



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

PME-3554 – Introdução às Estruturas Aeronáuticas

Aula #10

Prof. Dr. Roberto Ramos Jr.

21/09/2023



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Agenda

Teoria de Placas

Parte 2: Equacionamento geral para análise de placas sob carregamentos transversais

1. Hipóteses de Kirchhoff
2. Estado tensional, equações constitutivas e esforços solicitantes
3. Relações deformações-deslocamentos
4. Equações de equilíbrio e a equação governante



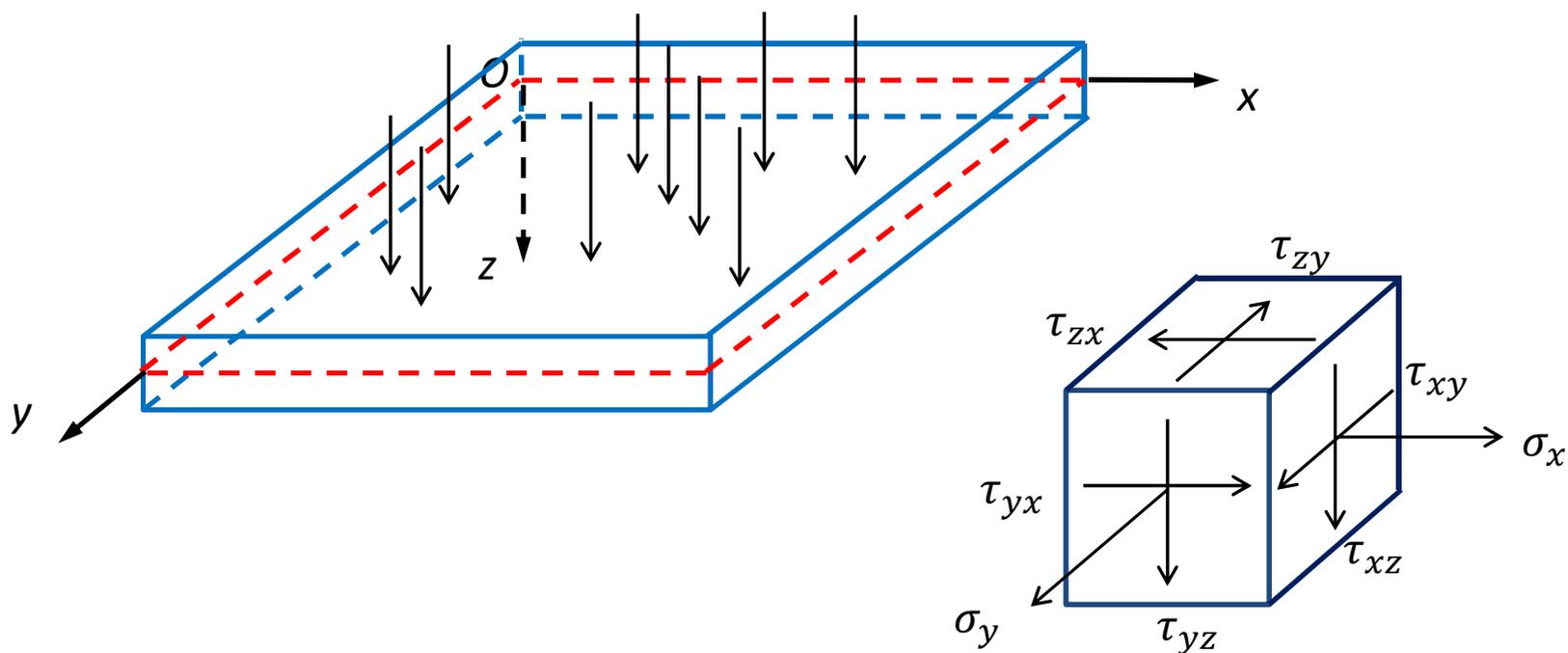
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

1. Hipóteses de Kirchhoff

1. Material homogêneo, isótropo e com comportamento elástico-linear;
2. A superfície de meia espessura da placa é inicialmente plana;
3. As deflexões dos pontos pertencentes ao plano de meia espessura da placa são pequenas em comparação à espessura. As rotações, medidas em radianos, são, portanto, muito pequenas se comparadas à unidade e os quadrados das rotações são quantidades que podem ser totalmente desprezadas face à unidade (hipótese de L.G.);
4. As linhas que eram originalmente retas e ortogonais ao plano de meia espessura na configuração inicial permanecerão retas e ortogonais ao plano de meia espessura na configuração deformada;
5. As tensões normais σ_z são muito pequenas se comparadas com as tensões planas (σ_x , σ_y e τ_{xy}) podendo ser desprezadas;
6. Admite-se também que o plano médio da placa, na configuração deformada, não apresentará deformações, constituindo-se em uma superfície isenta de tensões (sem tensões de membrana também).



