II LINGUAGEM FORMAL – SEMÂNTICA

F) Sobre a verdade ou falsidade das fórmulas de uma Teoria Axiomática

A abordagem aqui adotada é uma introdução intuitiva à Semântica das linguagens de Teorias formais de 1ª ordem. A abordagem rigorosa de tal semântica é do domínio da Teoria de Modelos para tais linguagens, que não trataremos neste texto introdutório.

Na parte I fizemos a descrição sintática de como obter as fórmulas de uma dada teoria, ou seja, as afirmações corretamente escritas em uma linguagem formal. Faremos agora uma descrição de como devem ser elas interpretadas, ou seja, como se atribui a cada fórmula um significado que nos permita avaliar se são verdadeiras ou falsas. Para tanto, inicialmente é preciso fixar um contexto, também chamado de Universo (do discurso), adequado a uma atribuição de significados aos símbolos próprios da teoria – que são utilizados para especificar tipos distintos de objetos (os predicados unários) ou relações básicas entre objetos do universo do discurso da teoria (os demais predicados). Fixadas, tanto as interpretações para estes símbolos, como também uma maneira de interpretar a leitura e a atribuição de valores verdade (ou falsidade) aos símbolos lógicos, pode-se fazer a descrição de como atribuir uma interpretação a cada fórmula, no Universo considerado, que nos permita avaliar se elas são verdadeiras ou falsas. Tais universos devem ser sempre conjuntos não vazios, como garantia da não trivialidade das teorias axiomáticas.

Exemplos: a) $0 = 1$ é uma fórmula falsa no Universo dos números naturais, segundo a interpretação usual das duas constantes utilizadas.

b) $\emptyset \in \wp(\emptyset)$ é uma fórmula verdadeira para conjuntos, pela interpretação usualmente atribuída a esses símbolos.

No caso das fórmulas compostas, nem sempre é intuitivo perceber o seu significado e, consequentemente, sua validade. Sendo P e Q variáveis metalinguísticas que representam fórmulas, chamamos de proposições as fórmulas dos tipos: $\neg P$, $P \wedge Q$, $P \vee Q$, $P \rightarrow Q$, $P \leftrightarrow Q$, respectivamente chamadas de negação, conjunção, disjunção, implicação e equivalência. Os valores verdade de tais fórmulas têm definições relativamente simples, por representarem afirmações que relacionam (conectam) suas sub fórmulas apenas por meio dos conectivos lógicos. A parte da Lógica formal de 1ª ordem que trata destes tipos de fórmulas compostas é chamada de Cálculo Proposicional.

Fórmulas iniciadas por quantificadores – chamadas de afirmações universais (as que se iniciam por $\forall$) ou particulares (as que se iniciam por $\exists$) – terão seus valores verdade descritos posteriormente. Como uma fórmula qualquer (cf. E3) pode somente ser atômica (ver E1) ou de algum dos tipos citados nestes últimos parágrafos (ver E2), as definições que damos, aqui na parte II, cobrem as possibilidades de análise de verdade ou falsidade para todas as fórmulas de uma dada teoria axiomática.

As tabelas de verdade dos conectivos lógicos, dadas a seguir, devem ser vistas como as explicações dos significados (lógicos) de tais símbolos, dos significados com os quais eles são empregados sempre na Matemática. Alguns deles correspondem bastante à intuição do senso comum. Já o significado lógico da implicação, por exemplo, não costuma ser tão intuitivo para o iniciante. O importante é perceber que, para a lógica (clássica e bivalente), a verdade, ou o significado verdadeiro é o que transparece destas tabelas.

Definição 1: (de verdade ou falsidade das proposições – fórmulas compostas por meio do uso de conectivos lógicos). No que segue as letras P e Q representam fórmulas, em princípio fechadas, a letra f abrevia a palavra falso e a letra v abrevia a palavra verdadeiro.

