Lista de Exercícios X

1 Em $t = 0$ o átomo de hidrogênio encontra-se no estado

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{10}}\left(2\,|100\rangle + |210\rangle + \sqrt{2}\,|211\rangle + \sqrt{3}\,|21-1\rangle\right),$$

na base $|n\,l\,m\rangle$.

(a) Qual o valor esperado da energia desse sistema?

(b) Qual a probabilidade de encontrar o sistema com $l = 1$, $m = +1$ como função do tempo?

(c) Qual a probabilidade de encontrar o elétron dentro de um raio de 10^{-10} cm do próton (em t=0)? Uma boa aproximação é aceitável aqui.

(d) Como a função de onda correspondente evolui no tempo? Isto é, como é $\psi(\mathbf{r}, t)$?

(e) Suponha que uma medida é feita que mostra que $L = 1$ e $L_z = +1$. Descreva a função de onda imediatamente após essa medida.

2 Dois férmions não relativísticos de massa m e spin 1/2 estão em um poço quadrado unidimensional de comprimento L, com V infinitamente grande e repulsivo fora do poço. Escreva as autofunções dos três estados de menor energia do sistema (autofunção espacial e de spin) em termos das autofunções dos estado individuais dos férmions.

3 Considere o estado fundamental do átomo de hidrogênio. Encontre

(a) Os valores de esperados $\langle r\rangle$ e $\langle r^2\rangle$ em termos do raio de Bohr a_0.

(b) Os valores de esperados $\langle x\rangle$ e $\langle x^2\rangle$. Dica: Não é necessário integrar novamente, note que $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, e explore a simetria do estado fundamental.

(c) O valor esperado $\langle x^2\rangle$ para o estado $n = 2, l = 1, m = 1$. Dica: Esse estado não é simétrico em x, y, z. Use $x = r\sin\theta\cos\phi$.

4 O momento angular orbital de uma partícula é descrito pelo estado

$$\Psi = N\left[\frac{1}{3}Y_{00}(\theta,\varphi) + \frac{1}{6}Y_{10}(\theta,\varphi)\right] .$$

1. Encontre N para que este estado esteja propriamente normalizado.
2. Este estado é autovetor de $\mathbf{L}^2$? Por que?
3. Este estado é autovetor de L_z? Por que?
4. Qual a probabilidade de uma medida obter $\ell = 1$?
5. Qual a probabilidade de uma medida obter $m = 0$?

⑤ Considere os operadores $L_\pm \equiv L_x \pm iL_y$, onde L_x, L_y e L_z são as componentes do operador momento angular.

1. Qual é a variância de L_z, *i.e.* $(\Delta L_z)^2 = \langle L_z^2 \rangle - \langle L_z \rangle^2$ se o estado do sistema é dado por
$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{6}} \left(Y_{20} - Y_{2-1} + 2iY_{22} \right) \ .$$
2. Qual o valor esperado de $\mathbf{L}^2$?
3. Qual a variância de $\mathbf{L}^2$?

⑥ Uma partícula de massa m confinada numa caixa de esférica de raio a é descrita pela hamiltoniana
$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(r) \ ,$$
onde o potencial central $V(r)$ é dado por
$$V(r) = \begin{cases} 0 & \text{para} \quad 0 < \mathrm{r} < \mathrm{a} \\ \infty & \text{fora} \end{cases}$$

1. Qual a condição de contorno a ser adotada na solução do problema de autovalores desta hamiltoniana?
2. Qual a energia do estado fundamental? Qual a sua degenerescência?

⑦ Um elétron no campo coulombiano de um próton encontra-se num estado descrito pela função de onda
$$\Psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{35}} \left[\Psi_{311}(\mathbf{r}) + 5\Psi_{21-1}(\mathbf{r}) + 3\Psi_{210}(\mathbf{r}) \right] \quad ,$$
onde $\Psi_{nlm}(\mathbf{r}) = R_{nl}(r) Y_{lm}(\theta, \phi)$, são as autofunções normalizadas da hamiltoniana e $E_n = -\frac{me^4}{2\hbar^2 n^2}$ as energias.

1. $\Psi(\mathbf{r})$ é uma autofunção da hamiltoniana? Se é, qual é o autovalor correspondente de H? Se não, qual é o valor esperado de H?
2. $\Psi(\mathbf{r})$ é uma autofunção de $\mathbf{L}^2$? Se é, qual é o autovalor correspondente? Se não, qual é o valor esperado de $\mathbf{L}^2$?
3. $\Psi(\mathbf{r})$ é uma autofunção de L_z? Se é, qual é o autovalor correspondente? Se não, qual é o valor esperado de L_z?
4. Calcule as probabilidades do elétron se encontrar num estado com $l = 1$ e projeções $m = 1,\ 0,\ -1$, respectivamente.

8 Encontre os autoestados e respectivas autofunções de um oscilador harmônico tridimensional isotrópico, *i.e.* $V(r) = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2$.

1. Resolva o problema em coordenadas cartesianas. Qual a degenerescência dos autoestados de H?
2. Resolva novamente o problema, mas desta vez imponha que os autoestados também são autovetores de L_z e $\mathbf{L}^2$.