2. Estado tensional, equações constitutivas e esforços solicitantes





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Como, por hipótese, a tensão normal σ_z está sendo desprezada frente às tensões planas, teremos (vide Hip.[1] e Hip.[5]):

$$\left[\begin{array}{l} \varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu\sigma_y] \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu\sigma_x] \\ \gamma_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy} \end{array} \right] \quad \longrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} [\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y] \\ \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} [\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x] \\ \tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy} \end{array} \right]$$

As integrações das tensões ao longo da espessura da placa geram esforços solicitantes (todos por unidade de comprimento), associados às respectivas tensões. Assim, são definidos:



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

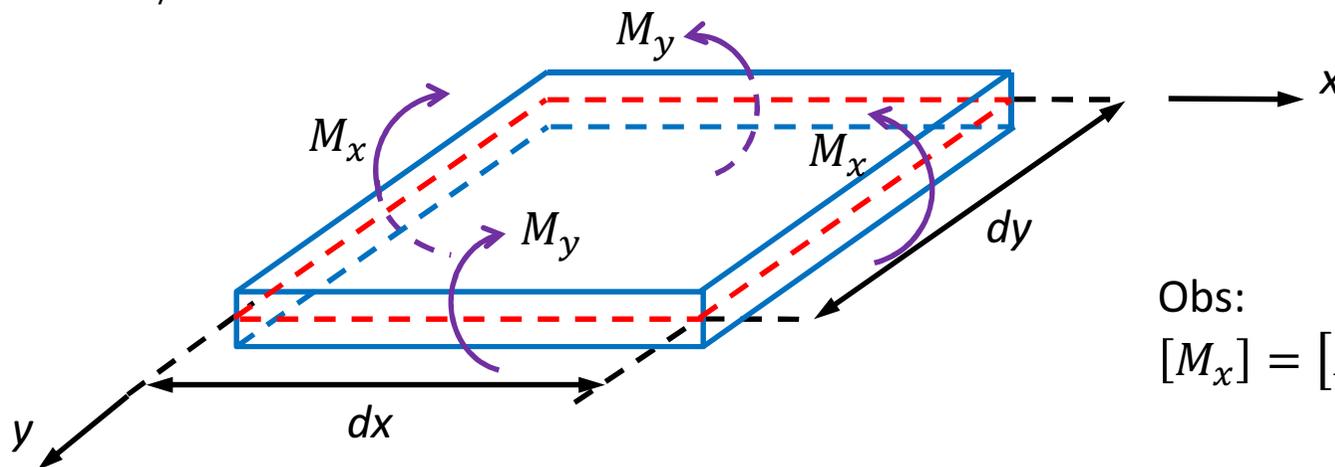
Momentos fletores M_x e M_y :

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x \cdot z \cdot dz$$

(momento fletor, por unidade de comprimento tomado na direção y , que flete a placa em torno do eixo y).

$$M_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y \cdot z \cdot dz$$

(momento fletor, por unidade de comprimento tomado na direção x , que flete a placa em torno do eixo x).