1) Tabela da Negação

P	$\neg P$
v	f
f	v

2) Tabela da conjunção

P	Q	$P \wedge Q$
v	v	v
v	f	f
f	v	f
f	f	f

3) Tabela da disjunção

P	Q	$P \vee Q$
v	v	v
v	f	v
f	v	v
f	f	f

4) Tabela da implicação

P	Q	$P \to Q$
v	v	v
v	f	f
f	v	v
f	f	v

5) Tabela da equivalência

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
v	v	v
v	f	f
f	v	f
f	f	v

Comentários:

- a tabela 1 nos diz que a lógica é bivalente. (Por essa razão a lógica é clássica)
- a tabela 3 nos diz que o ou da lógica é não exclusivo.
- a tabela 4 nos diz que pela implicação "só não é válido partir de algo verdadeiro e chegar em algo falso", ou mais precisamente, que uma implicação só é falsa se sua premissa é verdadeira e sua conclusão é falsa.

Exemplos de aplicação das tabelas

1) A fórmula $P \vee \neg P$ é verdadeira, seja qual for P – esse é o enunciado da lei da lógica conhecida por *Princípio do 3º excluído*. Examinemos sua tabela de verdade:

P	$\neg P$	$P \vee \neg P$
v	f	v
f	v	v

2) A fórmula $\neg(P \wedge \neg P)$ é verdadeira, seja qual for P – esse é o enunciado da lei da lógica conhecida por *Princípio da não contradição.* Examinemos sua tabela de verdade:

P	$\neg P$	$P \wedge \neg P$	$\neg(P\wedge\neg P)$
v	f	f	v
f	v	f	v

3) A fórmula $(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P)$ (equivalência entre uma implicação e a sua contra positiva) também é sempre verdadeira, independentemente das particularidades das fórmulas P e Q. Examinemos sua tabela de verdade:

P	Q	$P \rightarrow Q$	$\neg Q$	$\neg P$	$\neg Q \rightarrow \neg P$	$(P\rightarrow Q)\leftrightarrow(\neg Q \rightarrow \neg P)$
v	v	v	f	f	v	v
v	f	f	v	f	f	v
f	v	v	f	v	v	v
f	f	v	v	v	v	v

4) $P \rightarrow (P \vee Q)$ e $(P \vee Q) \rightarrow P$ não são fórmulas logicamente equivalentes: a primeira vale sempre enquanto que a segunda não – sua validade depende do valor de verdade das fórmulas P e Q, como mostra a tabela a seguir:

P	Q	$(P \vee Q)$	$P\rightarrow(P \vee Q)$	$(P \vee Q)\rightarrow P$
v	v	v	v	v
v	f	v	v	v
f	v	v	v	f
f	f	f	v	v

5) $(P \vee Q) \leftrightarrow [(\neg P) \rightarrow Q]$ é sempre verdadeira, sendo, portanto, uma lei da lógica. (Observe que ela justifica o procedimento usual de, para demonstrar a validade de uma

disjunção, nega-se a validade da primeira afirmação e demonstra-se que a segunda deve então valer (Por quê?).)

P	Q	$P \vee Q$	$\neg P$	$\neg P \to Q$	$P \vee Q \leftrightarrow (\neg P \to Q)$
v	v	v	f	v	v
v	f	v	f	v	v
f	v	v	v	v	v
f	f	f	v	f	v

Comentários:

1) Fórmulas (ou afirmações) cujas tabelas de verdade apresentam v em todas as suas linhas, como por exemplo:

$P \vee \neg P$; $\neg(P \vee \neg P)$; $(P \to Q) \leftrightarrow (\neg Q \to \neg P)$; $P \to (P \vee Q)$; $(P \vee Q) \leftrightarrow [(\neg P) \to Q]$;

são chamadas de verdades lógicas, princípios lógicos, ou leis da lógica, pois são verdadeiras, independentemente do valor verdade de suas componentes (sub fórmulas).

2) Fórmulas do tipo $[(P \vee Q) \to P]$ e $[Q \to (P \wedge Q)]$ são ditas contingentes, pois são verdadeiras em alguns casos e falsas em outros, dependendo do valor verdade de suas sub fórmulas P e Q.

