Álgebra Linear
--- Parte 3 ---

Prof. Daniel Emygdio de Faria Filho
fariafilho@usp.br

1

Álgebra Linear

A notação matricial

Ax = **b**

A = matrix com a composição nutricional.
x = vetor com as incógnitas (ingredientes e aditivos).
b = vetor com as exigências nutricionais.

A matriz A e o vetor **b** devem ser acrescidos com os coeficientes da equação de quantidade.

2

Álgebra Linear

A notação matricial

Sistema Linear de Equações

$$\begin{cases} x_1 + & x_2 + & \dots & + & x_n & = 1 \\ a_{21}x_1 + & a_{22}x_2 + & \dots & + a_{2n}x_n & & = b_2 \\ a_{31}x_1 + & a_{32}x_2 + & \dots & + a_{3n}x_n & & = b_3 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + & a_{m2}x_2 + & \dots & + a_{mn}x_n & & = b_m \end{cases}$$

Em notação matricial: Ax = b

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

3

Álgebra Linear

Exercício 1

Considere:

Ingredientes		PB (% MN)
Milho	x_1	9
Farelo de soja	x_2	45

Exigência = 20% PB na MN

Sistema linear de Equações:

$$\begin{cases} x_1 & + & x_2 & = 1 \\ 9\,x_1 & + 45\,x_2 & & = 20 \end{cases} \text{com } x_1 \text{ e } x_2 \geq 0$$

Notação matricial: Ax = **b**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 9 & 45 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 20 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 9 & 45 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 20 \end{bmatrix}$$

4

Álgebra Linear

Exercício 1

Notação matricial: Ax = **b**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 9 & 45 \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 20 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 9 & 45 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 20 \end{bmatrix}$$

Matriz Aumentada: A*
É formada pela junção da matriz A com o vetor **b**.

$$A^* = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \vdots & 1 \\ 9 & 45 & \vdots & 20 \end{bmatrix}$$

5

Álgebra Linear

Análise de Existência de Solução

Teorema de Frobenius: existência de soluções

Baseia-se no Rank ou Posto. Indica o número de linhas ou colunas linearmente independentes.

Solução única	Posto (A) = Posto (A*) = nº incógnitas
Infinitas soluções	Posto (A) = Posto (A*) ≠ nº incógnitas
Sem solução	Posto (A) ≠ Posto (A*)

6

Álgebra Linear

Exercício 1

Notação matricial: Ax = **b**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 9 & 45 \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 20 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 9 & 45 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 20 \end{bmatrix}$$

Matriz Aumentada: A*

É formada pela junção da matriz A com o vetor **b**.

$$A^* = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \vdots & 1 \\ 9 & 45 & \vdots & 20 \end{bmatrix}$$

7

Álgebra Linear

Exercício 1

Análise da existência de soluções:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 9 & 45 \end{bmatrix} \qquad A^* = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \vdots & 1 \\ 9 & 45 & \vdots & 20 \end{bmatrix}$$

Número de incógnitas?
Posto (A)?
Posto (A*)?
Análise de soluções?

Calcular o posto no matrixcalc.org

8

Álgebra Linear

Exercício 1

Análise da existência de soluções:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 9 & 45 \end{bmatrix} \qquad A^* = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \vdots & 1 \\ 9 & 45 & \vdots & 20 \end{bmatrix}$$

Número de incógnitas = **2**
Posto (A) = **2**
Posto (A*) = **2**

Solução única, pois:
Posto (A) = Posto (A*) = nº incógnitas

Deve-se verificar o atendimento da restrição de não negatividade para saber se a solução é factível ou infactível.

9

Álgebra Linear

Exercício 2

Considere: PB = 22 % e EM = 3100 kcal/kg.

Composição nutricional na matéria natural.

Ingredientes		PB (%)	EM (kcal/kg)
Milho grão	x_1	8	3380
Farelo de soja	x_2	45	2250

Pede-se:

a) O sistema linear e o sistema matricial de equações?
b) A matriz A e A* e os vetores **x** e **b**?
c) Número de incógnitas?
d) Posto (A) e Posto (A*)? **Resolver no matrixcalc.org**
e) Análise de existência de soluções?

10

Álgebra Linear

Exercício 2

Considere: PB = 22 % e EM = 3100 kcal/kg.

Composição nutricional na matéria natural.

Ingredientes		PB (%)	EM (kcal/kg)
Milho grão	x_1	8	3380
Farelo de soja	x_2	45	2250

O sistema linear

$$\begin{cases} 3380\,x_1 + 2250\,x_2 = 3100 \\ 8\,x_1 + 45\,x_2 = 22 \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$$

com x_1 e $x_2 \geq 0$

O sistema matricial

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 8 & 45 \\ 3380 & 2250 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 22 \\ 3200 \end{bmatrix}$$

11

Álgebra Linear

Exercício 2

Considere: PB = 22 % e EM = 3100 kcal/kg.