Obs:

$$[M_x] = [M_y] = N$$

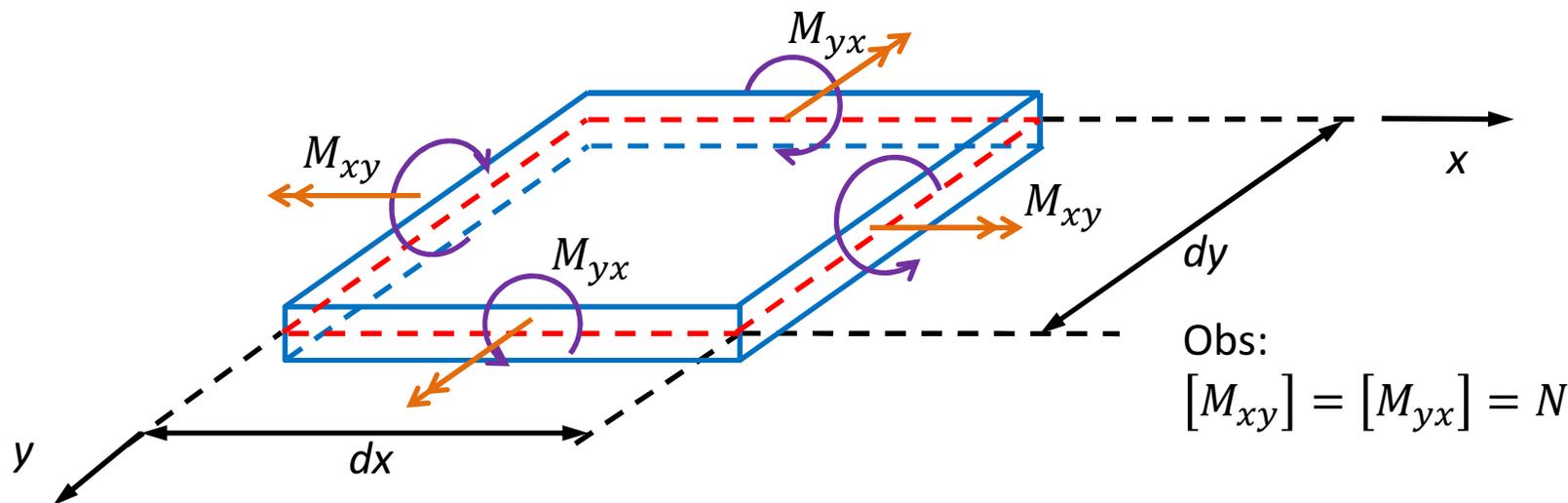


Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Momentos torçores M_{yx} e M_{xy} :

$$M_{yx} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yx} \cdot z \cdot dz \quad (\text{momento torçor, por unidade de comprimento tomado na direção } x, \text{ que torce a placa em torno do eixo } y).$$

$$M_{xy} = - \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} \cdot z \cdot dz \quad (\text{momento torçor, por unidade de comprimento tomado na direção } y, \text{ que torce a placa em torno do eixo } x).$$





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

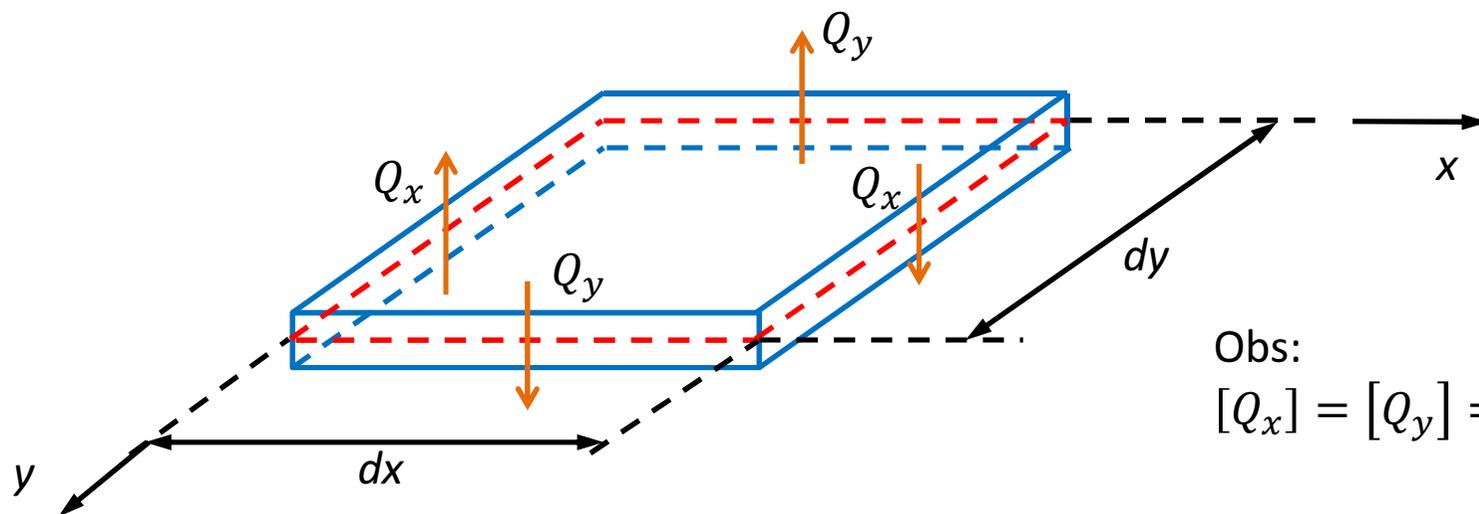
Forças cortantes Q_x e Q_y :

