A.3 da seguinte forma: o oposto de um elemento a é o único inteiro que verifica a equação $a + x = 0$.

Para provar (i) basta observar que a verifica a equação $(-a) + x = 0$. Conseqüentemente, a é o oposto de $-a$ (que é o elemento indicado por $-(-a)$).

Para provar a primeira igualdade de (ii), basta observar que $(-a)\,b$ é a solução de $ab + x = 0$, já que

$$ab + (-a)b = [(-a) + a]\,b = 0 \cdot b = 0 .$$

Analogamente, verifique que $ab + a(-b) = 0$.

Para (iii), podemos observar diretamente que aplicando (ii) temos

$$(-a) \cdot (-b) = -(a(-b)) = -(-(ab)) ,$$

e usando também (i) no último termo segue que

$$(-a)(-b) = ab \ . \qquad \blacksquare$$