Composição nutricional na matéria natural.

Ingredientes		PB (%)	EM (kcal/kg)
Milho grão	x_1	8	3380
Farelo de soja	x_2	45	2250

As matrizes A e A* e os vetores b e x:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 8 & 45 \\ 3380 & 2250 \end{bmatrix} \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$A^* = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \vdots & 1 \\ 8 & 45 & \vdots & 22 \\ 3380 & 2250 & \vdots & 3100 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 22 \\ 3200 \end{bmatrix}$$

12

Álgebra Linear

Exercício 2

Considere: PB = 22 % e EM = 3100 kcal/kg.

Composição nutricional na matéria natural.

Ingredientes		PB (%)	EM (kcal/kg)
Milho grão	x_1	8	3380
Farelo de soja	x_2	45	2250

Nº incógnitas = 2
Posto (A) = 2
Posto (A*) = 3

Sem Solução, pois:
Posto (A) ≠ Posto (A*)

13

Álgebra Linear

Exercício 3

Considere:

Ingredientes		EM (kcal/kg MN)
Milho grão	x_1	3380
Farelo de soja	x_2	2250
Óleo de soja	x_3	8785

Exigência = 3200 kcal/kg MN

Pede-se:

a) O sistema linear e o sistema matricial de equações?
b) A matriz A e A* e os vetores **x** e **b**?
c) Número de incógnitas?
d) Posto (A) e Posto (A*)? **Resolver no matrixcalc.org**
e) Análise de existência de soluções?

14

Álgebra Linear

Exercício 3

Considere:

Ingredientes		EM (kcal/kg MN)
Milho grão	x_1	3380
Farelo de soja	x_2	2250
Óleo de soja	x_3	8785

Exigência = 3200 kcal/kg MN

O sistema linear de equações:

$$\begin{cases} x_1 + \quad x_2 + \quad x_3 = 1 \\ 3380\,x_1 + 2250\,x_2 + 8785\,x_3 = 3200 \end{cases} \text{com } x_1,\ x_2 \text{ e } x_3 \geq 0$$

O sistema matricial de equações: Ax = b

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3380 & 2250 & 8785 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3200 \end{bmatrix}$$

15

Álgebra Linear

Exercício 3

Considere:

Ingredientes		EM (kcal/kg MN)
Milho grão	x_1	3380
Farelo de soja	x_2	2250
Óleo de soja	x_3	8785

Exigência = 3200 kcal/kg MN

Matrizes A e A* e vetores b e x:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3380 & 2250 & 8785 \end{bmatrix} \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$A^* = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 1 \\ 3380 & 2250 & 8785 & \vdots & 3200 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 3200 \end{bmatrix}$$

16

Álgebra Linear

Exercício 3

Considere:

Ingredientes		EM (kcal/kg MN)
Milho grão	x_1	3380
Farelo de soja	x_2	2250
Óleo de soja	x_3	8785

Exigência = 3200 kcal/kg MN

Nº incógnitas = 3
Posto (A) = 2
Posto (A*) = 2

Infinitas Soluções, pois:
Posto (A) = Posto (A*) ≠ nº incógnitas

Deve-se verificar o atendimento da restrição de não negatividade para saber se a solução é factível ou infactível.

17

Álgebra Linear

Resolução com Matriz Inversa

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$
$$A^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$$
$$(A^{-1}A)\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$$
$$\boldsymbol{I_n}\,\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$$
$$\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$$

A^{-1} é a inversa de A.
I_n = identidade.

Uma matriz $A_{n \times n}$ é inversível se existir uma matriz $B_{n \times n}$ tal que:
AB = BA = I_n

B é a matriz inversa de A.

I_n = identidade. Matriz quadrada cujos elementos da diagonal são iguais a 1 e os demais igual a zero.

18

Álgebra Linear

Exercício 4

Considere:

Ingredientes		PB (% MS)	NDT (% MS)
Silagem de milho	x_1	8	62
Feno de braquiária	x_2	9	52
Caroço de algodão	x_3	23	83

Exigência (na MS): 14% PB e 65% NDT

Pede-se:

a) O sistema linear e matricial de equações?
b) A matriz A e A* e os vetores **x** e **b**?
c) Número de incógnitas?
d) Posto (A) e Posto (A*)?
e) Análise de existência de soluções?
f) Resolver utilizando Matriz Inversa.