$$Q_x = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} \cdot dz$$

(força cortante, na direção z , causada pela tensão de cisalhamento τ_{xz} , por unidade de comprimento tomado na direção y).

$$Q_y = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yz} \cdot dz$$

(força cortante, na direção z , causada pela tensão de cisalhamento τ_{yz} , por unidade de comprimento tomado na direção x).



Obs:
 $[Q_x] = [Q_y] = N/m$



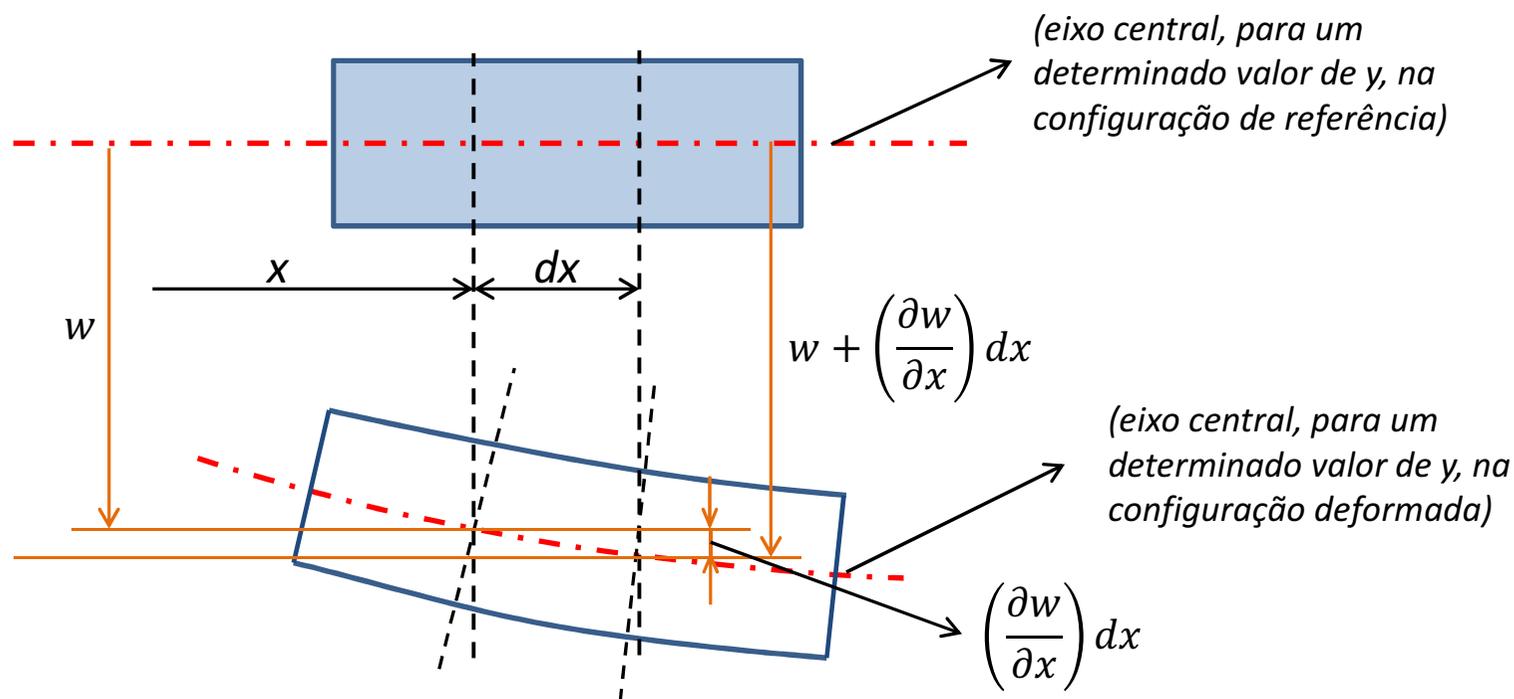
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