3) Chamo a atenção que provamos ser uma verdade lógica a seguinte fórmula, aliás bastante útil na Matemática ou mesmo em argumentações cotidianas (Por quê?):

$$(P \to Q) \leftrightarrow (\neg Q \to \neg P).$$

A fórmula $(\neg Q \to \neg P)$ é chamada de contra positiva de $(P \to Q)$ e vimos que as duas são (logicamente) equivalentes.

Exercício 6: Determine quais das seguintes fórmulas são verdades lógicas e quais são contingentes. Dê uma interpretação intuitiva para as verdades lógicas e forneça exemplos e contraexemplos para as fórmulas contingentes.

1) $(\neg\neg P) \leftrightarrow P$
2) $P \to (Q \to P)$
3) $(P \wedge Q) \leftrightarrow (P \to Q)$
4) $(P \to Q) \leftrightarrow (\neg P \to \neg Q)$
5) $[\neg (Q \wedge P)] \leftrightarrow (\neg Q \vee \neg P)$
6) $[(P \wedge Q) \to R] \leftrightarrow [P \to [Q \to R]]$
7) $[(P \vee Q) \vee R] \leftrightarrow [(\neg P \wedge \neg Q) \to R]$
8) $(P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow [(P \to Q) \wedge (Q \to P)]$
9) $[\neg (P \to Q)] \leftrightarrow (\neg P \to \neg Q)$
10) $[(P \wedge \neg Q) \to (R \wedge \neg R)] \to (P \to Q)$

Fórmulas compostas a partir de outras afirmações básicas (sub fórmulas), cuja composição seja feita apenas com o uso de conectivos lógicos são chamadas de proposições, mesmo se suas componentes contenham quantificadores. O estudo da sintaxe e da semântica de tais tipos de fórmulas é chamado na literatura lógica de Cálculo Proposicional. Exemplo disso é a fórmula: $(\forall x)(x = 0) \vee \neg (\forall x)(x = 0)$, que é uma verdade lógica proposicional escrita na linguagem das teorias algébricas. Na semântica do Cálculo de Predicados intervém ainda a atribuição de valores verdades às fórmulas atômicas (igualdades entre termos e símbolos de predicados aplicados a termos) e às fórmulas que se iniciam por quantificadores.

Quanto às fórmulas atômicas, seus valores verdade dependem das interpretações dadas aos símbolos de predicados, aos símbolos funcionais e às constantes (e, portanto, também aos termos) em cada universo de discurso de uma linguagem formal ou modelo de uma teoria axiomática.

Exemplos:

- $(1 + 1) = 0$ é verdadeira no conjunto dos inteiros módulo 2 e é falsa no conjunto das matrizes quadradas 2x2, com a adição e os neutros usuais destes Universos.

- $(x + x = 1)$ não tem um valor verdade definido num dado Universo. Quando precedida de $(\exists x)$ essa fórmula fica verdadeira no Universo dos números inteiros módulo 3 e também no dos racionais, mas torna-se falsa no Universo dos números inteiros, segundo as interpretações usuais para adição e para o 1 nestes contextos. Precedida de $(\forall x)$ essa fórmula fica falsa em qualquer dos 3 universos citados.

Falta, ainda, examinar com precisão o significado da igualdade, único predicado lógico, e o valor de verdade das fórmulas que são iniciadas com os quantificadores. Iniciemos pela interpretação semântica do primeiro.

Sendo t_1 e t_2 termos da linguagem formal considerada, dizemos que a fórmula $\mathbf{t_1 = t_2}$ é verdadeira (**v**) exclusivamente quando ocorre que ambos os termos designam um mesmo elemento do Universo onde a linguagem está sendo interpretada, ou seja, são expressões da linguagem, eventualmente distintas, mas que se referem a um mesmo objeto do discurso. Se este não é o caso, então a fórmula é falsa (**f**) e, pela tabela da negação, $\neg (\mathbf{t_1 = t_2})$ é **v**.