19

Álgebra Linear

Exercício 4

Considere:

Ingredientes		PB (% MS)	NDT (% MS)
Silagem de milho	x_1	8	62
Feno de braquiária	x_2	9	52
Caroço de algodão	x_3	23	83

Exigência (na MS): 14% PB e 65% NDT

O sistema linear

$$\begin{matrix} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ 8\ x_1 & +9 & x_2 & +23 & x_3 & = & 14 \\ 62\ x_1 & +52 & x_2 & +83 & x_3 & = & 65 \end{matrix}$$

com x_1, x_2 e $x_3 \geq 0$

O sistema matricial

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 8 & 9 & 23 \\ 62 & 52 & 83 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 14 \\ 65 \end{bmatrix}$$

20

Álgebra Linear

Exercício 4

Considere:

Ingredientes		PB (% MS)	NDT (% MS)
Silagem de milho	x_1	8	62
Feno de braquiária	x_2	9	52
Caroço de algodão	x_3	23	83

Exigência (na MS): 14% PB e 65% NDT

As matrizes A e A* e os vetores b e x:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 8 & 9 & 23 \\ 62 & 52 & 83 \end{bmatrix} \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$A^* = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 1 \\ 8 & 9 & 23 & \vdots & 14 \\ 62 & 52 & 83 & \vdots & 65 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 14 \\ 65 \end{bmatrix}$$

21

Álgebra Linear

Exercício 4

Considere:

Ingredientes		PB (% MS)	NDT (% MS)
Silagem de milho	x_1	8	62
Feno de braquiária	x_2	9	52
Caroço de algodão	x_3	23	83

Exigência (na MS): 14% PB e 65% NDT

Nº incógnitas = 3
Posto (A) = 3
Posto (A*) = 3

Solução única, pois:
Posto (A) = Posto (A*) = nº incógnitas

22

Álgebra Linear

Exercício 4

Considere:

Ingredientes		PB (% MS)	NDT (% MS)
Silagem de milho	x_1	8	62
Feno de braquiária	x_2	9	52
Caroço de algodão	x_3	23	83

Exigência (na MS): 14% PB e 65% NDT

Resolução por matriz Inversa

$$x = A^{-1}\, b \qquad x = \begin{bmatrix} -449/171 & -31/171 & 14/171 \\ 254/57 & 7/57 & -5/57 \\ -142/171 & 10/171 & 1/171 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 14 \\ 65 \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}157895 \\ 0{,}473684 \\ 0{,}368421 \end{bmatrix}$$

23

Álgebra Linear

Resolução utilizando Regra de Cramer

Pré-requisito: matriz quadrada e inversível.

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)},\ x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)},\ \ldots,\ x_n = \frac{\det(A_n)}{\det(A)}$$

Onde, Ai é a matriz obtida de A substituindo-se a i-ésima coluna de A por **b**.

Det = determinante.

24

Álgebra Linear

Exercício 4

Considere:

Ingredientes		PB (% MS)	NDT (% MS)
Silagem de milho	x_1	8	62
Feno de braquiária	x_2	9	52
Caroço de algodão	x_3	23	83

Exigência (na MS): 14% PB e 65% NDT

O sistema linear

$$\begin{aligned} x_1 &+ x_2 &+ x_3 &= 1 \\ 8\,x_1 &+ 9\,x_2 &+ 23\,x_3 &= 14 \\ 62\,x_1 &+ 52\,x_2 &+ 83\,x_3 &= 65 \end{aligned}$$

com x_1, x_2 e $x_3 \geq 0$

O sistema matricial

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 8 & 9 & 23 \\ 62 & 52 & 83 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 14 \\ 65 \end{bmatrix}$$

25

Álgebra Linear

Exercício 4

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 8 & 9 & 23 \\ 62 & 52 & 83 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 1 \\ 14 \\ 65 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 14 & 9 & 23 \\ 65 & 52 & 83 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 8 & 9 & 23 \\ 62 & 52 & 83 \end{vmatrix}} = \frac{27}{171} = 0{,}157895$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 8 & 14 & 23 \\ 62 & 65 & 83 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 8 & 9 & 23 \\ 62 & 52 & 83 \end{vmatrix}} = \frac{81}{171} = 0{,}473684$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 8 & 9 & 14 \\ 62 & 52 & 65 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 8 & 9 & 23 \\ 62 & 52 & 83 \end{vmatrix}} = \frac{63}{171} = 0{,}368421$$

26

Álgebra Linear

Exercício 5 – Para entregar

Considere:

Ingredientes		PB (%)	EM (kcal/kg)
Milho	x_1	9	3350
Farelo de soja	x_2	47	2250
Óleo de soja	x_3	0	8750

Exigência: 21% de PB e 3150 kcal/kg

Pede-se:

a) O sistema linear e matricial de equações?
b) A matriz A e A* e os vetores x e b?
c) Número de incógnitas?
d) Posto (A) e Posto (A*)? (matrixcalc.org)
e) Análise de existência de soluções?
f) Resolver utilizando Matriz Inversa (matrixcalc.org; **passo a passo**).
g) Resolver pela Regra de Cramer (matrixcalc.org; **direto**).

27

Obrigado!

Prof. Daniel Emygdio de Faria Filho
fariafilho@usp.br

28