É digno de nota que, nas figuras apresentadas nos slides #6 a #8, só estão indicados os esforços solicitantes em uma determinada região infinitesimal da placa, sem (ainda) a devida indicação das variações destes esforços ao longo das direções x e y . Tais variações serão devidamente consideradas ao impormos o equilíbrio de forças e momentos (vide seção 4).



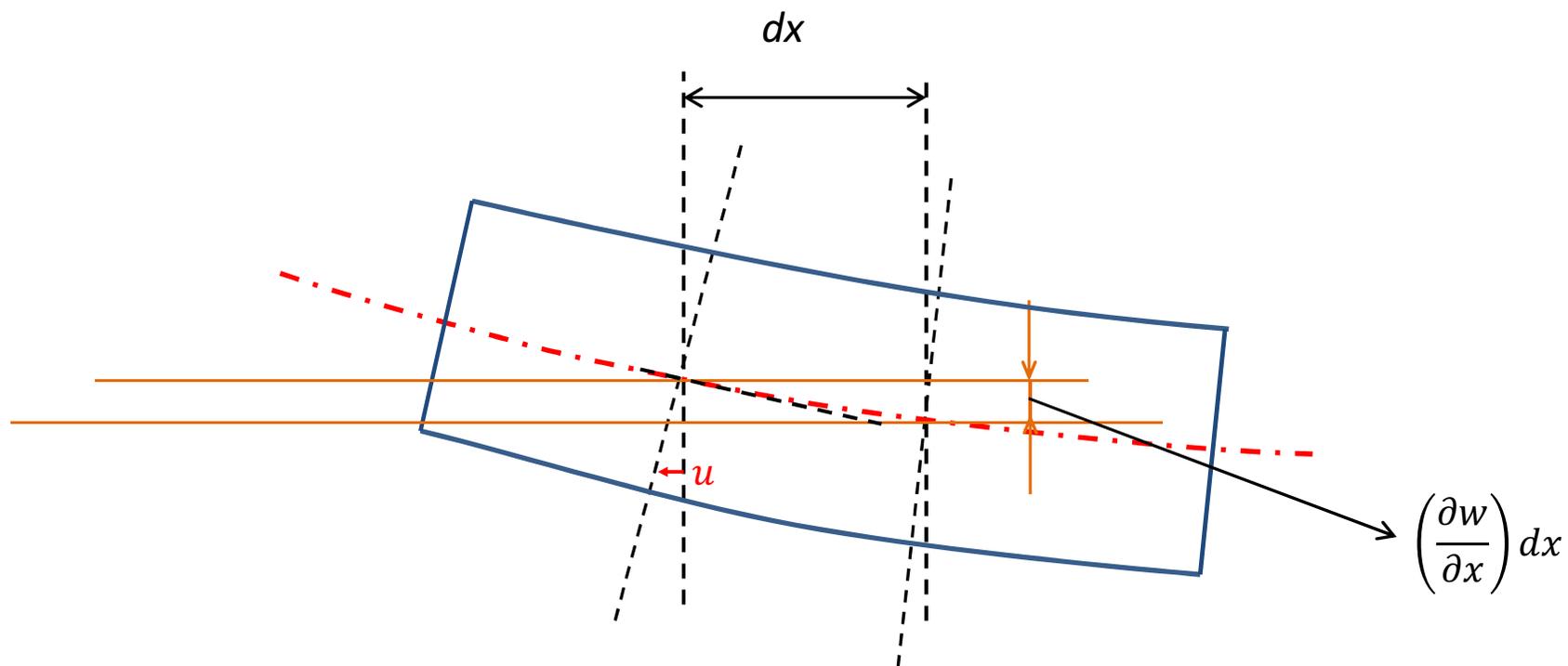
3. Relações de deformações-deslocamentos