Por fim, as fórmulas iniciadas por $\exists$ e $\forall$, que representam, respectivamente, "afirmações" particulares (ou ainda existenciais) e universais sobre os elementos de algum universo de discurso. Ora, os contextos podem incluir quantidades finitas ou infinitas de objetos ou de referentes. No caso de um universo finito, com **n** elementos, afirmar que existe algum elemento satisfazendo uma propriedade é equivalente a dizer que a propriedade é satisfeita pelo primeiro **ou** pelo segundo, **ou**, ... , **ou** pelo enésimo elemento. (Por quê?). Já afirmar que a propriedade vale para todos os **n** é o mesmo que dizer que vale para o primeiro **e** para o segundo **e** .... **e** para o enésimo elemento (não é mesmo?). Assim podemos considerar que o $\exists$ é um $\vee$ generalizado e o $\forall$ é um $\wedge$ generalizado. No entanto não será sempre possível aferir a validade destes tipos de fórmulas (existenciais ou universais) pelo simples uso de tabelas de verdades, pois poderíamos necessitar de uma infinidade de colunas: uma para cada elemento de um universo de discurso que contenha uma infinidade de objetos. Será necessário observar mais de perto todos os possíveis significados atribuíveis às fórmulas. Em algum universo ou contexto uma fórmula pode ser verdadeira, mas em outros não. Assim, em geral, tais fórmulas não podem ser consideradas válidas, ou verdadeiras em qualquer Universo. Concretizemos este último comentário com um exemplo.

<u>Exemplo</u>: Considere a seguinte fórmula P(x), escrita na linguagem das teorias algébricas:

$$P(x) \equiv [(1 + 1) \times x = 1]$$

A fórmula $(\exists x)$ P(x) será verdadeira no universo dos números racionais e nos inteiros módulo 3, mas será falsa no conjunto dos números inteiros e nos inteiros módulo 4, com as interpretações usuais para as operações (Por quê?). Por esse motivo dizemos que a fórmula $(\exists x)$ $[(1 + 1) \times x = 1]$ <u>não é válida</u> (ou que <u>não é universalmente verdadeira</u>), nesse caso ela é dita <u>contingente</u>, por valer em algum universo e não em não valer em outro.

Desde o início desta seção estamos admitindo que saibamos identificar, dada uma interpretação para os símbolos de predicados (que indicam propriedades de objetos de um determinado discurso ou relações entre eles), quando fórmulas atômicas fechadas são verdadeiras ou falsas em um determinado contexto (como foi o caso do exemplo dado logo acima para uma igualdade entre dois termos da linguagem algébrica). Vimos, na definição 1, como verificar a validade de fórmulas cuja "afirmação mais abrangente" é dada por um conectivo lógico. Vamos agora definir a noção de verdade ou falsidade de fórmulas universais e existenciais, por indução sobre o comprimento das fórmulas. Observe que também é possível definir por indução sobre o comprimento de proposições os seus valores verdade. Utilizando as tabelas de verdade podemos sempre aferir a verdade ou falsidade de uma proposição a partir de um conhecimento prévio sobre a verdade ou falsidade de suas fórmulas componentes, que possuem comprimento menor do que a proposição inicialmente considerada. Afinal é assim que podemos decidir sobre a verdade ou falsidade de uma fórmula utilizando tabelas de verdade, não é mesmo? Partindo de uma intuição ou de uma interpretação previamente fornecida para os símbolos não lógicos em um dado universo, ou seja, da possibilidade de reconhecimento da verdade ou falsidade das fórmulas mais simples – as atômicas (de comprimento 1), podemos decidir sobre a verdade ou falsidade de uma fórmula composta por meio das tabelas de verdade ou do emprego da definição 2 a seguir. As duas definições juntas nos permitirão tomar decisões sobre a verdade ou falsidade de qualquer fórmula do Cálculo de Predicados.

<u>Definição 2</u>: (de <u>verdade</u> ou de <u>falsidade</u> das fórmulas que se iniciam com quantificadores).

Dada a fórmula P(x) (ou simplesmente P) de uma linguagem formal (que pode ou não conter alguma ocorrência da variável x) admitimos que saibamos identificar se P(x) é verdadeira (**v**) ou falsa (**f**) em todos os universos possíveis aos quais a linguagem formal de P pode fazer referência. Vamos admitir ainda que nos é dado um determinado contexto de referência para a linguagem formal (ou um universo de discurso juntamente com as interpretações, neste universo, para as constantes e para os símbolos funcionais e de predicados da linguagem). Nessas condições, diremos que as fórmulas dos tipos $(\forall x)$P(x) e $(\exists x)$P(x) são verdadeiras ou falsas no contexto fornecido conforme satisfizerem o critério correspondente, dentre os descritos abaixo.