Das hipóteses [2, 3, 4 e 6], podemos considerar válidas as seguintes aproximações para as componentes $u = u(x, y, z)$ e $v = v(x, y, z)$ dos deslocamentos dos pontos da placa:





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica



$$u(x, y, z) \cong -z \frac{\partial w}{\partial x}$$

Por analogia:

$$v(x, y, z) \cong -z \frac{\partial w}{\partial y}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Das relações deformações-deslocamentos em coordenadas cartesianas (vide Aula #03, slides #18, #19 e #23), e das hipóteses [3] e [6], obtemos:

$$\left[\begin{array}{l} \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{array} \right. \quad \longrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \sigma_x = -\frac{E}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] z \\ \sigma_y = -\frac{E}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] z \\ \tau_{xy} = -\frac{E}{(1+\nu)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) z \end{array} \right.$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Retomando as expressões vistas nos slides #6 e #7 para os esforços solicitantes M_x , M_y , M_{yx} e M_{xy} , teremos:

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz = -\frac{E}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \int_{-h/2}^{h/2} z^2 dz = -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right]$$

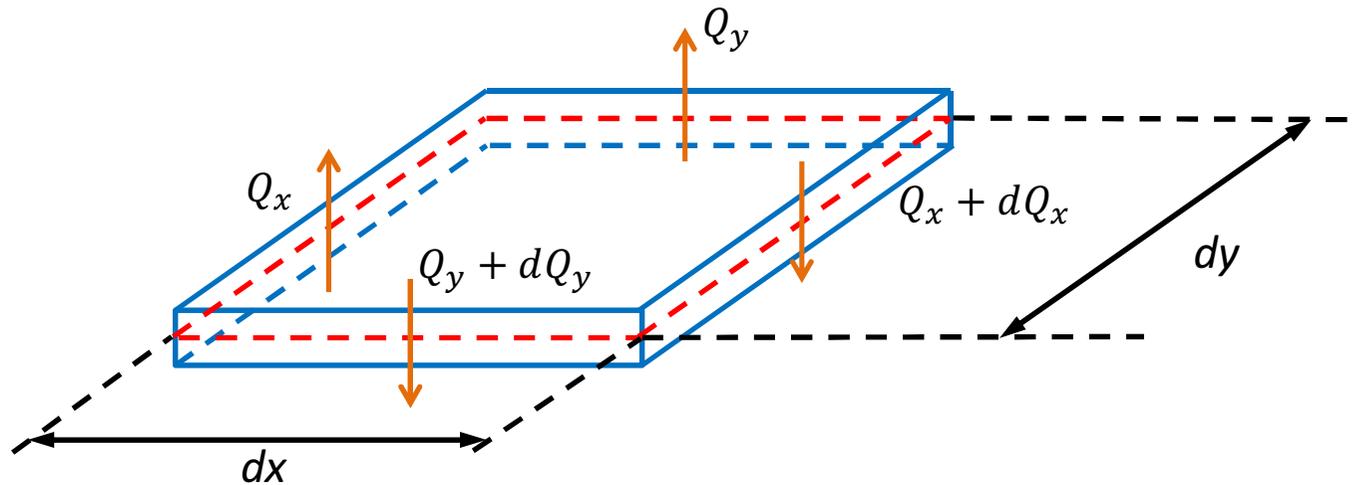
$$M_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z dz = -\frac{E}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] \int_{-h/2}^{h/2} z^2 dz = -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right]$$

$$M_{xy} = -M_{yx} = -\int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yx} z dz = \frac{E}{(1+\nu)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \int_{-h/2}^{h/2} z^2 dz = D(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)$$



4. Equações de equilíbrio e a equação governante

Equação de equilíbrio de forças na direção vertical (direção z):



$$\left[Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx \right] dy - Q_x dy + \left[Q_y + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy \right] dx - Q_y dx + q(x, y) dx dy = 0$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

$$\left[Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx \right] dy - Q_x dy + \left[Q_y + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy \right] dx - Q_y dx + q(x, y) dx dy = 0$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} dx dy + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy dx + q(x, y) dx dy = 0$$

Dividindo cada parcela pelo produto $dx dy$ e levando ao limite para $dx \rightarrow 0$ e $dy \rightarrow 0$, virá:

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = -q(x, y)$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Equações de equilíbrio de momentos nas direções x e y:
Neste caso, é preciso considerar todos os momentos nas direções x e y associados a:

- Momentos fletores na placa;
- Momentos torçores na placa;
- Momentos devidos aos binários das forças Q_x e Q_y .