U1) $(\forall x)$ P(x) é **v** se realmente P(x) é **v** para todos os elementos do universo dado (aos quais consideramos que a variável x faz referência).

U2) $(\forall x)$ P(x) é **f** se realmente existir pelo menos um elemento do universo dado (na fórmula a seguir designado por x) para o qual P(x) é **f**.

E1) $(\exists x)\ P(x)$ é **v** se realmente existir pelo menos um elemento do universo dado (designado por x na fórmula que segue) para o qual $P(x)$ é **v**.

E2) $(\exists x)\ P(x)$ é **f** se realmente $P(x)$ é **f** para todos os elementos do universo dado (aos quais consideramos que a variável x faz referência).

<u>Definições 3</u>: Diremos que uma fórmula é <u>válida</u>, <u>universalmente verdadeira</u> ou uma <u>lei da lógica</u> se ela for verdadeira em todos os contextos ou universos onde seja possível dar interpretação ou significados para a linguagem formal na qual ela é escrita. Se uma fórmula é <u>universalmente falsa</u> (falsa em todos os contextos possíveis) então sua negação será uma lei da lógica (por quê?). Fórmulas que não são nem verdades nem falsidades universais, como a do exemplo dado na linguagem algébrica, antes da definição 2 acima, são ditas <u>contingentes</u>.

<u>Exercício 7</u>: Temos as seguintes verdades lógicas que não podem ser demonstradas por tabelas de verdade pois envolvem quantificadores. Demonstre-as usando a definição 2 (use as tabelas também, para avaliar a veracidade de fórmulas com conectivos).
Obs: Quando uma mesma fórmula contiver sub-fórmulas do tipo $P(x)$ e $P(t)$ (onde x é uma variável e t um termo), esta última representa a mesma fórmula, mas com a troca das ocorrências de x por t.

1) $(\forall x)P(x) \rightarrow (\exists y)P(y)$
2) $(\forall x)P \leftrightarrow \neg(\exists x)\ \neg P$
3) $(\exists x)P \leftrightarrow \neg(\forall x)\ \neg P$
4) $\neg(\forall x)P \leftrightarrow (\exists x)\ \neg P$
5) $\neg(\exists x)P \leftrightarrow (\forall x)\ \neg P$
6) $(\forall x)P \rightarrow P(t)$ onde t é um termo
7) $\neg(\forall x)(\exists y)(\forall z)P \leftrightarrow (\exists x)(\forall y)(\exists z)\ \neg P$
8) $(\forall x)\ (x = x)$
9) $(\forall x)(\forall y)(x = y \rightarrow f(x) = f(y))$ onde f é um símbolo funcional qualquer.
10) $(\forall x)(\forall y)(x = y \rightarrow (P(x) \leftrightarrow P(y)))$

<u>Exercício 8</u>: Dê exemplos e contraexemplos para as fórmulas fechadas dos exemplos do item **E)** (p. 6 da apostila), comprovando assim que representam afirmações contingentes. Não esqueça, você precisa fornecer universos e interpretações para os símbolos não lógicos, tanto que as validem como que as invalidem. Formule mais um exemplo de fórmula contingente em alguma linguagem formal que você especifique. Justifique suas respostas.

<u>*Exercício 9</u>: Decida se são válidas, contingentes, universalmente falsas ou se essas classificações não se aplicam a cada uma das fórmulas escritas no exercício 5 como "tradução em linguagem formal" de cada uma das 10 frases pesquisadas na mídia por alunos de MAT0349 nele citadas. (será discutido mais à frente)

<u>Exercício 10</u>: Mostre que os axiomas de incidência de Hilbert podem ser verdadeiros em um Universo com apenas 4 pontos, fixando interpretações para os predicados introduzidos no exercício 4 B) das páginas 7 e 8. Mostre ainda que nesse Universo não valem os axiomas de ordem de Hilbert.