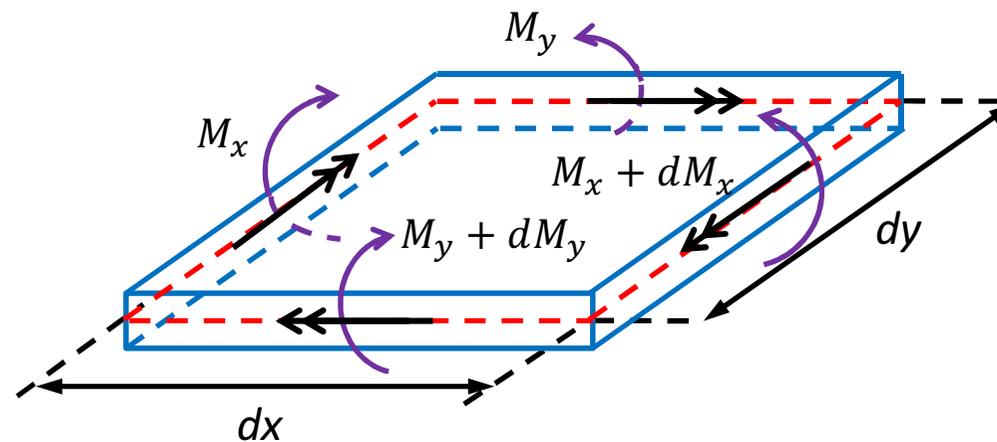


Fig.1. Momentos fletores em um elemento infinitesimal de placa.



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

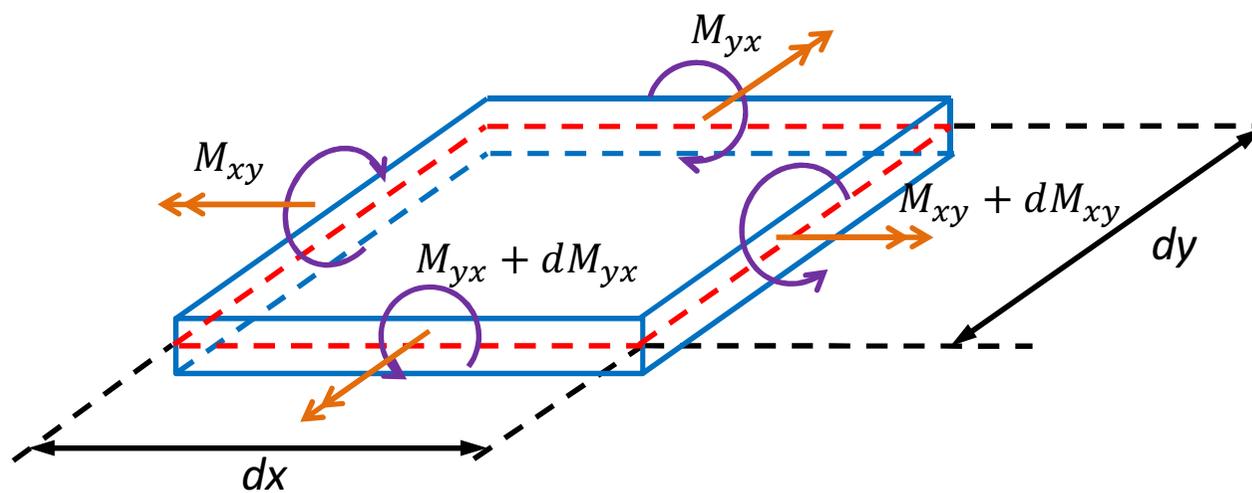


Fig.2. Momentos torçores em um elemento infinitesimal de placa.



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

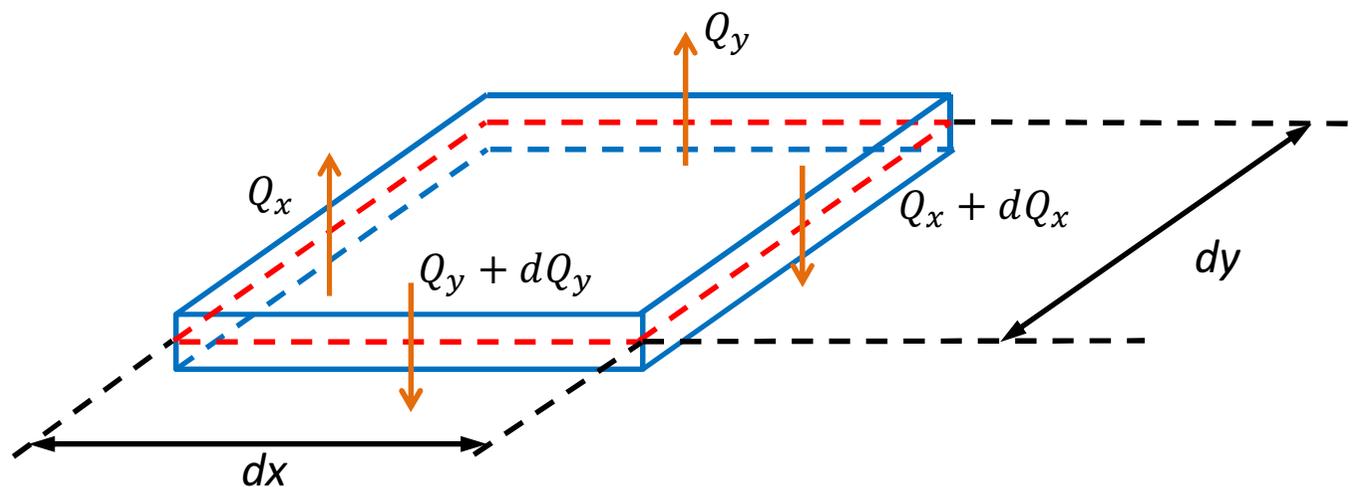


Fig.3. Binários devido às forças Q_x e Q_y em um elemento infinitesimal da placa.



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Equilíbrio de momentos na direção x:

$$M_y dx - \left[M_y + \frac{\partial M_y}{\partial y} dy \right] dx + \left[M_{xy} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} dx \right] dy - M_{xy} dy + [Q_y dx] dy = 0$$

$$-\frac{\partial M_y}{\partial y} dx dy + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} dx dy + Q_y dx dy = 0$$

Dividindo cada parcela pelo produto $dx dy$ e levando ao limite para $dx \rightarrow 0$ e $dy \rightarrow 0$, virá:

$$Q_y = \frac{\partial M_y}{\partial y} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial x}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Equilíbrio de momentos na direção y:

$$\left[M_x + \frac{\partial M_x}{\partial x} dx \right] dy - M_x dy + \left[M_{yx} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} dy \right] dx - M_{yx} dx - [Q_x dy] dx = 0$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} dx dy + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} dx dy - Q_x dx dy = 0$$

Dividindo cada parcela pelo produto $dx dy$ e levando ao limite para $dx \rightarrow 0$ e $dy \rightarrow 0$, virá:

$$Q_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Obtenção da equação governante:

Substituindo as relações obtidas para Q_x (vide slide #20) e para Q_y (vide slide #19) na equação diferencial de equilíbrio de forças (vide slide #15), teremos:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial M_y}{\partial y} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \right) = -q(x, y)$$

E lembrando ainda que $M_{xy} = -M_{yx}$ (vide slide#13), mostra-se que:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{yx}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -q(x, y)$$

Utilizando, finalmente, as relações indicadas no slide #13, obtemos, após algumas simplificações, a equação governante que rege o comportamento de placas:

$$\boxed{\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q(x, y)}{D}} \quad \longleftrightarrow \quad \boxed{\nabla^4 w(x, y) = \frac{q(x, y)}{D}}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Referências:

[1] Timoshenko, S.P., Woinowsky-Krieger, W. Theory of Plates and Shells, 2nd ed. McGraw-Hill Book Company, 1987, cap.4. Part 21: Small deflections of laterally loaded plates, pg.79-83.